УДК 519.175

©2012. **А. А. Кадубовский**

ДВУХЦВЕТНЫЕ ХОРДОВЫЕ N-ДИАГРАММЫ С ОДНИМ ЧЕРНЫМ ЦИКЛОМ

В статье рассматривается класс двухцветных хордовых N-диаграмм с n хордами, которые имеют только один цикл черного цвета. Установлены формулы для вычисления числа неэквивалентных таких диаграмм относительно действия циклической и диэдральной групп соответственно.

Ключевые слова: *хордовая диаграмма, оснащенный цикл, действие диэдральной группы.*

Введение. Одной из основных задач многих областей математики, в частности топологии, является задача о классификации исследуемых объектов, которая в свою очередь предполагает построение полных инвариантов. В большинстве случаев для решения последней эффективно используют некоторые графы с дополнительной информацией, в частности хордовые диаграммы.

Напомним, что хордовой диаграммой порядка n или, коротко, n-диаграммой называют конфигурацию на плоскости, которая состоит из окружности, $2n$ точек на ней (являющихся вершинами правильного $2n$-угольника) и n хорд, соединяющих указанные точки. Две диаграммы называют изоморфными, если их можно совместить в результате поворота. Диаграммы называют эквивалентными, если их можно совместить с помощью поворота, осевой симметрии или же их композиции.

Вопросами перечисления хордовых диаграмм определенного вида занимался целый ряд известных математиков, в частности авторы работ [1-5]. Задачи о подсчете числа неизоморфных и неэквивалентных n-диаграмм были полностью решены в работах [4], [5]. Подсчет числа неизоморфных (в частности двухцветных) диаграмм *фиксированного рода* является достаточно сложной и в общем случае *не решенной задачей.* Известными являются лишь результаты для планарных (рода 0), тороидальных (рода 1) n-диаграмм и $2m$-диаграмм максимального рода m [5].

Двухцветные хордовые O- и N-диаграммы были использованы в работе [6] для топологической классификации гладких функций определенного класса на замкнутых ориентируемых и соответственно неориентируемых поверхностях фиксированного рода. В [7] установлены формулы для подсчета числа неизоморфных (относительно действия циклической группы) и неэквивалентных (относительно действия диэдральной группы) двухцветных O- и N-диаграмм. В [8] установлены формулы для подсчета числа неизоморфных и неэквивалентных O-диаграмм, среди циклов которых только один черный цикл. В [9] подсчитано число неизоморфных O-диаграмм с одним черным и одним белым циклом. Число неизоморфных и неэквивалентных планарных O-диаграмм (рода 0) подсчитано в работе [10].

В данной работе установлены формулы для вычисления числа неизоморфных и неэквивалентных N-диаграмм с n хордами, среди циклов которых только один цикл черного цвета.

1. Основные понятия и определения.

Определение 1.1. Рассмотрим окружность и $2n$ точек на ней, которые являются вершинами правильного $2n$-угольника. Раскрасим ее дуги поочередно в два цвета (черный и белый) и занумеруем указанные вершины числами от 1 до $2n$ по ходу часовой стрелки. Полученную конструкцию будем называть двухцветным $2n$-шаблоном – *рис. 1 a*).

Определение 1.2. Двухцветной хордовой диаграммой будем называть n-диаграмму, дуги окружности которой поочередно раскрашены в два цвета (черный и белый) – *рис. 1 b*), c).

В дальнейшем будем рассматривать только те двухцветные n-диаграммы, которые построены на основе двухцветного $2n$-шаблона (*рис. 1 a*)).

Определение 1.3. 2-цветную n-диаграмму, которая не содержит (содержит) хорд, соединяющих вершины с номерами одинаковой четности, будем называть O-диаграммой (N-диаграммой) – *рис. 1 c*), b).

Под *черным (белым) циклом* двухцветной n-диаграммы будем понимать чередующуюся последовательность черных (белых) дуг и хорд, в которой конец каждой черной дуги совпадает с началом единственной хорды, исходящей из нее, а второй конец каждой такой хорды определяет начало последующей черной дуги.

«Обход» (вычленение) некоторого черного цикла диаграммы можно совершать начиная с «четного» конца произвольной черной дуги. Назовем ее «стартовой». Двигаясь в направлении против хода часовой стрелки мы достигнем ее начала. Далее следует двигаться вдоль хорды, исходящей из этого начала, до второго ее конца на окружности диаграммы. С этого момента и в дальнейшем движение по окружности совершается исключительно вдоль черных дуг, вторые концы которых однозначно определяют последующие хорды цикла. И так до того момента, пока не будет достигнута «стартовая» дуга черного цикла.

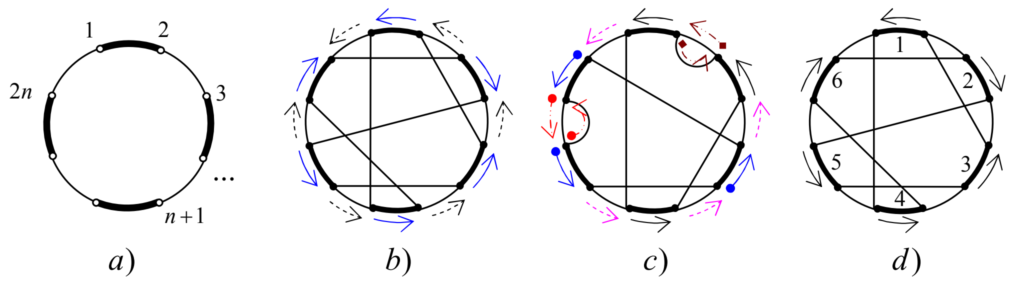


Рис. 1. a) двухцветный $2n$-шаблон; b) N-диаграмма с 1 черным и 1 белым циклом; c) O- диаграмма с 2 черными и 3 белыми циклами; d) N-диаграмма с 1 черным и 1 белым циклами

Множество N-диаграмм, построенных на двухцветном $2n$-шаблоне, обозначим $\Im_n^N$, N-диаграмм с 1 черным циклом – $\Im_{n,1}^N$, а N-диаграмм с 1 черным и 1 белым циклом – $\Im_{n,1,1}^N$ (*рис. 1 d*)).

