УДК 517.36

©2012. **А. И. Двирный, В. И. Слынько**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИОДНОРОДНЫХ МОНОТОННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

В работе получены условия устойчивости нулевого решения монотонных импульсных систем. При этом предполагается, что правые части системы зависят от времени и являются квазиоднородными функциями независимых переменных.

Ключевые слова: *импульсная система, группа квазиоднородных преобразований, условие Важевского.*

1. Введение. Исследование критических случаев в теории устойчивости движения для различных классов динамических систем является одной из важных задач нелинейного анализа [1-4]. Эти задачи, при некоторых дополнительных условиях, могут быть сведены к исследованию некоторых систем дифференциальных уравнений, правые части некоторых имеют свойства инвариантности относительно действия некоторых групп Ли [5, 6]. С другой стороны, применение метода сравнения [7] в теории устойчивости движения приводит к необходимости изучения систем дифференциальных уравнений, решения которых являются монотонными по начальным данным относительно некоторой частичной полуупорядоченности. Эта полуупорядоченность вводится при помощи некоторого телесного конуса. Для автономных систем дифференциальных уравнений критерии устойчивости равновесных решений получены в работе [4] и обобщены в работах [8-10]. Существенным в этом случае является полугрупповое свойство решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для неавтономных систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с импульсным воздействием такое свойство отсутствует. Поэтому непосредственное обобщение результатов работ [4, 9] на эти классы систем не представляется возможным. В работах [11-13] предложен новый вариант принципа сравнения. Этот принцип позволяет установить ряд общих теорем об устойчивости решений некоторых классов абстрактных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. При этом предполагается наличие свойства монотонности по начальным данным относительно некоторой частичной упорядоченности. Для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вопросы устойчивости равновесных решений являются актуальными. Целью настоящей работы является исследование монотонных неавтономных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, правые части которых являются квазиоднородными функциями.

В первом разделе работы сформулирована постановка задачи и основные предположения, при которых исследована задача об устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Второй раздел посвящен формулировке и доказательству принципа сравнения для монотонных квазиоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьем разделе результаты второго раздела применяются для исследования устойчивости состояния равновесия неавтономной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Приведен иллюстративный пример.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [14]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= g_k(x), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, \infty)$, $f \in C([a,\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$, $g_k \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $f(t,0) = 0$, $g_k(0) = 0$, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности. Далее будем пользоваться следующими обозначениями [6]: если $\alpha \geq 0$ и $G = diag(g_1, ..., g_n) > 0$, то $\alpha^G = diag(\alpha^{g_1}, ..., \alpha^{g_n})$. Так же обозначим $\pi^+(t_0, x_0)$ правый конец максимального интервала существования решения задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$ для системы уравнений (2.1).

Напомним также [15], что непустое множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется конусом, если

$$\overline{K} = K, \quad (\forall \alpha \geq 0)(\forall \beta \geq 0) \quad \alpha K + \beta K \subset K, \quad K \cap (-K) = \{0\}.$$

Если $intK \neq \emptyset$, то конус K называется телесным. Далее предположим, что конус K является телесным. Конус K вводит в пространстве $\mathbb{R}^n$ отношения частичного порядка, по следующим правилам:

$x \overset{K}{\geq} y$ если и только если $x - y \in K$,

$x \overset{K}{>} y$ если и только если $x - y \in intK$.

Далее рассмотрим задачу об устойчивости решения $x = 0$ в конусе K. Предварительно сформулируем соответствующие определения.

Определение 2.1 [8]. Состояние равновесия $x = 0$ системы (2.1) называется

1) устойчивым в конусе K, если для любых $t_0 \in [a, +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое что из неравенства $\|x_0\| < \delta$ и включения $x_0 \in K$ следует неравенство $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2) асимптотически устойчивым в конусе K, если $x = 0$ устойчиво и для любого $t_0 \in [a, +\infty)$ существует положительная постоянная $\rho = \rho(t_0)$ такая, что из неравенства $\|x_0\| < \rho$ и включения $x_0 \in K$ следует, что $\|x(t; t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Отметим, что в определении 2.1 норма может быть выбрана любой, поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Далее удобно пользоваться специальной нормой – нормой Биркгофа [15]. Если $w \in intK$, то по определению

$$\|x\|_w = \inf\{\beta \geq 0 \mid -\beta w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \beta w\}.$$

Напомним также определение функции класса Хана.

Определение 2.2. Функция $\vartheta(.)$ называется функцией класса Хана ($\vartheta \in \mathcal{K}$), если она непрерывна, $\vartheta(0) = 0$ и возрастает на некотором замкнутом интервале $[0, r_\vartheta]$, $r_\vartheta > 0$.

Обозначим $y(t; t_0, y_0)$ решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений без импульсного воздействия

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{2.2}$$

Также обозначим $\omega^+(t_0, y_0)$ – правый конец максимального интервала существования решения $y(t; t_0, y_0)$ задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2)

Исследование устойчивости в конусе K проведем при следующих дополнительных предположениях.

