УДК 531.38

©2012. **А. А. Возняк**

ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ПЕРВОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены условия существования полурегулярных прецессий первого типа гиростата с переменным гиростатическим моментом в обобщенной задаче динамики гиростата, описываемой уравнениями Кирхгофа-Пуассона. Найдены новые решения уравнений движения гиростата, которые выражаются либо в элементарных, либо в эллиптических функциях времени.

Ключевые слова: *гиростат, полурегулярная прецессия, гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы.*

Введение. В аналитической механике и ее приложениях часто применяется метод стабилизации и управления движением с помощью маховиков [1, 2], который приводит к понятию гиростата с переменным гиростатическим моментом. Теоретические вопросы моделирования системы тел типа гиростатов рассматривались многими учеными (см., например, статьи [3, 4]). В настоящее время в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом изучены равномерные вращения [5], регулярные прецессии тяжелого гиростата [6], маятниковые движения гиростата под действием силы тяжести [7].

Как показано в работах А.В. Мазнева [8-10], исследование движений гиростата в обобщенной задаче динамики (см., например, [11]) позволяет получить такие классы прецессионных движений, которые не имеют аналогов в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести.

В данной работе на основе метода, предложенного в работе [8], изучены условия существования прецессий гиростата с постоянной скоростью прецессии (прецессии первого типа). Получены новые случаи интегрируемости уравнений класса Кирхгофа-Пуассона для случая переменного гиростатического момента.

1. Постановка задачи. Запишем уравнение движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [4, 11]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - L(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (B\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda}(t) = L(t). \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, компоненты которого формируются в зависимости от способа вращения носимых тел; $L(t)$– функция, характеризующая проекции действующих на носимые тела сил; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точки над переменными $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ и $\lambda(t)$ обозначают относительную производную по времени.

Уравнения (1), (2) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Поставим задачу определения функции $L(t)$ и параметров $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, s_i, \alpha_i$, при наличии которых уравнения (1), (2) описывают полурегулярную прецессию первого типа.

Пусть в процессе движения угол между единичным вектором $\boldsymbol{a}$, неизменно связанным с носимым телом произвольным по распределению масс, и вектором $\boldsymbol{\nu}$ постоянен и равен θ_0. Тогда имеет место инвариантное соотношение [8]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \ (a_0 = \cos\theta_0). \tag{4}$$

Для полурегулярных прецессий первого типа имеют место следующие выражения [8]:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + m_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0), \ \boldsymbol{a} = (0, 0, 1), \tag{5}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$, $\dot{\varphi}$ – скорость собственного вращения гиростата, $m_0 = \mathrm{const}$, при подстановке которых в уравнение Пуассона из (2) приходим к тождеству.

Рассмотрим уравнение (1) при условиях (5). Следуя методу [8], внесем выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (5) в уравнение (1):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \dot{\varphi}m_0[S_p(A)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] - \\ -\lambda(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + m_0(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] - \varphi^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) - m_0^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) - \\ -\dot{\varphi}(\boldsymbol{a} \times B\boldsymbol{\nu}) - m_0(\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}) = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $S_p(A)$ – след матрицы A.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}$ составляют базис. Рассмотрим проекции левой части (6) на векторы этого базиса:

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}) + \ddot{\varphi}(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) - \lambda(t)m_0[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] - m_0^2[\boldsymbol{a} \cdot (A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu})] - \\ -m_0[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu})] - [\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu})] - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}) = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \ddot{\varphi}(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2\dot{\varphi}m_0[A\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] + \lambda(t)\dot{\varphi}[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] - \\ -\dot{\varphi}[B\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] + \dot{\varphi}^2[A\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] + \ddot{\varphi}[A\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] + \lambda(t)\{\dot{\varphi}[a_0(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})] + \\ +m_0[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}) - a_0(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})]\} + \dot{\varphi}m_0[a_0'^2 S_p(A) - 2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2a_0(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] - \\ -m_0^2[(a_0(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] - \dot{\varphi}^2[(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})] + \\ +\dot{\varphi}[(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(B\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] + m_0[a_0(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (B\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu})] + \\ +(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}) - a_0(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + a_0(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{a}) = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений (7)-(9) является системой дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$.