Циклическую группу, порожденную элементом $\xi = \sigma^2$, $\sigma = (1, 2, 3, ..., 2n)$ называют группой циклических перестановок порядка n, которую будем обозначать

$C_n^* = \{\xi^i | i = 1, 2, ..., n\}$.

Пусть далее

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2n) \circ (2, 2n-1) \circ (3, 2n-2) \circ ... \circ (n, n+1).$$

Тогда все симметрии двухцветного $2n$-шаблона исчерпываются: n поворотами $\xi^i \in C_n^*$, $i = 1, 2, ..., n$ и n (осевыми) симетриями $\tau_i = \tau \circ \xi^i$. Группу симметрий (порядка $2n$) двухцветного $2n$-шаблона обозначим $D_{2n}^* = \{\xi^i, \tau_i \mid i = 1, ..., n\}$.

Замечание 1.1. Известно (напр. [5], [6], [7]), что группы C_n^* и D_{2n}^* действуют на множестве хордовых диаграмм, в частности на множестве $\Im_{n,1}^N$, как сопряжение. А именно: пусть $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & \dots & k_{2n-1} & k_{2n} \\ k_1 & 1 & \dots & k_{2n} & k_{2n-1} \end{pmatrix}$ — подстановка (инволюция) на множестве номеров n_j вершин (двухцветного) $2n$-шаблона, которая определяет хорды, а поэтому и саму n-диаграмму $D = D(\alpha)$. Тогда очевидно, что каждую диаграмму можно отождествить с соответствующей подстановкой. Более того, имеют место следующие **критерии изоморфности и эквивалентности двухцветных диаграмм:**

диаграмма $D_1 = D(\alpha_1)$ изоморфна диаграмме $D_2 = D(\alpha_2)$ тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, 2, ..., n\}: \quad \alpha_1 = \xi^{-i} \circ \alpha_2 \circ \xi^i$;

диаграмма $D_1 = D(\alpha_1)$ эквивалентна диаграмме $D_2 = D(\alpha_2)$ тогда и только тогда, когда $\exists \gamma \in D_{2n}^*: \quad \alpha_1 = \gamma^{-1} \circ \alpha_2 \circ \gamma$.

Замечание 1.2. Занумеруем черные дуги двухцветного $2n$-шаблона номерами от 1 до n по ходу часовой стрелки. Если обход черных дуг единственного черного цикла диаграммы (из класса $\Im_{n,1}^N$) начинать с «первой» черной дуги шаблона в направлении против хода часовой стрелки (*рис. 1 d*)), то каждой такой диаграмме однозначно можно поставить в соответствие цикл (длины n), оснащенный знаками номеров черных дуг. Причем оснащение номера черной дуги знаком «минус» происходит в случае, когда направление обхода дуги меняется на противоположное в сравнении с направлением обхода предшествующей дуги цикла. Так диаграмме, изображенной на рис. 1 d), соответствует оснащенный цикл $(1, 4, -6, 2, -5, 3)$.

Более полную информацию можно найти, например в работах [6-8].

2. Число неизоморфных диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$.

Пример 1. Очевидно, что не существует N-диаграмм с 1 хордой (класс $\Im_{2,1}^N$ является пустым); класс $\Im_{2,1}^N$ состоит из единственной диаграммы — *рис. 2 a*); а число неизоморфных диаграмм из класса $\Im_{3,1}^N$ равно 2 – *рис. 2 b*).

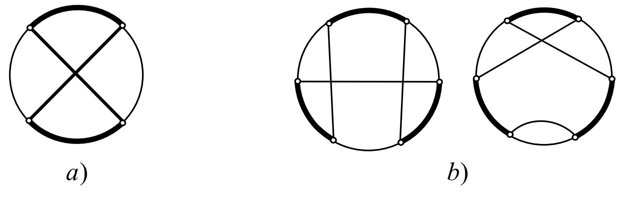


Рис. 2. a) единственная диаграмма из класса $\Im_{2,1}^N$; b) неизоморфные диаграммы из класса $\Im_{3,1}^N$.

В дальнейшем число неизоморфных (относительно действия группы C_n^*) диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$ будем обозначать через $d_{n,1}^{*(N)}$. Тогда по лемме Бернсайда и с учетом результатов работ [5], [6], имеет место равенство

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n}\left(\left|\Im_{n,1}^N\right| + \sum_{i|n, i\neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\rho\left(n,i\right)\right), \tag{1}$$

где $\rho\left(n,i\right)$ – число диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$, которые самосовмещаются при повороте (по часовой стрелке) на угол $\omega_i = \frac{2\pi}{2n}\cdot 2i = \frac{2\pi}{n}\cdot i$, то есть число элементов множества $\Im_{n,1}^N$, неподвижных относительно действия группового элемента $\xi^i \in C_n^*$; $\varphi(\cdot)$ – *функция Эйлера*; а суммирование ведется по всем делителям i числа n за исключением самого n.