Предположение 2.1. Для системы (2.1) выполняются следующие условия

1) функция $f\ : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является квазиоднородной по переменной x, т.е. при всех $t \in [a, \infty)$, $\alpha \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$f(t, \alpha^G x) = \alpha^{G+(q-1)E} f(t, x);$$

2) функции $g_k\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ являются квазиоднородными по переменной x, т.е. при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$g_k(\alpha^G x) = \alpha^{G+(q-1)E} g_k(x);$$

3) решения задачи Коши $y(t; t_0, y_0)$ для системы дифференциальных уравнений (2.2) являются монотонными по переменной y_0 относительно конуса K, т.е. из неравенства $y_0'' \overset{K}{\geq} y_0'$ следует, что при всех $t \in [t_0, \omega^+(t_0, y_0')) \cap [t_0, \omega^+(t_0, y_0''))$ выполняется неравенство

$$y(t; t_0, y_0'') \overset{K}{\geq} y(t; t_0, y_0');$$

4) функция $x \to x + g_k(x)$ является локально неубывающей относительно конуса K, т.е. существуют окрестность $D \subset \mathbb{R}^n$ точки $x = 0$ такая, что из неравенств $x'' \overset{K}{\geq} x'$ и включений $x'' \in D$, $x' \in D$ следует неравенство

$$x'' + g_k(x'') \overset{K}{\geq} x' + g_k(x');$$

5) существуют вектор $w \in intK$, функция $\gamma \in C([a, \infty); \mathbb{R})$ и последовательность действительных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполняются неравенства

$$\alpha^G (f(t, w) - \gamma(t) G w) \overset{K}{\leq} 0, \quad t \geq t_0, \quad \alpha^G (g_k(w) - \beta_k G w) \overset{K}{\leq} 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$

6) существует функция $\vartheta(.)$ класса Хана такая, что при всех $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\alpha w \overset{K}{\leq} \vartheta^G(\alpha) w.$$

Наряду с системой дифференциальных уравнений (2.1) рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \gamma(t) u^q(t), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta u(t) &= \beta_k u^q(t), \quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Обозначим $u(t; t_0, u_0)$ решение задачи Коши для уравнения сравнения (2.3) и $\Pi^+(t_0, u_0)$ – правый конец максимального интервала существования этого решения.

3. Вспомогательные результаты. Рассмотрим сначала систему дифференциальных уравнений без импульсного воздействия (2.2). Наряду с системой (2.2) рассмотрим скалярное уравнение сравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \gamma(t) \psi^q(t) \tag{3.1}$$

и обозначим $\psi(t; t_0, \psi_0)$ решение задачи Коши для уравнения (3.1), а $\Omega^+(t_0, \psi_0)$ – правый конец максимального интервала существования этого решения.

Введем рекуррентное уравнение

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + h\gamma(t_0 + (m-1)h)\alpha_{m-1}^q, \quad \alpha_0 = \alpha \geq 0. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть $R > 0$, тогда существует число T, $T > t_0$, зависящее от α, такое, что при всех t, $t_0 < t \leq T$ достаточно больших натуральных числах l и при всех h, $0 < h \leq \frac{t-t_0}{l}$ выполняются неравенства*

$$\alpha_m \geq 0, \quad |\alpha_m - \alpha| \leq \frac{R}{2}, \quad m = \overline{1, l}.$$

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то утверждение леммы 3.1 очевидно. Пусть $\alpha > 0$, $\eta = \max\limits_{t \in [t_0, T_1]} |\gamma(t)|$, $T_1 > t_0$ – некоторое фиксированное число,

$$t_0 < T < t_0 + \min\{\frac{\alpha}{2\eta R^q}, \frac{1}{2\eta R^{q-1}}\}.$$

Тогда, последовательно нетрудно получить оценки

$$\alpha_m \geq \alpha\Big(1 - \frac{m}{2l}\Big), \quad |\alpha_m - \alpha| \leq \frac{R}{2}, \quad m = \overline{0, l}.$$

□

Следствие 3.1. *Если $\psi_0 > 0$, то при всех $t \in [t_0, \Omega^+(t_0, \psi_0))$ для решения $\psi(t; t_0, \psi_0)$ задачи Коши для уравнения сравнения (3.1) справедливо неравенство $\psi(t; t_0, \psi_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$.*

Это следствие является непосредственным следствием леммы 3.1, теоремы Пеано [16] и теоремы о единственности решений задачи Коши.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и обозначим число $\omega^*(t_0, \alpha) > t_0$, определенное формулой

$$\omega^*(t_0, \alpha) = \sup\{t \,|\, t_0 \leq t < \omega^+(t_0, \alpha^G w),\, \psi(t; t_0, \alpha) \in (0, 1)\}.$$

Лемма 3.2. *Предположим, что для системы дифференциальных уравнений (2.2) выполняются условия п. 1,3 и 5 предположения 2.1.*

Тогда при всех $\tau \in [a, \infty)$, $\alpha > 0$ и $\tau \leq t < \omega^*(\tau, \alpha)$ выполняется неравенство

$$y(t; \tau, \alpha^G w) \overset{K}{\leq} \psi^G(t; \tau, \alpha) w. \tag{3.3}$$

Доказательство. Случай $\alpha = 0$ тривиален. Зафиксируем $\alpha > 0$ и обозначим $\mathcal{T}$ подмножество полуинтервала $[\tau, \omega^*(\tau, \alpha))$, определенное следующим образом:

$$\mathcal{T} = \{t \mid (t \in [\tau, \tau^*)) \wedge (\forall \xi \in [\tau, t]\ y(\xi; \tau, \alpha^{\mathcal{G}} w) \overset{K}{\leq} \psi^{\mathcal{G}}(\xi; \tau, \alpha) w)\}.$$

Множество $\mathcal{T}$ непустое, так как $\tau \in \mathcal{T}$. Обозначим $t^* = \sup \mathcal{T}$, и предположим от противного, что $t^* < \omega^*(\tau, \alpha)$. Отметим, что, вследствие непрерывности решений системы (2.2) и уравнения сравнения (3.1), получим $t^* \in \mathcal{T}$. Обозначим $\alpha^{(0)} = \psi(t^*; t_0, \alpha) < 1$, тогда из утверждений следствия 3.1 и леммы 3.1 следует $\alpha^{(0)} > 0$ и существуют числа T, $\tau^* > T > t^*$ и $R > 0$ такие, что при всех t, $t^* \leq t \leq T$ и при $h = \frac{t - t^*}{l}$ (l– достаточно большое натуральное число) для решений системы рекуррентных уравнений (3.2) (в которых $t_0 = t^*$) выполняются включения $\alpha_m \in (0, 1)$, $m = \overline{0, l}$.