Для получения скалярных уравнений, вытекающих из системы (7)-(9), введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
C^*_{11} = m_0^2 A_{11} - m_0 B_{11} - C_{11}, \quad C^*_{12} = m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12} - C_{12}, \\
C^*_{13} = m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} - C_{13}, \quad C^*_{22} = m_0^2 A_{22} - m_0 B_{22} - C_{22}, \\
C^*_{23} = m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23} - C_{23}, \quad C^*_{33} = m_0^2 A_{33} - m_0 B_{33} - C_{33}, \\
B^*_{11} = B_{11} - 2m_0 A_{11}, \quad B^*_{12} = B_{12} - 2m_0 A_{12}, \quad B^*_{13} = B_{13} - 2m_0 A_{13}, \\
B^*_{22} = B_{22} - 2m_0 A_{22}, \quad B^*_{23} = B_{23} - 2m_0 A_{23}, \quad B^*_{33} = B_{33} - 2m_0 A_{33},
\end{gathered} \tag{10}$$

Воспользовавшись последними двумя векторными равенствами из (5), из уравнений (7)-(9) с учетом (10) имеем

$$\begin{gathered}
\alpha_3 \dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} - a'_0 m_0(\alpha_1 \cos\varphi - \alpha_2 \sin\varphi)\lambda(t) + \frac{1}{2} a_0^{'2}(C^*_{22} - C^*_{11}) \sin 2\varphi - \\
- a_0^{'2} C^*_{12} \cos 2\varphi + a'_0(a_0 C^*_{23} + s_2)\sin\varphi - a'_0(a_0 C^*_{13} + s_1)\cos\varphi = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
(a'_0 \alpha_2 \cos\varphi + a'_0 \alpha_1 \sin\varphi + a_0 \alpha_3)\dot{\lambda}(t) + a'_0(\alpha_1 \cos\varphi - \alpha_2 \sin\varphi)\lambda(t)\dot{\varphi} + \\
+ (a'_0 A_{23} \cos\varphi + a'_0 A_{13} \sin\varphi + a_0 A_{33})\ddot{\varphi} + a'_0(A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + \\
+ a'_0 \left[a'_0 \left(\frac{1}{2}(B^*_{22} - B^*_{11}) \sin 2\varphi - B^*_{12} \cos 2\varphi \right) + \right. \\
\left. + a_0(B^*_{23} \sin\varphi - B^*_{13} \cos\varphi) \right] \dot{\varphi} = 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
(\alpha_1 \cos\varphi - \alpha_2 \sin\varphi)\dot{\lambda}(t) - ((\alpha_1 \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi)(a_0 m_0 + \dot{\varphi}) - a'_0 \alpha_3 m_0)\lambda(t) + \\
+ (A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi)\ddot{\varphi} - (A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + [a'_0(B^*_{12}\sin 2\varphi + \\
+ \frac{1}{2}(B^*_{22} - B^*_{11})\cos 2\varphi) + a_0(B^*_{13}\sin\varphi + B^*_{23}\cos\varphi) + \frac{1}{2}(a'_0(B^*_{11} + B^*_{22} + \\
+ 2m_0(A_{11} + A_{22} + A_{33}))]\dot{\varphi} - a_0 a'_0 \left(C^*_{12} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(C^*_{22} - C^*_{11}) \cos 2\varphi \right) - \\
- (a_0 s_1 + C^*_{13}(a_0^2 - a_0^{'2}))\sin\varphi - (a_0 s_2 + C^*_{23}(a_0^2 - a_0^{'2}))\cos\varphi + \\
+ \frac{1}{2} a'_0(2s_3 + a_0(2C^*_{33} - C^*_{11} - C^*_{22})) = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнения (11)-(13) допускают интеграл

$$\begin{gathered}
[a'_0(\alpha_2 \cos\varphi + \alpha_1 \sin\varphi) + a_0 \alpha_3]\lambda(t) + [a'_0(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi) + a_0 A_{33}]\dot{\varphi} - \\
- \frac{1}{2} a'_0 \left[a'_0(B^*_{12} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(B^*_{22} - B^*_{11}) \cos 2\varphi) + 2a_0(B^*_{13}\sin\varphi + B^*_{23}\cos\varphi) + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} a'_0(B^*_{22} + B^*_{11}) \right] - \frac{1}{2} a_0^2 B^*_{33} = k,
\end{gathered} \tag{14}$$

который является следствием второго интеграла из системы (3) на инвариантных соотношениях (5).