Предложение 2.1. Для натуральных $n \geq 2$ имеет место равенство

$$\left|\Im_{n,1}^N\right| = (n-1)!\cdot\left(2^{n-1}-1\right). \tag{2}$$

Доказательство. С учетом замечания 1.2, каждую диаграмму из класса $\Im_{n,1}^N$ можно отождествить с циклом вида

$$b = \left(1, b_{j_2}, b_{j_3}, ..., b_{j_n}\right), \quad b_{j_i} \in \left\{\pm 2; \pm 3; ...; \pm n\right\}, b_{j_i} = b_{j_k} \Leftrightarrow i = k. \tag{3}$$

Общее число циклов указанного вида равно $(n-1)!\cdot 2^{n-1}$. Однако среди них точно $(n-1)!$ циклов, определяющих O-диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $\left|\Im_{n,1}^N\right| = (n-1)!\cdot\left(2^{n-1}-1\right)$. $\square$

Лемма 2.1. *Для нечетных $n \in \mathrm{N}$ имеют место формулы*

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n}\left((n-1)!\cdot\left(2^{n-1}-1\right) + \sum_{i|n, i\neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\rho\left(n,i\right)\right), \tag{4}$$

$$\rho\left(n,i\right) = \varphi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!\cdot\left(2^{i-1}-1\right). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $n = 2m+1$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что число диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$, которые самосовмещаются при повороте на угол $\omega_i = \frac{2\pi}{n}\cdot i$, можно вычислить по формуле (5).

1) Вначале выясним вопрос о том, *какой вид имеют оснащенные циклы*, определяющие двухцветные диаграммы с одним черным циклом, которые *самосовмещаются при повороте на угол ω_i* – удовлетворяют условию $(*)$.

Пусть $i = \frac{n}{k}$ – делитель числа n, $k \neq 1$. Как было установлено ранее, каждую такую n-диаграмму можно отождествить с оснащенным циклом $b = (1, l_2, l_3, ..., l_n)$, элементы которого – номера (с учетом знаков) черных дуг диаграммы, которые встречаются при обходе единственного черного цикла n-диаграммы $D(b)$.

Если упорядоченная пара $\{1, l_2\} \in b$, то циклу b должна принадлежать и пара $\{1+i, \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i)\}$, аналогично $\{1+2i, \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+2i)\} \in b$,...,$\{1+i(k-1), \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i(k-1))\} \in b$;

если упорядоченная пара $\{l_2, l_3\} \in b$, то циклу b должна принадлежать и пара $\{\mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i)\,, \mathrm{sign}(l_3)\cdot(|l_3|+i)\}$, аналогично $\{\mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+2i)\,, \mathrm{sign}(l_3)\cdot(|l_3|+2i)\} \in b$,..., $\{\mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i(k-1))\,, \mathrm{sign}(l_3)\cdot(|l_3|+i(k-1))\} \in b$.

Таким образом, множество (оснащенных) номеров черных дуг диаграммы, удовлетворяющей условию $(*)$, разбивается на k подмножеств – «черных блоков» $[b_j]$, в каждом из которых по i (оснащенных) номеров черных дуг:

$$[b_1] = \{1, l_2, l_3, ..., l_i\},$$

$$[b_2] = \{1+i, \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i)\,, \mathrm{sign}(l_3)\cdot(|l_3|+i)\,, ..., \mathrm{sign}(l_i)\cdot(|l_i|+i)\}, \ldots,$$

$$[b_k] = \{1+i(k-1), ..., \mathrm{sign}(l_i)\cdot(|l_i|+i(k-1))\}.$$

2) Взаимное расположение указанных блоков однозначно определяется выбором блока $[b_j]$, который следует за $[b_1]$. Более того, обход блоков совершается с шагом $h = j-1$. Поясним последнее: допустим, что $b = ([b_1][b_2]...) = (1, l_2, l_3, ..., l_i;$ $1+i, \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i)\,, \mathrm{sign}(l_3)\cdot(|l_3|+i)\,, ..., \mathrm{sign}(l_i)\cdot(|l_i|+i)\,; ...)$.

Так как цикл b содержит упорядоченную пару $\{l_i, 1+i\}$, то циклу b принадлежит и пара $\{\mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_i|+i)\,, 1+2i\} \in b$. Это означает, что после блока $[b_2]$ следует блок $[b_3]$ і т.д.. То есть цикл b имеет вид $([b_1][b_2][b_3]...[b_k])$ и поэтому обход блоков совершается с шагом $h = 1$. Аналогично из допущения, что b имеет вид $b = ([b_1][b_3]...)$, нетрудно заключить, что обход его блоков совершается с шагом $h = 2$, то есть $b = ([b_1][b_3][b_5]...)$. И т.д..

Таким образом, имеем $(k-1)$ возможностей перегруппировать черные блоки. Однако диаграмма будет иметь один черный цикл только в том случае, когда обход черных блоков совершается с шагом h, взаимно простым с $k = \frac{n}{i}$. То есть существует точно $\varphi(k) = \varphi\left(\frac{n}{i}\right)$ существенно различных типов таких диаграмм.

3) Зафиксируем допустимый шаг h (взаимно простой с k), с которым совершается обход k черных блоков $[b_1], [b_2], ..., [b_k]$. Очевидно, что оснащенную дугу b_{l_2} блока $[b_1]$ можно выбрать $(n-k)\times 2$ способами, так как k чисел $1, 1+i, ..., 1+i(k-1)$ заняли первые «позиции» в блоках $[b_1], [b_2], ..., [b_k]$;

оснащенную дугу b_{l_3} можно выбрать $(n-2k)\times 2$ способами, так как после выбора черной дуги с (оснащенным) номером l_2, числа $l_2, \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i)\,, ..., \mathrm{sign}(l_2)\cdot(|l_2|+i(k-1))$ заняли вторые «позиции» в соответствующих блоках, і т.д.