Рассмотрим разбиение сегмента $[t^*, t]$:

$$t^* < t^* + h < ... < t^* + lh = t.$$

Используя метод математической индукции, докажем неравенство

$$y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) \overset{K}{\leq} \alpha_m^G w + R_m(h), \tag{3.4}$$

где $R_0(h) = 0$ и $R_m(h)$ удовлетворяет нелинейному разностному уравнению

$$\begin{aligned} R_m(h) = y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - \\ -(\alpha_{m-1}^G + h f(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) + \eta_{m-1}(h)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $\eta_m(h)$, $m \in [0, l]$ некоторые функции, для которых выполняется оценка $\|\eta_m(h)\| \leq C_1 h^2$, где C_1 положительная постоянная, не зависящая от $m \in [0, l]$ и h.

Действительно, при $m = 0$ неравенство (3.4) очевидно. Предположим, что при некотором натуральном m выполняется неравенство

$$y(t^* + (m-1)h; \tau, \alpha^G w) \overset{K}{\leq} \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h),$$

тогда, из условия 3) предположения 2.1 следует, что

$$\begin{gathered} y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) = y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, y(t^* + (m-1)h; \tau, \alpha^G w)) \overset{K}{\leq} \\ \overset{K}{\leq} y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) = \\ = \alpha_m^G w + y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - \\ -(\alpha_{m-1} + h\gamma(t^* + (m-1)h)\alpha_{m-1}^q)^G w. \end{gathered}$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$(\alpha_{m-1} + h\gamma(t^* + (m-1)h)\alpha_{m-1}^q)^G w = \alpha_{m-1}^G + h\gamma(t^* + (m-1)h)\alpha_{m-1}^{G+(q-1)E} G w + \eta_{m-1}(h).$$

С учетом п.1 и п.4 предположения 2.1 получим оценку

$$(\alpha_{m-1} + h\gamma(t^* + (m-1)h)\alpha_{m-1}^q)^G w \overset{K}{\geq} \alpha_{m-1}^G + hf(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) + \eta_{m-1}(h).$$

Как следствие, получим оценку

$$y(t^* + mh; \tau, \alpha^G w) \overset{K}{\leq} \alpha_m^G w + R_m(h).$$

Исследуем нелинейное разностное уравнение (3.5). Определим подмножества $M_1 \subset M \subset \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$M_1 = \{y \mid \|y - \alpha^G w\|_w \leq \frac{3}{4} R^*\}, \quad M = \{y \mid \|y - \alpha^G w\|_w \leq R^*\}.$$

Здесь $R^* = 2\max\{\|\beta^G - \alpha^G\|_w \mid |\beta - \alpha| \leq \frac{R}{2}\}$.

Обозначим $m_0 = \sup\limits_{(\tau,y)\in E} \|f(\tau, y)\|_w$, где $E = [t^* - \eta_0, T + \eta_0] \times M$, тогда из утверждения следствия 2.1 из [16] (стр. 22) следует, что для любого $(\tau_0, y_0) \in [t^*, T] \times M_1$ существует единственное решение $y(t; \tau_0, y_0)$ и существует постоянная $\gamma_0 > 0$, $\gamma_0 = \min\{\frac{T-t^*}{2} + \eta_0, \frac{R^*}{m_0}, \eta_0\}$ такая, что при всех $(\tau_0, y_0) \in [t^*, T] \times M_1$ решение $y(t; \tau_0, y_0)$ определено на сегменте $[\tau_0 - \gamma, \tau_0 + \gamma]$ и удовлетворяет на нем неравенству

$$\|y(t; \tau_0, y_0) - y_0\|_w \leq m_0 \gamma_0 \leq R^*.$$

Натуральное число l выберем настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $h \leq \gamma_0$.

Рассмотрим включение

$$\alpha_m^G w + R_m(h) \in M_1. \tag{3.6}$$

Это включение выполняется при $m = 0$. Предположим, что существует натуральное число N, $0 < N \leq l$ такое, что включение (3.6) выполняется при всех $m = \overline{0, N-1}$ и не выполняется при $m = N$. Тогда из включений

$$\alpha_m^G w \in M_1, \quad \alpha_m^G w + R_m(h) \in M_1$$

при всех $m = \overline{0, N-1}$, локального условия Липшица и компактности множества M следует, что существует постоянная $L > 0$ такая, что неравенство

$$\|f(t, y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h))) - f(t, y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G))\|_w \leq$$
$$\leq L\|y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G)\|_w$$

при всех $t \in [t^* + (m-1)h, t^* + mh]$, $m = \overline{1, N}$. Из интегральных представлений решений системы (2.2) следует

$$y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) = \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h) +$$
$$+ \int\limits_{t^*+(m-1)h}^{t} f(s, y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)))\, ds,$$

$$y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) = \alpha_{m-1}^G w + \int\limits_{t^*+(m-1)h}^{t} f(s, y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w))\, ds.$$