2. Случай $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 = 0$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 = 0$, $(a_0' = 1)$, тогда система уравнений (11)-(14) примет вид

$$\dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}C\sin 2\varphi - C_{12}^{*}\cos 2\varphi + s_2\sin\varphi - s_1\cos\varphi = 0, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\ddot{\varphi} + (A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + \\ + \left(\frac{1}{2}B\sin 2\varphi - B_{12}^{*}\cos 2\varphi\right)\dot{\varphi} = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}m_0\lambda(t) + (A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi)\ddot{\varphi} - (A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + \\ + \left(\frac{1}{2}B\cos 2\varphi + B_{12}^{*}\sin 2\varphi + P\right)\dot{\varphi} + C_{13}^{*}\sin\varphi + C_{23}^{*}\cos\varphi + s_3 = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

$$(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\dot{\varphi} - \frac{1}{4}B\cos 2\varphi - \frac{1}{2}B_{12}^{*}\sin 2\varphi + R = 0. \tag{18}$$

В уравнениях (15)-(18) введены дополнительные обозначения

$$\begin{gathered}B = B_{22}^{*} - B_{11}^{*}, \quad P = \frac{1}{2}[B_{22}^{*} + B_{11}^{*} + 2m_0(A_{11} + A_{22} + A_{33})], \\ C = C_{22}^{*} - C_{11}^{*}, \quad R = -\frac{1}{4}(B_{22}^{*} + B_{11}^{*}) - k.\end{gathered} \tag{19}$$

Очевидно, уравнение (16) является следствием интеграла (18). Потому в данном варианте исследования прецессий гиростата его можно отбросить.

Подвижную систему координат выберем так, что $A_{23} = 0$.

Из уравнения (18) найдем $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{B\cos 2\varphi + 2B_{12}^{*}\sin 2\varphi - 4R}{4A_{13}\sin\varphi}. \tag{20}$$

Из уравнения (17) выразим $\lambda(t)$

$$\begin{gathered}\lambda(t) = \frac{1}{m_0}\Bigg[A_{13}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - A_{13}\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \\ - \left(\frac{1}{2}B\cos 2\varphi + B_{12}^{*}\sin 2\varphi + P\right)\dot{\varphi} - C_{13}^{*}\sin\varphi - C_{23}^{*}\cos\varphi - s_3\Bigg].\end{gathered} \tag{21}$$

При использовании соотношений (20), (21) возникает особый случай $A_{13} = 0$. Остановимся на нем подробнее.

Уравнение (18) должно быть тождеством по φ. Поэтому, из (18) в силу (10), (19) получим условия

$$B_{22} - B_{11} = 2m_0(A_{22} - A_{11}), \quad B_{12} = 2m_0A_{12}, \quad k = -\frac{1}{2}(B_{11} - 2m_0A_{11}). \tag{22}$$

Выражение для $\lambda(t)$ из (21) упрощается

$$\lambda(t) = -\frac{1}{m_0}(P\dot{\varphi} + C^*_{13}\sin\varphi + C^*_{23}\cos\varphi + s_3), \tag{23}$$