Итак, при каждом допустимом шаге h можно образовать точно

$$2\,(n-k)\cdot 2\,(n-2k)\cdot 2\,(n-3k)\cdot \ldots \cdot 2\,(n-(i-1)k) = \left(\tfrac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!\cdot 2^{i-1}$$

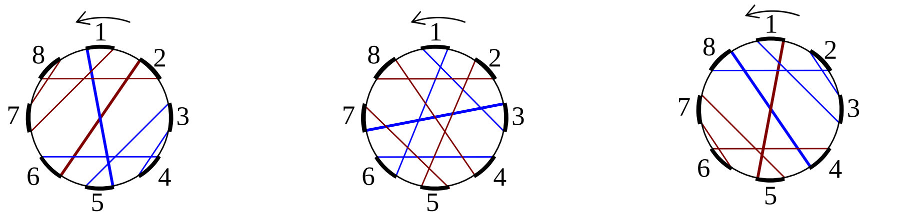
разных 2-цветных диаграмм с одним черным циклом, которые самосовмещаются при повороте на угол ω_i. Однако среди них содержится точно $\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!$ *O*-диаграмм с одним черным циклом [8]. С учетом пунктов 2) и 3), существует точно $\varphi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!\cdot\left(2^{i-1}-1\right)$ диаграмм из класса $\Im^N_{n,1}$, удовлетворяющих условию $(*)$. $\square$

Лемма 2.2. *Для четных $n \in \mathrm{N}$ имеют место формулы*

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n}\left((n-1)! \cdot \left(2^{n-1}-1\right) + \mu\left(n, \frac{n}{2}\right) + \sum_{i|n, i\neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho\left(n,i\right)\right), \quad \textit{где} \tag{6}$$

$$\rho\left(n,i\right) = \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(2^{i-1}-1\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}, \quad \mu\left(n, \frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)! \cdot 2^{n-2}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $n = 2m$. Так как доказательство первой формулы (7) повторяет суждения, проведенные для случая нечетных n, то для доказательства достаточно показать необходимость включения величины $\mu\left(n, \frac{n}{2}\right)$ в формулу (6).



$b_1 = \left(\boxed{1,-5}, 3, -4, \boxed{6,-2}, 8, -7\right)$ $b_2 = \left(1, \boxed{3,-7}, 5, 2, \boxed{8,-4}, 6\right)$ $b_3 = \left(-1], 3, -2, \boxed{8,-4}, 6, -7, [5\right)$

Рис. 3.

Величина $\mu\left(2m, m\right)$ является числом диаграмм из класса $\Im_{n,1}^{N}$, которые самосовмещаются при повороте на угол $\omega_{n/2} = \pi$ и которые не были учтены величиной $\rho\left(2m, m\right)$. Указанный тип диаграмм характеризуется наличием хорд, соединяющих диаметрально-противоположные вершины $2n$-шаблона – *рис. 3.*

Так как $n = 2m$, то каждая *диаметральная* хорда $2n$-шаблона соединяет вершины с номерами одинаковой четности. Очевидно, что каждая такая хорда может быть задана парой оснащенных номеров диаметрально-противоположных (черных) дуг шаблона, а именно $\{i, -(m+i)\}$ или $\{-l, -(m+l)\}$, соответственно. Далее каждую из n указанных таких хорд обозначим $\{j_l, -|j_l'|\}$. Тогда диаграмму $D\left(b\right) \in \Im_{n,1}^{N}$, которая содержит диаметральную хорду шаблона (а именно две) и самосовмещается при повороте на угол $\omega = \pi$, можно отождествить с одним из m циклов вида:

$$\left(\boxed{1, -(m+1)}, j_2, j_3, j_4, ..., j_{m-1}, \boxed{j_m, -|j_m'|}, j_{m-1}', ..., j_4', j_3', j_2'\right),$$
$$\left(1, \boxed{j_2, -|j_2'|}, \mathrm{sign}(j_2) \cdot (m+1), j_3, j_4, ..., \boxed{j_m, -|j_m'|}, ..., j_4', j_3'\right),$$
$$\left(1, j_2, \boxed{j_3, -|j_3'|}, j_2', \mathrm{sign}(j_2) \cdot (m+1), j_4, ..., \boxed{j_m, -|j_m'|}, ..., j_4'\right),$$
$$\cdots$$
$$\left(-1\right], j_2, j_3, ..., j_{m-1}, \boxed{j_m, -|j_m'|}, j_{m-1}', ..., j_3', j_2', [\mathrm{sign}(j_2) \cdot (m+1)),$$

где $j_k \in \{\pm 2; \pm 3; ...; \pm m; \pm(m+2), ..., \pm 2m\}$, $|j_k'| = (|j_k| + m) \mod n$ – номер (черной) дуги, диаметрально-противоположной дуге $|j_k|$, причем знаки j_k' определяются однозначно. Общее число таких циклов равно $\mu\left(n, \frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)! \cdot 2^{n-2}$. □

С учетом лемм 2.1 и 2.2 окончательно получаем

Теорема 2.1. *Для натуральных n имеют место формулы:*

$$d_{n,1}^{*(N)} = \frac{1}{n}\left(\mu\left(n,\frac{n}{2}\right) + \sum_{i|n}\varphi^2\left(\frac{n}{i}\right)(i-1)!\left(2^{i-1}-1\right)\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\right), \tag{8}$$

$$\mu\left(n,\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \textit{при нечетном } n \\ \left(\frac{n}{2}\right)!\cdot 2^{n-2}, & \textit{при четном } n. \end{cases} \tag{9}$$

3. Число неэквивалентных диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$. В дальнейшем число неэквивалентных (относительно действия диэдральной группы D_{2n}^*) диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$ будем обозначать через $d_{n,1}^{**(N)}$. Тогда по лемме Бернсайда и с учетом, например, результатов работы [7] имеет место соотношение

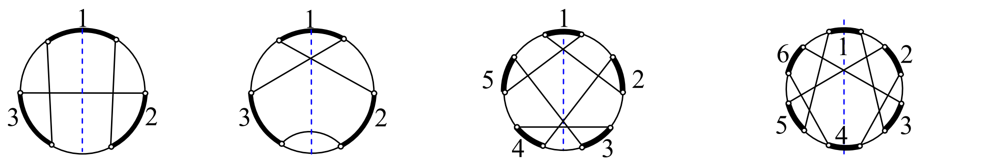
$$d_{n,1}^{**(N)} = \frac{1}{2}\cdot\left(d_{n,1}^{*(N)} + \frac{1}{n}\cdot s(n)\right), \tag{10}$$

где $s(n)$ – общее число симметричных диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$.