Тогда при всех $t \in [t^* + (m-1)h, t^* + mh]$, $m = \overline{1, N}$ выполняется оценка

$$\|y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq$$
$$\leq \|R_{m-1}(h)\|_w + \int\limits_{t^*+(m-1)h}^{t} L\|y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) -$$
$$- y(s; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w\, ds.$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получим оценку

$$\|y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) - y(t; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq$$
$$\leq \|R_{m-1}(h)\|_w e^{L(t - t^* - (m-1)h)},$$

которая выполняется при всех $t \in [t^* + (m-1)h, t^* + mh]$, $m = \overline{1, N}$. При $t = t^* + mh$ получим

$$\|y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w + R_{m-1}(h)) -$$
$$- y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w)\|_w \leq \|R_{m-1}(h)\|_w e^{Lh}.$$

Рассмотрим вопрос об оценке выражения:

$$y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w) - \alpha_{m-1}^G w - hf(t^* + (m-1)h, \alpha_{m-1}^G w).$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(h) = z(\tau + h; \tau, z_0) - z_0 - hf(\tau, z_0)$$

при $(\tau, z_0) \in [t^*, T] \times M$, где $\phi(0) = 0$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\phi_i(h) = h\phi_i'(\theta_i h), \theta_i \in (0, 1), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\phi_i'(\theta_i h) = f_i(\tau + \theta_i h; z(\tau + \theta_i h; \tau, z_0)) - f_i(\tau, z_0)$$

и

$$|\phi_i'(\theta_i h)| \leq L\|z(\tau + \theta_i h; \tau, z_0) - z_0\|_w + |f_i(\tau + \theta_i h, z_0) - f_i(\tau, z_0)|$$

Тогда $|\phi_i'(\theta_i h)| = \varepsilon_0(h), \varepsilon_0(h) \to 0$ при $h \to 0$, равномерно по $(\tau, z_0) \in [t^*, T] \times M$.

Как следствие,

$$\|y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha^G_{m-1}w) - \alpha^G_{m-1}w-$$
$$-hf(t^* + (m-1)h, \alpha^G_{m-1}w)\|_w \leq h\varepsilon_0(h).$$

Преобразуем выражение для $R_m(h)$.

$$R_m(h) = y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha^G_{m-1}w + R_{m-1}(h))-$$
$$-y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha^G_{m-1}w) + y(t^* + mh; t^* + (m-1)h, \alpha^G_{m-1}w)-$$
$$-(\alpha^G_{m-1} + hf(t^* + (m-1)h, \alpha^G_{m-1}w) + \eta_{m-1}(h)).$$

С учетом приведенных выше оценок, получим

$$\|R_m(h)\|_w \leq e^{Lh}\|R_{m-1}(h)\|_w + h\varepsilon_0(h) + C_1h^2,$$

и при всех $m = \overline{1, N}$ выполняется неравенство

$$\|R_m(h)\|_w \leq v_m, m = \overline{1, N},$$

где v_m удовлетворяет разностному уравнению

$$v_m = e^{Lh}v_{m-1} + h\varepsilon_0(h) + C_1h^2$$

при всех $m = \overline{1, N}$, $v_0 = 0$.

Введём последовательность $q_m, m = \overline{1, N}$, по формуле $v_m = e^{mLh}q_m$, тогда

$$e^{mLh}q_m = e^{mLh}q_{m-1} + h\varepsilon_0(h) + C_1h^2, \quad q_0 = 0,$$

$$q_m - q_{m-1} = e^{-mLh}(h\varepsilon_0(h) + C_1h^2),$$

$$q_m = \sum_{l=1}^{m} e^{-lLh}(h\varepsilon_0(h) + C_1h^2) = \frac{e^{-Lh}(e^{-mL} - 1)}{e^{-Lh} - 1}(h\varepsilon_0(h) + C_1h^2),$$

$$v_m = e^{mLh} q_m = \frac{e^{mLh}-1}{e^{Lh}-1}(h\varepsilon_0(h)+C_1h^2) \le \frac{1}{Lh}(h\varepsilon_0(h)+C_1h^2)(e^{L(t-t^*)}-1) = \\ = \frac{\varepsilon_0(h)+C_1h}{L}(e^{L(t-t^*)}-1)$$

при всех $m=\overline{1,N}$.

Поэтому

$$\|\alpha_N^G w + R_N(h) - \alpha_0^G w\|_w \le \frac{R^*}{2} + \frac{\varepsilon_0(h)+C_1h}{L}(e^{L(t-t^*)}-1),$$

и h выберем настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\varepsilon_0(h)+C_1h}{L}(e^{L(t-t^*)}-1) < \frac{R^*}{4},$$

тогда $\alpha_N^G w + R_N(h) \in M_1$. Вследствие полученного противоречия, включение

$$\alpha_m^G w + R_m(h) \in M_1$$

выполняется при всех $m=\overline{0,l}$, и, как следствие, оценка

$$\|R_m(h)\|_w \le \frac{\varepsilon_0(h)+C_1h}{L}(e^{L(t-t^*)}-1)$$

выполняется при всех $m=\overline{0,l}$. При $m=l$ получим

$$\lim_{h\to 0}\|R_l(h)\|_w \le \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_0(h)+C_1h}{L}(e^{L(t-t^*)}-1) = 0.$$

Таким образом, по доказанному, при всех $m=\overline{0,l}$

$$y(t^*+mh;\tau,\alpha^G w) \overset{K}{\le} \alpha_m^G w + R_m(h).$$

При $m=l$

$$y(t;\tau,\alpha^G w) \overset{K}{\le} \alpha_l^G w + R_l(h). \tag{3.7}$$

Если $l\to\infty$ $(h\to 0)$, то, вследствие теоремы Пеано, $\alpha_l \to \psi(t;t^*,\psi(t^*,\tau,\alpha)) = \psi(t;\tau,\alpha)$.