где в силу (22)

$$P = B_{11} + m_0(A_{22} + A_{33} - A_{11}). \tag{24}$$

Подставим в выражение для $\lambda(t)$ из (23) в уравнение (15) и учтем формулу (24)

$$\begin{gathered}[B_{11} + m_0(A_{22} - A_{11})]\ddot{\varphi} + (C^*_{23}\sin\varphi - C^*_{13}\cos\varphi)\dot{\varphi} + \\ + m_0\left(C^*_{12}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}C\sin 2\varphi + s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi\right) = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Если имеет место условие

$$B_{11} = m_0(A_{11} - A_{22}), \tag{26}$$

то из (25) следует

$$\dot{\varphi} = \frac{m_0(C^*_{12}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}C\sin 2\varphi + s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi)}{C^*_{13}\cos\varphi - C^*_{23}\sin\varphi}. \tag{27}$$

Таким образом, при выполнении равенств $A_{23} = 0$, $A_{13} = 0$, (22), (24), (26), скорость собственного вращения выражается соотношением (27), а $\lambda(t)$ – (23). Это первый вариант решения полурегулярных прецессий в особом случае.

Второй вариант решения может быть получен из уравнения (25) при условиях $C^*_{13} = 0$, $C^*_{23} = 0$, $B_{11} \neq m_0(A_{11} - A_{22})$ или в силу (10) при выполнении равенств

$$mB_{13} + C_{13} = 0, \quad mB_{23} + C_{23} = 0. \tag{28}$$

В случае (28) соотношение (23) упрощается

$$\lambda(t) = -\frac{1}{m_0}(P\dot{\varphi} + s_3),$$

где функция $\dot{\varphi}$ может быть получена из (25)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\varkappa'_2\sin 2\varphi - \varkappa_2\cos 2\varphi - 2\varkappa_1\cos\varphi + 2\varkappa'_1\sin\varphi + \varkappa_0}, \tag{29}$$

здесь в силу условий (10)

$$\mu_0 = \frac{m_0}{B_{11} + m_0(A_{22} - A_{11})},$$

$$\varkappa_2 = \frac{\mu_0}{2}[m_0^2(A_{22} - A_{11}) - m_0(B_{22} - B_{11}) - (C_{22} - C_{11})],$$

$$\varkappa'_2 = -\mu_0(m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12} - C_{12}), \quad \varkappa_1 = \mu_0 s_2, \quad \varkappa'_1 = -\mu_0 s_1,$$

а $\varkappa_0$ – произвольная постоянная.

Из формул (27) и (29) следует, что в первом варианте $\varphi(t)$ – элементарная функция времени, во втором варианте $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени.

Рассмотрим выражение (20) в общем случае. Оно имеет особенность в знаменателе при $\varphi = 0$. Для устранения этой особенности потребуем, чтобы

$$B - 4R = 0,$$

или на основании обозначений (10) и (19)

$$k = m_0 A_{22} - B_{22}.$$

Тогда выражение (20) можно переписать в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{2B_{12}^* \cos\varphi - B\sin\varphi}{2A_{13}}. \tag{30}$$

Из уравнения (17) с учетом (30) найдем $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2m_0 A_{13}}[2(A_{13}C_{23}^* + PB_{12}^*)\cos\varphi + (2A_{13}C_{13}^* - BP)\sin\varphi + 2A_{13}s_3]. \tag{31}$$

Подставим (30) и (31) в уравнение (15) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по φ. Учитывая обозначения (10), (19), получим следующие условия на параметры:

$$\begin{gathered} C_{12} = \varkappa_3^{(1)} m_0^3 + \varkappa_1^{(1)} m_0^2 + \varkappa_1^{(1)} m_0 + \varkappa_0^{(1)}, \\ C_{22} = \varkappa_3^{(2)} m_0^3 + \varkappa_2^{(2)} m_0^2 + \varkappa_1^{(2)} m_0 + \varkappa_0^{(2)}, \\ (2m_0A_{12} - B_{12})(m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} - C_{13}) = \\ = \frac{1}{2}(B_{22} - B_{11} + 2(A_{11} - A_{22})m_0)(m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23} - C_{23}), \\ s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \end{gathered} \tag{32}$$