Так как число диаграмм, симметричных относительно каждой из осей симметрии ($2n$-шаблона) фиксированного типа одинаково, то:

$$s(n) = \begin{cases} n\cdot s_0(n), & \textit{при нечетном } n \\ \frac{n}{2}\cdot(s_1(n)+s_2(n)), & \textit{при четном } n, \end{cases} \tag{11}$$

где $s_0(n)$ – число диаграмм (из класса $\Im_{n,1}^N$), симметричных относительно фиксированной оси симметрии (*первого типа*), которая проходит через середины диаметрально-противоположных черной и белой дуг шаблона; $s_1(n)$ – число диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии (*второго типа*), которая проходит через середины диаметрально-противоположных черных дуг шаблона; $s_2(n)$ – число диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии (*третьего типа*), которая проходит через середины диаметрально-противоположных белых дуг шаблона.



a) $b=\left(2,\boxed{-1},-3\right)$ *b*) $b=\left(3,\boxed{-1},-2\right)$ *c*) $b=\left(3,-5,\boxed{1},2,-4\right)$ *d*) $b=\left(\boxed{1},-5,2,\boxed{4},6,3\right)$

Рис. 4. a), b) – все диаграммы из класса $\Im_{3,1}^N$, симметричные относительно фиксированной оси симметрии первого типа*:* $s_0(3)=2$.

Лемма 3.1. *Для нечетных $n \in \mathrm{N}$ имеют место формулы:*

$$d_{n,1}^{**(N)} = \frac{1}{2}\left(d_{n,1}^{*(N)} + s_0(n)\right), \quad s_0(n) = \left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right). \tag{12}$$

Доказательство. С учетом соотношений (10) и (11), для доказательства леммы достаточно показать справедливость второй формулы (12). Пусть $n = 2m + 1$. Каждую диаграмму $D(b) \in \Im_{n,1}^N$, которая симметрична относительно фиксированной оси симметрии *первого типа*, можно отождествить с циклом вида

$$\left(|j'_m|, ..., j'_3, j'_2, \boxed{\operatorname{sign}(j_2) \cdot \mathbf{1}}, j_2, j_3, ..., j_m\right), \tag{13}$$

где $j_k \in \{\pm 2; \pm 3; ...; \pm 2m\}$, $k = \overline{2, ..., m}$, а $|j'_k| = n + 2 - |j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно соответствующей оси симметрии *первого типа*. Причем $\forall k \in \{2, ..., m-1\}$ знак j'_k определяется однозначно, так как должен совпадать со знаком j_{k+1}, а «последние» дуги j_m і j'_m всегда соединены самосимметричной хордой (откуда и следует, что $b \supset \{..., j_m, |j'_m|, ...\}$). Знак, с которым номер «первой» дуги входит в цикл b, определяется знаком j_2 – *рис. 4 a) – c)*.

Общее число указанных циклов равно $4^m \cdot m! = 2^{2m} \cdot m!$. Однако среди них точно $2^m \cdot m!$ циклов, определяющих O-диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $s_0(n) = s_0(2m+1) = \left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)$. $\square$

Предложение 3.1. Для четных $n \in \mathrm{N}$ справедливо равенство

$$s_1(n) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2} - 1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $n = 2m$. Тогда диаграмму $D(b) \in \Im_{n,1}^N$, симметричную относительно оси симметрии *второго типа* (проходящей через середины 1-ой и $(m+1)$-ой черных дуг шаблона), можно отождествить с циклом вида

$$\left(\boxed{1}, j_2, j_3, ..., j_m, \pm\boxed{m+1}, j'_m, ..., j'_3, j'_2|, \operatorname{sign}(j_2) \cdot 1\right), \tag{15}$$

где $j_k \in \{\pm 2; ...; \pm m; \pm m+2; ...; \pm 2m\}$, $k = \overline{2, ..., m}$, а $|j'_k| = n + 2 - |j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно указанной выше оси симметрии *второго типа*, а знаки j'_k однозначно определяются знаками j_{k+1} — *рис. 4 d)*.

Общее число таких циклов равно $2^{2m-1} \cdot (m-1)!$. Однако среди них точно $2^{m-1} \cdot (m-1)!$ циклов, определяющих O-диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $s_1(n) = s_1(2m) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right)$. $\square$

Обозначим далее через $s_{21}(n)$ $(s_{22}(n))$ число диаграмм из класса $\Im_{n,1}^N$, которые симметричны относительно фиксированной оси симметрии *третьего типа* и содержат (не содержат) самосимметричные относительно этой оси симметрии хорды (*рис. 5* и *рис. 6*, соответственно). Тогда имеет место равенство

$$s_2(n) = s_{21}(n) + s_{22}(n). \tag{16}$$

Предложение 3.2. Для четных n имеют место формулы

$$s_{21}(n) = \left(\frac{n}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right), \quad s_{22}(n) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{n-2}. \tag{17}$$

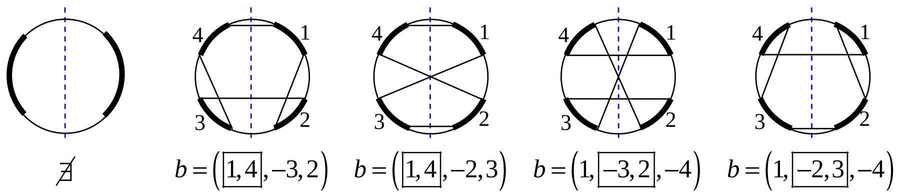


Рис. 5. все диаграммы из класса $\Im_{4,1}^{N}$, симметричные относительно фиксированной оси симметрии третьего типа *и которые не имеют самосимметричных хорд:* $s_{21}(4)=4$; $s_{21}(2)=0$