Переходя к пределу $l\to\infty(h\to 0)$ в неравенстве (3.7), получим

$$y(t;\tau,\alpha^G w) \overset{K}{\le} \psi^G(t;\tau,\alpha)w. \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.8) следует, что при всех t, $t^*<t\le T$, выполняется включение $t\in\mathcal{T}$, что противоречит определению числа t^*. Полученное противоречие доказывает, что $t^*=\omega^*(\tau,\alpha)$. Лемма полностью доказана. □

4. Основная теорема. Основной результат настоящей работы имеет следующий вид.

Теорема 4.1. *Предположим, что решение $u = 0$ уравнения сравнения (2.3) устойчиво (асимптотически устойчиво) и существует положительное число α_0 такое, что при всех α, $0 < \alpha < \alpha_0$ выполняются неравенства*

$$\sup_k |\beta_k| u^{q-1}(\tau_k; t_0, \alpha) < 1, \quad G \geq I.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) в конусе K.

Доказательство. Предварительно, используя метод математической индукции, докажем, что для решений $x(t; t_0, \alpha^G w)$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) при достаточно малых $\alpha > 0$ неравенства

$$x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w) \overset{K}{\leq} u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w$$

выполняются при всех натуральных k таких, что $\tau_k \in [t_0, \pi^*(t_0, \alpha))$ и $x(\tau_k; t_0, \alpha^G w) \in D$, $u^G(\tau_k; t_0, \alpha) w \in D$ (при этом, дополнительно полагаем, что $\tau_0 = t_0$).

Действительно, при $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что уже доказано утверждение о том, что

$$x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w) \overset{K}{\leq} u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w,$$

и при этом $\tau_{k+1} \in [t_0, \pi^*(t_0, \alpha))$ и $x(\tau_{k+1}; t_0, \alpha^G w) \in D$, $u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w \in D$. Тогда, с учетом предположения индукции, условий п.4 и п.5 предположения 2.1 и утверждения леммы 3.1 получим

$$\begin{gathered}
x(\tau_{k+1} + 0; t_0, \alpha^G w) = x(\tau_{k+1}; t_0, \alpha^G w) + g_{k+1}(x(\tau_{k+1}; t_0, \alpha^G w)) = \\
= y(\tau_{k+1}; \tau_k, x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w)) + g_{k+1}(y(\tau_{k+1}; \tau_k, x(\tau_k + 0; t_0, \alpha^G w))) \overset{K}{\leq} \\
\overset{K}{\leq} y(\tau_{k+1}; \tau_k, u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w) + g_{k+1}(y(\tau_{k+1}; \tau_k, u^G(\tau_k + 0; t_0, \alpha) w)) \overset{K}{\leq} \\
\overset{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + g_{k+1}(u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w)) \overset{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\
+ u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) g_{k+1}(w) \overset{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w \overset{K}{\leq} \\
\overset{K}{\leq} (u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w + u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\
+ u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w - (u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w = \\
= u^G(\tau_{k+1} + 0; t_0, \alpha) w + u^G(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) w + \\
+ u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) \beta_{k+1} G w - (u(\tau_{k+1}; t_0, \alpha) + \beta_{k+1} u^q(\tau_{k+1}; t_0, \alpha))^G w.
\end{gathered}$$

Условие $G \geq I$ позволяет применить неравенство Бернулли

$$(1 + x)^G \geq I + Gx, \quad |x| \leq 1,$$

и, как следствие, установить неравенство

$$(u(\tau_{k+1};t_0,\alpha)+\beta_{k+1}u^q(\tau_{k+1};t_0,\alpha))^G w \overset{K}{\geq} u^G(\tau_{k+1};t_0,\alpha)w+$$
$$+u^{G+(q-1)I}(\tau_{k+1};t_0,\alpha)\beta_{k+1}Gw.$$

Последнее неравенство приводит к требуемому результату

$$x(\tau_{k+1}+0;t_0,\alpha^G w) \overset{K}{\leq} u^G(\tau_{k+1}+0;t_0,\alpha)w.$$

Используя последнее неравенство и утверждение леммы 3.2 легко показать, что при всех $t\in[t_0,\pi^*(t_0,\alpha))$ выполняется неравенство

$$x(t;t_0,\alpha^G w) \overset{K}{\leq} u^G(t;t_0,\alpha)w, \tag{4.1}$$

если только при всех $\tau_k\in[t_0,t)$ выполняются включения $x(\tau_k;t_0,\alpha^G w)\in D$ и $u^G(\tau_k;t_0,\alpha)w\in D$. Пусть R_2 некоторое положительное число, такое что $K_{R_2}\subset D$. Пусть ε_1 положительное число и $\xi(\varepsilon_1)=\sup\{\|\varrho^G\|_w \mid \varrho\in[0,\varepsilon_1]\}$. Очевидно, что $\xi(\varepsilon_1)$ непрерывная функция ε_1 и $\xi(0)=0$. Пусть $\varepsilon_2\in(0,1)$ фиксированное число, для которого $\xi(\varepsilon_2)<R_2$.

По условию теоремы существует положительное число α_1, $\alpha_1<\alpha_0$ такое, что при всех α, $0<\alpha<\alpha_1$ решения $u(t;t_0,\alpha)$ уравнения сравнения (2.3) нелокально продолжимы, т.е. $\Pi^+(t_0,\alpha)=+\infty$ и $u(t;t_0,\alpha)\in(0,\varepsilon_2)$ при всех $t\geq t_0$.

Очевидно, что существует целое неотрицательное число k_0 такое, что при всех $k\in[1,k_0]$ выполняются включения $x(\tau_k;t_0,\alpha^G w)\in D$ и $u^G(\tau_k;t_0,\alpha)w\in D$. Тогда, по доказанному выше, неравенство (4.1) выполняется при $t=\tau_{k+1}$, и, как следствие, $\|u^G(\tau_k;t_0,\alpha)w\|_w\leq\|u^G(\tau_k;t_0,\alpha)\|_w<\xi(\varepsilon_2)<R_2$ и $\|x(\tau_k;t_0,\alpha^G w)\|_w<R_2$. Поэтому включения $x(\tau_k;t_0,\alpha^G w)\in D$ и $u^G(\tau_k;t_0,\alpha)w\in D$ выполняются при всех k, для которых $\tau_k\in[t_0,\pi^*(t_0,\alpha))$. Поэтому неравенство (4.1) выполняется при всех $t\in[t_0,\pi^+(t_0,\alpha^{\mathcal{G}}w))$. Если $\pi^+(t_0,\alpha^G w)<\infty$, то, используя утверждение теоремы 1.2 [14], приходим к выводу, что $\|x(t;t_0,\alpha^G w)\|_w\to\infty$ при $t\to\pi^+(t_0,\alpha^G w)-0$. С другой стороны из неравенства (4.1) следует, что

$$\|x(t;t_0,\alpha^G w)\|_w\leq\|u^G(t;t_0,\alpha)\|_w. \tag{4.2}$$

Последнее неравенство приводит к противоречию при $t\to\pi^+(t_0,\alpha^G w)-0$, поэтому из утверждения теоремы 3.1 [14] следует, что $\pi^+(t_0,\alpha^G w)=+\infty$. Как следствие, неравенство (4.2) выполняется при всех $t\geq t_0$.

По условию теоремы 4.1 для любого положительного числа ϱ существует положительное число $\Delta(t_0,\varrho)$ такое, что неравенство $0<\alpha<\Delta(t_0,\varrho)$ влечет за собой выполнение неравенства $u(t;t_0,\alpha)<\varrho$. Зададим положительное число ε и выберем положительное число $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$ настолько малым, чтобы

$$\delta\in(0,1),\quad \vartheta(\delta)<\alpha_1,\quad \vartheta(\delta)<\Delta(t_0,\varepsilon_3),$$

где ε_3 обозначено положительное число, для которого $\xi(\varepsilon_3)<\varepsilon$.

Рассмотрим решение $x(t;t_0,x_0)$ с начальным условием $\|x_0\|_w < \delta(\varepsilon,t_0)$. Тогда из условий п. 3, 4 и 6 предположения 2.1 следуют неравенства

$$0 \overset{K}{\le} x_0 \overset{K}{\le} \|x_0\|_w w \overset{K}{\le} \delta w \overset{K}{\le} \vartheta^G(\delta) w.$$

С учетом условия 3) предположения 2.1 и неравенства (4.1) получим двустороннюю оценку

$$0 \overset{K}{\le} x(t;t_0,x_0) \overset{K}{\le} x(t;t_0,\vartheta^G(\delta)w) \overset{K}{\le} u^G(t;t_0,\vartheta(\delta))w. \tag{4.3}$$

Поэтому

$$\|x(t;t_0,x_0)\|_w \le \|u^G(t;t_0,\vartheta(\delta))\|_w.$$

Из неравенства $\vartheta(\delta) < \Delta(t_0,\varepsilon_3)$, следует, что $u(t;t_0,\vartheta(\delta)) < \varepsilon_3$ при всех $t \ge t_0$, поэтому $\|u^G(t;t_0,\vartheta(\delta))\|_w \le \xi(\varepsilon_3) < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$. Устойчивость состояния равновесия $x = 0$ в конусе K системы (2.1) доказана. Если положить $\rho(t_0) = \delta(1,t_0)$, то из неравенства (4.3) следует асимптотическая устойчивость в конусе K состояния равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений (2.1). Теорема полностью доказана. □

Применим утверждение доказанной теоремы для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ в конусе K, конкретизируя условия устойчивости уравнения сравнения (2.3).

Следствие 4.1. *Предположим, что для системы дифференциальных уравнений выполняются условия предположения 2.1 и неравенства*

$$\sup_k |\beta_k| < +\infty, \quad \sup_k \Big| \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds \Big| < +\infty,$$

$$\limsup_{k\to\infty} \Big(\beta_k + \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \gamma(s)\,ds\Big) < 0, \quad G \ge I.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений (2.1) асимптотически устойчиво в конусе K.

Доказательство. Достаточно показать, что условия теоремы гарантируют асимптотическую устойчивость состояния равновесия $u = 0$ уравнения сравнения (2.3).