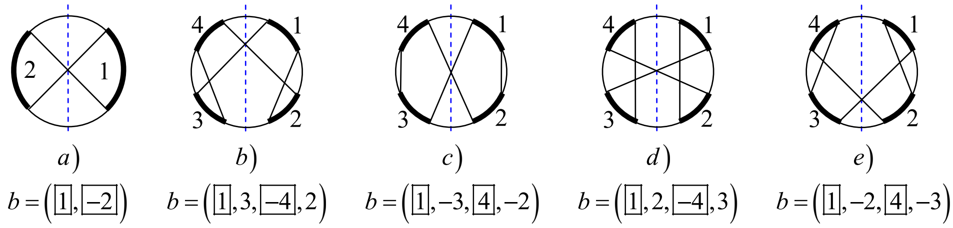


Рис. 6. a) – единственная диаграмма из класса $\Im_{2,1}^{N}$, которая симметрична относительно фиксированной оси симметрии третьего типа *и не имеет самосимметричных хорд:* $s_{22}(2)=1$*;*
b) – e) – все диаграммы из класса $\Im_{4,1}^{N}$, которые симметричны относительно фиксированной оси симметрии третьего типа *и не имеют самосимметричных хорд:* $s_{22}(4)=4$

Доказательство. Покажем вначале справедливость первой формулы (17). Пусть $n=2m$. Тогда диаграмму из класса $\Im_{n,1}^{N}$, которая симметрична относительно фиксированной (*рис. 5*) оси симметрии *третьего типа* и содержит самосимметричные хорды относительно этой оси, можно отождествить с одним из m циклов вида:

$$\begin{gathered}
\left(\boxed{\mathbf{1},\mathbf{2m}}, j_2, j_3, ..., j_{m-1}, \boxed{j_m, |j'_m|}, j'_{m-1}, ..., j'_3, j'_2|, \operatorname{sign}(j_2)\cdot 1\right),\\
\left(\mathbf{1}, \boxed{j_2, |j'_2|}, \operatorname{sign}(j_2)\cdot\mathbf{2m}, j_3, j_4, ..., \boxed{j_m, |j'_m|}, ..., j'_4, j'_3|, \operatorname{sign}(j_3)\cdot 1\right),\\
\cdots\\
(\mathbf{1}], j_2, j_3, ..., j_{m-1}, \boxed{j_m, |j'_m|}, j'_{m-1}, ..., j'_3, j'_2, [\operatorname{sign}(j_2)\cdot\mathbf{2m}|, +1)
\end{gathered}\tag{18}$$

где $j_k\in\{\pm1;\pm2;\pm3;...;\pm2m\}$, $k=\overline{2,...,m}$, $|j'_k|=n+1-|j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно указанной оси симметрии *третьего типа*, причем знаки j'_k определяются однозначно.

Общее число таких циклов равно $2^{2m-2}\cdot m!$. Однако среди них точно $2^{m-1}\cdot m!$ циклов, определяющих O-диаграммы с одним черным циклом [8]. Поэтому $s_{21}(n)=s_{21}(2m)=\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-1}-1\right)$.

Теперь покажем справедливость второй формулы (17). Диаграмму из класса $\Im_{n,1}^{N}$, которая симметрична относительно фиксированной оси симметрии *третьего типа* и **не имеет** самосимметричных хорд шаблона (*рис. 6*), можно отождествить с циклом вида

$$\left(\boxed{1}, j_2, ..., j_m, \operatorname{sign}(-J)\cdot\boxed{2m}, j'_2, ..., j'_m|, \operatorname{sign}(-J)\cdot 1\right),\tag{19}$$

где $j_k \in \{\pm 2; \pm 3; ...; \pm 2m-1\}$, $k = \overline{2, ..., m}$, $J = \prod_{l=2}^{m} \mathrm{sign}(j_l)$, $|j'_k| = n + 1 - |j_k|$ – номер (черной) дуги, симметричной дуге $|j_k|$ относительно фиксированной оси симметрии *третьего типа*, причем знаки j'_k определяются однозначно.

Общее число таких циклов составляет $2^{2m-2} \cdot (m-1)!$. Методом от противного нетрудно показать, что среди циклов указанного вида нет таких, которые определяют O-диаграммы. Таким образом, $s_{22}(n) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{n-2}$. □

С учетом соотношений (14), (16) и (17), имеем

$$\frac{1}{2}\left(s_1(n) + s_2(n)\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{\frac{n}{2}-2} \cdot \left(2^{\frac{n}{2}} + \left(2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right). \qquad (20)$$

С учетом соотношений (10), (11), леммы 3.1 и соотношения (20) окончательно получаем

Теорема 3.1. *Для натуральных n имеют место формулы*

$$d_{n,1}^{**(N)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(d_{n,1}^{*(N)} + \left(\frac{n-1}{2}\right)! 2^{\frac{n-1}{2}} \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)\right), & \text{при нечетном } n \\ \frac{1}{2}\left(d_{n,1}^{*(N)} + \left(\frac{n-2}{2}\right)! 2^{\frac{n}{2}-2} \left(\left(2^{\frac{n-2}{2}} - 1\right)\left(\frac{n}{2} + 3\right) + 2\right)\right), & \text{при четном } n. \end{cases} \qquad (21)$$

Дополнения. Ниже в таблице приведены начальные значения общего числа, числа неизоморфных, а также числа неэквивалентных диаграмм из класса $\Im_{n,1}^{N}$

Таблица 1. Начальные значения величин $d_{n,1}^{N}$, $d_{n,1}^{*(N)}$, $d_{n,1}^{**(N)}$.

n	$d_{n,1}^{N}$	$d_{n,1}^{*(N)}$	$d_{n,1}^{**(N)}$
1	0	0	0
2	1	1	1
3	6	2	2
4	42	13	10
5	360	72	48
6	3 720	642	361
7	45 360	6 480	3 408
8	640 080	80 246	40 735
9	10 281 600	1 142 424	574 092
10	185 431 680	18 546 824	9 285 124
11	3 712 262 400	337 478 400	168 798 720
12	81 709 689 600	6 809 212 572	3 404 876 046

Пример 2. На *рис. 7* приведены все неизоморфные диаграммы из класса $\Im_{4,1}^{N}$. Не трудно видеть, что за исключением диаграмм 8 и 9, 10 и 11, 12 и 13 эти диаграммы являются также и неэквивалентными. Поэтому, $d_{4,1}^{**(N)} = 13 - 6 + 3 = 10$.