Действительно, нетрудно непосредственным интегрированием установить равенство

$$u(\tau_{k+1}+0) = (u^{1-q}(\tau_k+0) + \beta_{k+1} + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds)(u^{1-q}(\tau_k+0) + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds)^{\frac{q}{1-q}}.$$

Обозначим $y_k = u(\tau_k+0)$, тогда получим разностное уравнение

$$y_{k+1} = (y_k^{1-q} + \beta_{k+1} + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds)(y_k^{1-q} + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds)^{\frac{q}{1-q}}, \quad y_0 = \alpha. \tag{4.4}$$

В окрестности состояния равновесия $y = 0$ уравнения (4.4) имеет место представление

$$(y_k^{1-q} + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds)^{\frac{q}{1-q}} = y_k^q + O(y_k^{2q-1}).$$

Поэтому уравнение (4.4) можно представить в виде

$$y_{k+1} = y_k + (\beta_{k+1} + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds) y_k^q + o(y_k^q).$$

По условию, существует натуральное число n_0 такое, что при всех $k \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\beta_k + \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \gamma(s)\,ds \leq -\beta$$

при некотором $\beta > 0$. Если $y_0 = \alpha$ достаточно малое положительное число, то последовательность $\{y_k\}_{k=n_0}^{\infty}$ не возрастает, поэтому существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$ и, очевидно, что этот предел равен нулю. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $0 < y_1 < \delta$ следует неравенство $0 < y_n < \varepsilon$ при всех $n \geq 1$ и при этом для некоторого $\delta_0 > 0$ из неравенства $0 < y_1 < \delta_1$ следует, что $y_k \to 0$ при $k \to \infty$. Применяя утверждение теоремы о непрерывной зависимости решений уравнения сравнения (2.3) от начальных условий, нетрудно завершить доказательство утверждения об асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия уравнения сравнения.

Следствие 4.1 доказано.

Сочетание метода усреднения и прямого метода Ляпунова [17, 18] применительно к уравнению сравнения, позволяет установить следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Предположим, что для системы дифференциальных уравнений выполняются условия предположения 2.1 и неравенства*

$$\sup_k |\beta_k| < +\infty, \quad \sup_k \Big| \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds \Big| < +\infty,$$

$$\sup_m \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{m+N} \Big(\beta_k + \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \gamma(s)\,ds \Big) < 0, \quad G \geq I.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы дифференциальных уравнений (2.1) асимптотически устойчиво в конусе K.

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение

$$y_{k+1} = y_k + a_k y_k^q + o(y_k^q), \quad y_0 = \alpha,$$

где $a_k = \beta_{k+1} + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma(s)\,ds$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $0 < y_0 < \delta$ следует неравенство $0 < y_k < \varepsilon$ при всех $k \geq 1$ и $y_k \to 0$ при $k \to \infty$, если $0 < y_0 < \delta_1$, где δ_1 – некоторое достаточно малое положительное число.

Обозначим $a = \sup\limits_k |a_k| > 0$, R положительная постоянная такая, что при всех y, $0 < y < R$ выполняется неравенство $|o(y^q)| \leq \varepsilon_1 |y^q|$, где ε_1 – некоторая положительная постоянная. Существует натуральное число N_0 такое, что

$$\sum_{k=m}^{m+N} a_k \leq -\frac{\beta_0 N_0}{2}.$$

Пусть $l \in [1, N_0]$, тогда

$$y_{k+l} = y_k + \sum_{p=k}^{k+l-1} (a_p y_p^q + o(y_p^q)).$$

Предположим, что $\{y_l\}_{l=k}^{k+N_0} \subset (0, R)$, тогда

$$|y_{k+l}| \leq |y_k| + \sum_{p=k}^{k+l-1} (a+\varepsilon_1) R^{q-1} |y_p|$$

и, как следствие, $|y_{k+l}| \leq |y_k| e^{(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}$. Существует положительная постоянная C, зависящая от R и N_0, такая, что выполняется неравенство

$$|y_{l+k}^q - y_k^q| \leq |y_l - y_k| C |y_k|^{q-1}. \tag{4.5}$$

Очевидно, что

$$|y_{l+k} - y_k| \leq N_0 (a+\varepsilon_1) |y_k|^q. \tag{4.6}$$

Сопоставляя неравенства (4.5) и (4.6), получим

$$|y_l^q - y_k^q| \leq C N_0 (a+\varepsilon_1) e^{q(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0} |y_k|^{2q-1}.$$

Оценим y_{k+N_0}, с учетом неравенств (4.5) и (4.6)

$$y_{k+N_0} = y_k + \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a_l y_l^q + o(y_l^q)) \leq y_k + \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a_l + \varepsilon_1) y_k^q +$$

$$+ \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a_l+\varepsilon_1)(y_l^q - y_k^q) \leq y_k + (-\frac{\beta_0}{2} + \varepsilon_1) N_0 y_k^q + \sum_{l=k}^{k+N_0-1} (a+\varepsilon_1) |y_l^q - y_k^q| \leq$$

$$\leq y_k + (-\frac{\beta_0}{2} + \varepsilon_1) N_0 y_k^q + C N_0^2 (a+\varepsilon_1) e^{q(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0} |y_k|^{2q-1}.$$

Выберем $\varepsilon_1 = \frac{|\beta|}{4}$ и число R_1, $0 < R_1 < R$ так, чтобы при всех $y \in (0, R_1)$ выполнялось неравенство

$$\frac{4CN_0(a+\varepsilon_1)e^{q(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}}{\beta_0}|y|^{q-1} < \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$y_{k+N_0} \le y_k - \frac{\beta_0}{8}N_0 y_k^q, \tag{4.7}$$

если только $\{y_l\}_{l=k}^{k+N_0} \in (0, R_1)$. Выберем положительное число

$$\delta(\varepsilon) = \min\{R_1 e^{-(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}, \varepsilon e^{-(a+\varepsilon_1)R^{q-1}N_0}\}.$$