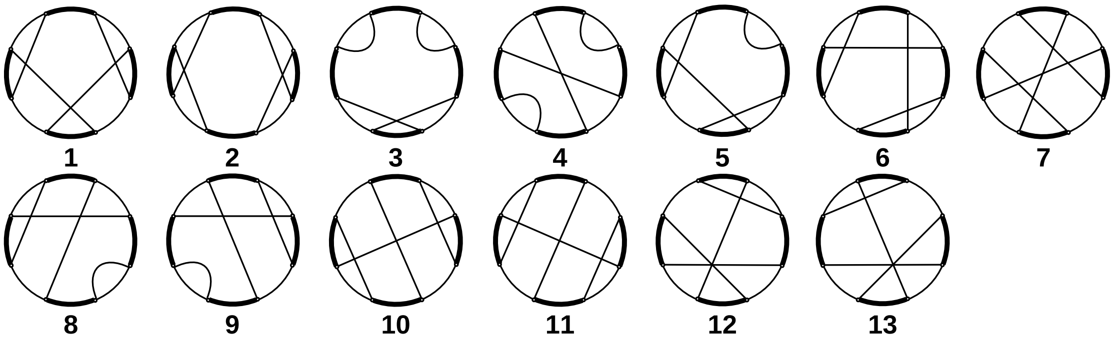


Рис. 7. все неизоморфные диаграммы из класса $\Im_{4,1}^N$

Пример 3. На рисунках 8 и 9 приведены все неизоморфные диаграммы из класса $\Im_{5,1}^N$.

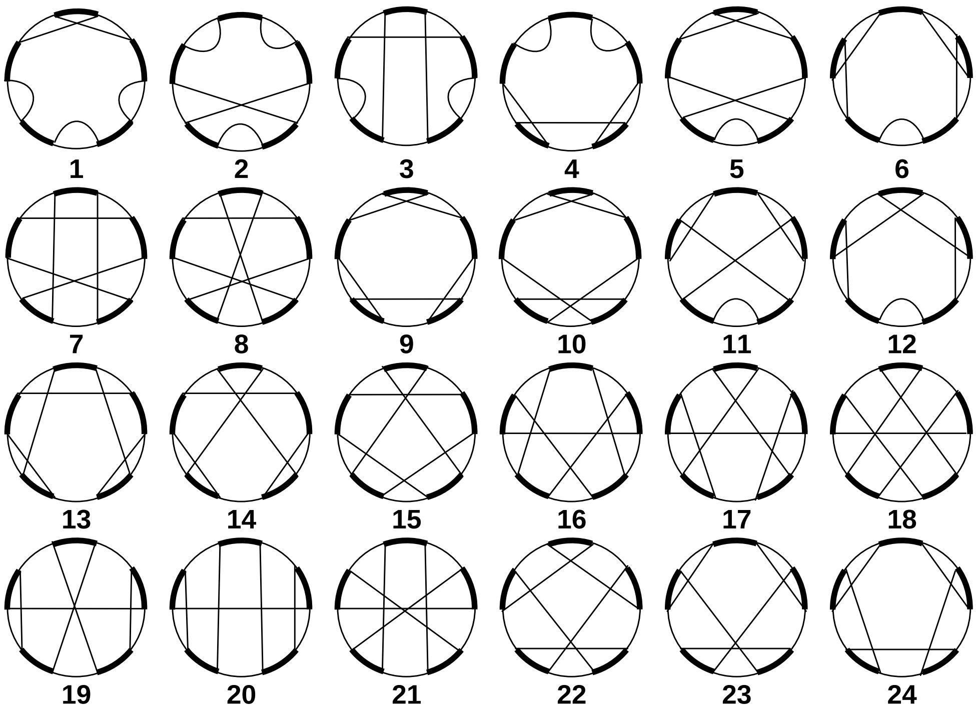


Рис. 8. все симметричные *неизоморфные диаграммы из класса* $\Im_{5,1}^N$

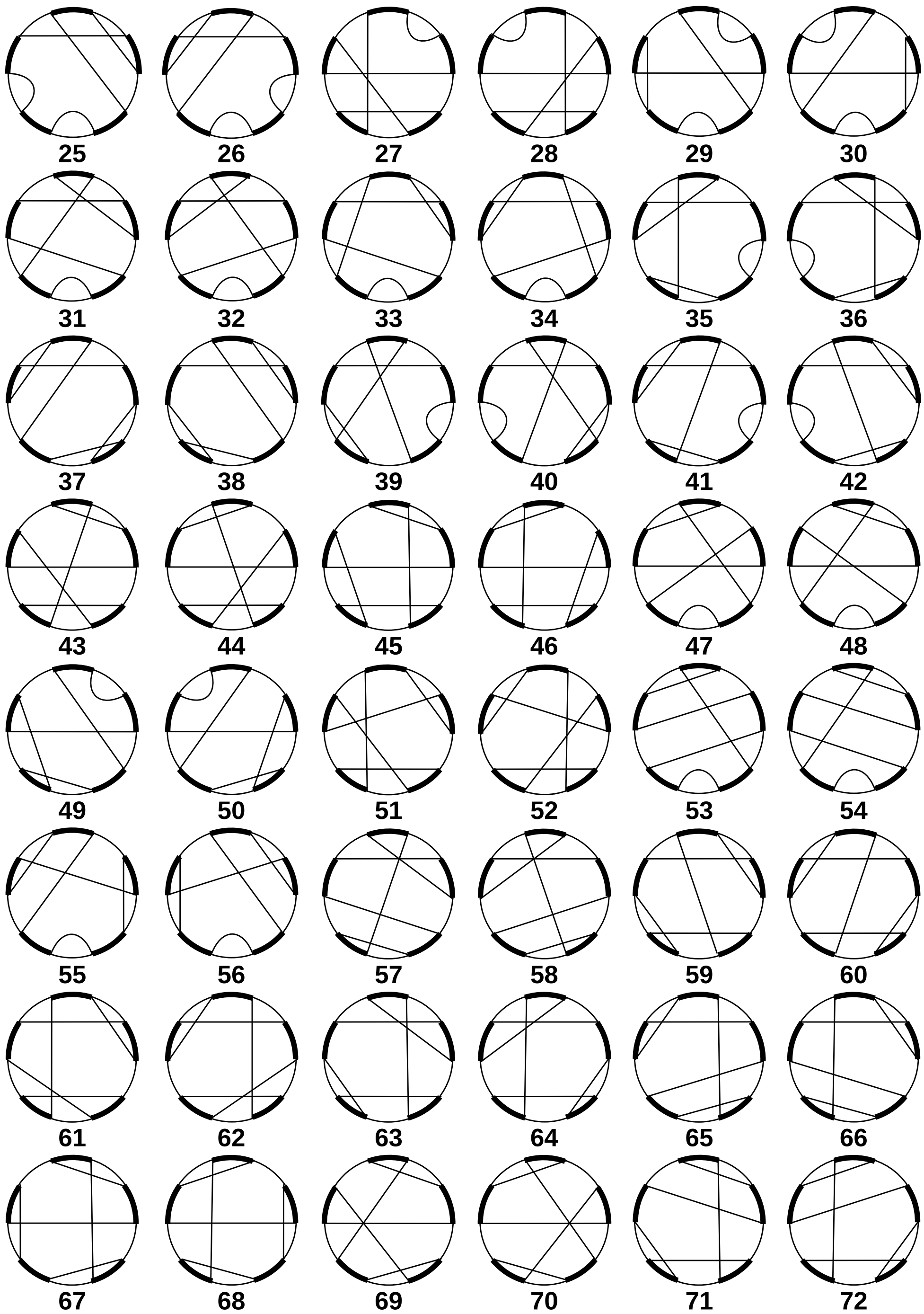


Рис. 9. все несимметричные *неизоморфные диаграммы из класса* $\Im^{N}_{5,1}$

Для каждого $i = 12, ..., 35$ диаграммы с номерами $(2i + 1)$ и $(2i + 2)$ являются эквивалентными относительно действия диэдральной группы (*рис. 9*). Поэтому

$d_{5,1}^{**(N)} = 72 - 48 + 24 = 48.$

Выводы. Как было отмечено ранее, в общем случае задачи о подсчете числа неизоморфных и неэквивалентных двухцветных O- и N-диаграмм *фиксированного рода* являются *нерешенными*. Однако они имеют непосредственную связь с подсчетом числа топологически неэквивалентных гладких функций (векторных полей) определенного класса на замкнутых ориентируемых и неориентируемых поверхностях *соответствующего рода*. По мнению автора вполне достижимым является подсчет числа неизоморфных диаграмм из класса $\Im_{n,1,1}^N$ для случая простых n.

1. *Touchard J.* Sur une problème de configurations et sur les fractions continues // Can. J. Math. – 1952. – №. 4. – P. 2-25.
2. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // Mathematics of Computation. – 1975. – Vol. 29, № 129. – P. 215-222.
3. *Harer J., Zagier D.* The Euler characteristic of the moduli space of curves // Inventiones mathematical – 1986. – № 85. – P. 457-485.
4. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // Journal of Knot and its Ramifications. – 1998. – Vol. 7, No. 1. – P. 93-114.
5. *Cori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // Theoretical Computer Science. – 1998. – Vol. 204. – P. 55-73.
6. *Кадубовський О.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Український математичний жур. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343-351.
7. *Кадубовський О.А., Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В.* Двокольорові O- і N-діаграми // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-матем. науки. – 2010. – Том IV, вип. 1. – С. 41-50.
8. *Кадубовський О.А., Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю.* Двокольорові O-діаграми з одним чорним циклом // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-матем. науки. – 2010. – Том IV, вип. 1. – С. 51-60.
9. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-матем. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17-27.
10. *Callan D., Smiley L.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection // Arxiv: math. – 2005. — 15 p. – Access mode: http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447.

A. A. Kadubovskiy

2-color chord N-diagrams with one black cycle.

In this paper we consider the set of two-colored chord N-diagrams with n chords that have one cycle of black color. We calculate the number of non-equivalent such diagrams under rotation and refraction.

Keywords: *chord diagrams, equipped faces, under rotation and refraction.*

О. А. Кадубовський

Двокольорові хордові N-діаграми з одним чорним циклом.

У роботі розглядається клас двокольорових хордових N-діаграм з n хордами, які мають лише один цикл чорного кольору. Встановлено формули для підрахунку числа нееквівалентних таких діаграм відносно дії циклічної та діедральної груп відповідно.

Ключові слова: *хордова діаграма, оснащений цикл, дія циклічної та діедральної груп.*

Донбасский государственный педагогический ун-т, г. Славянск
`kadubovs@ukr.net`

Получено 25.04.12