Пусть $y_0 \in (0, \delta(\varepsilon))$ и обозначим Q_0 натуральное число со свойствами

$$y_k \in (0, R_1), \quad k \in [1, Q_0 - 1], \quad y_{Q_0} \ge R_1.$$

Пусть $Q_0 = N_0 d + r_0$, $0 \le r_0 < N_0$, тогда последовательность $\{y_{lN_0}\}_{l=0}^{[\frac{Q_0}{N_0}]}$ не возрастает по l, поэтому

$$y_{N_0 d} \le y_0$$

и, вследствие неравенства (4.7), и предположений относительно числа $\delta(\varepsilon)$ получим

$$R_1 \le y_{Q_0} \le y_{N_0 d} e^{N_0 R^{q-1}(a+\varepsilon_1)} \le y_0 e^{N_0 R^{q-1}(a+\varepsilon_1)} < R_1.$$

Полученное противоречие, доказывает, что $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \in (0, R_1)$. Таким образом, неравенство (4.7) выполняется при всех k. Из этого неравенства асимптотическая устойчивость состояния равновесия $u = 0$ уравнения сравнения (2.3) выводится стандартным образом. Следствие 4.2 доказано.

Пример. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\cos^2 2t x_1^{\frac{7}{5}} + \varepsilon \sin^2 t x_2^{\frac{7}{3}}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varepsilon \sin^2 2t x_1 - \cos^2 2t x_2^{\frac{5}{3}}, \quad t \ne \tau_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 5\varepsilon x_1^{\frac{7}{5}} + 5\varepsilon^2 x_2^{\frac{7}{3}}, \\ \Delta x_2 &= 3\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_2^{\frac{5}{3}}, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Относительно последовательности моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ предположим, что существует равномерно по $m \in \mathbb{N}$ предел

$$\theta = \lim_{N \to \infty} \frac{\tau_{m+N} - \tau_m}{N}.$$

Очевидно, что система (4.8) является квазиоднородной с матрицей $G = diag(5,3)$, $q = 3$. Пусть $K = \mathbb{R}^2_+$, $w = (1,1)^T$, тогда система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = (-\frac{\cos^2 2t}{5} + \frac{\varepsilon}{3})u^3, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta u = (\varepsilon + \varepsilon^2)u^3, \quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Применяя к системе сравнения (4.9) утверждение следствия 4.2 приходим к достаточным условиям асимптотической устойчивости в конусе $\mathbb{R}^2_+$ состояния равновесия $x_1 = x_2 = 0$ системы (4.8):

$$\Big(-\frac{1}{10} + \frac{\varepsilon}{3}\Big)\theta + \varepsilon + \varepsilon^2 < 0.$$

5. Заключение. Теорема 4.1 и ее следствия 4.1 и 4.2 позволяют установить коэффициентные условия устойчивости решений класса существенно нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании широкого класса нелинейных неавтономных крупномасштабных систем с импульсным воздействием.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.-Л., 1950.
2. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия, Изд-во НЦБИ АН СССР, Пущино, 1985.
3. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Динамические системы. – **1**. – ВИНИТИ, М., 1985 г.
4. *Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю.* Об устойчивости автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, № 8. – С. 1392-1407.
5. *Каменков Г.В.* Избранные труды. – Т. I, II. – М.: Наука, 1971.
6. *Козлов В.В., Фурта С.Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений // Москва-Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский Институт компьютерных исследований. – 2009. – 312 с.
7. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1980.
8. *Оболенский А.Ю.* Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем. – К.: Феникс. – 2010. – 228 с.
9. *Оболенский А.Ю.* Об устойчивости систем сравнения // Доп. АН УРСР. – 1979 – № 8. – С. 607-611.
10. *Оболенский А.Ю.* Об устойчивости линейных систем сравнения // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1984. – Вып. 1. – С. 51-55.
11. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Об устойчивости по двум мерам абстрактных монотонных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 904-923.
12. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Условия глобальной устойчивости решений нестационарных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме // Український математичний вiсник. – 2011. – **8**, № 2. – С. 182-202.
13. *Двирный А.И., Слынько В.И.* Глобальная устойчивость решений нестационарных монотонных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме // Нелiнiйнi коливання. – 2011. – **14**, № 2. – С. 187-202.
14. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – К.: Вища школа. – 1987. – 288 с.

15. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука. – 1985. – 256 с.
16. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир. – 1970. – 720 с.
17. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука. – 1986 – 192 с.
18. *Анашкин О.В., Довжик Т.В., Митько О.В.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий // Динамические системы. – Вып. 28. – 2010. – С. 3-10.

A. I. Dvirny, V. I. Slyn'ko

Stability of Solutions of quasihomogeneous monotone impulsive systems.

In the paper the stability conditions of zero solution of monotone impulsive systems have been obtained. It is assumed that the right sides of the system depend of time and are quasihomogeneous functions of independent variables.

Keywords: *impulsive system, the group of quasihomogeneous transformations, Wazewski's condition.*

О. І. Двірний, В. І. Слинько

Про стійкість розв'язків квазіоднорідних монотонних імпульсних систем.

У роботі одержано умови стійкості нульового розв'язку монотонних імпульсних систем. При цьому припускається, що праві частини залежать від часу і є квазіоднорідними функціями незалежних змінних

Ключові слова: *імпульсна система, група квазіоднорідних перетворень, умова Важевського.*

Hadmark University College, Hamar, Norway
Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
dvirny@mail.ru
vitstab@ukr.net

Получено 31.12.11