где введены следующие обозначения:

$$\varkappa_3^{(1)} = -\frac{A_{12}}{m_0}, \quad \varkappa_2^{(1)} = \frac{A_{12}[(B_{22} + B_{11})(A_{11} - A_{22}) + 2A_{13}B_{13}]}{A_{13}^2 m_0},$$

$$\varkappa_1^{(1)} = \frac{2A_{13}(2A_{12}C_{13} - B_{12}B_{13}) - B_{12}(B_{22} + B_{11})(A_{11} - A_{22}) + A_{12}(B_{22}^2 - B_{11}^2)}{2A_{13}^2 m_0},$$

$$\varkappa_0^{(1)} = -\frac{B_{12}(4A_{13}C_{13} + B_{22}^2 - B_{11}^2)}{4A_{13}^2 m_0}, \quad \varkappa_3^{(2)} = -\frac{2A_{12}A_{23}}{A_{13}m_0},$$

$$\begin{gathered} \varkappa_2^{(2)} = \frac{1}{2A_{13}^2 m_0}[4(B_{22} + B_{11})A_{12}^2 + 4A_{13}A_{12}B_{23} - (B_{22} - B_{11})A_{13}^2 - \\ -2((A_{11} - A_{22})B_{13} - A_{23}B_{12})A_{13} - (A_{11} - A_{22})^2(B_{22} + B_{11})], \end{gathered}$$

$$\varkappa_1^{(2)} = -\frac{1}{2A_{13}^2 m_0}[-2A_{13}^2 C_{11} + ((B_{22} - B_{11})B_{13} + 2(A_{11} - A_{22})C_{13} - 4A_{12}C_{23} + \\ +2B_{12}B_{23})A_{13} + (B_{22} + B_{11})((B_{22} - B_{11})(A_{11} - A_{22}) + 4B_{12}A_{12})],$$

$$\varkappa_0^{(2)} = -\frac{1}{8A_{13}^2 m_0}[4((B_{22} - B_{11})C_{13} + 2B_{12}C_{23})A_{13} + \\ +(B_{22} + B_{11})((B_{22} - B_{11})^2 - 4B_{12}^2)].$$

При выполнении условий (32) в силу (10) и (19) функции $\dot{\varphi}$ из (30) и $\lambda(t)$ из (31) примут вид

$$\dot{\varphi} = \frac{(B_{12} - 2m_0 A_{12})\cos\varphi - \frac{1}{2}((B_{22} - B_{11}) + 2(A_{11} - A_{22})m_0)\sin\varphi}{A_{13}}, \tag{33}$$

$$\lambda(t) = \rho_1^{(1)}\cos\varphi + \rho_1^{\prime(1)}\sin\varphi + \rho_0^{(1)},$$

где

$$\rho_1^{(1)} = -\frac{1}{A_{13}m_0}\Big[(-2A_{33}A_{12} + A_{23}A_{13})m_0^2 + (A_{33}B_{12} - B_{23}A_{13} - \\ -(B_{22} + B_{11})A_{12})m_0 + \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11})B_{12} - C_{23}A_{13}\Big],$$

$$\rho_1^{\prime(1)} = -\frac{1}{A_{13}m_0}\Big[(A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22}))m_0^2 - (A_{13}B_{13} + \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + \\ +\frac{1}{2}A_{33}(B_{22} - B_{11}))m_0 - A_{13}C_{13} - \frac{1}{4}(B_{22}^2 - B_{11}^2)\Big],$$

$$\rho_0^{(1)} = -\frac{s_3}{m_0}.$$

Таким образом, для третьего варианта из (33) следует, что функция $\varphi(t)$ – элементарная функция времени. Разрешимость условий (32) следует из того факта, что параметры C_{ij} в силу постановки задачи не стеснены ограничениями, а величины $x_i^{(j)}$ от них не зависят.

3. Случай $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$, $a_0 \neq 0$. Выразив из уравнения (12) $\dot{\lambda}(t)$, из уравнения (14) $\lambda(t)$ и подставив найденные выражения в уравнения (11), (13), получим систему из двух уравнений:

$$-\frac{a_0'\ddot{\varphi}}{a_0}(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi) + \frac{a_0'\dot{\varphi}^2}{a_0}(A_{23}\sin\varphi - A_{13}\cos\varphi) - \\ -\frac{a_0'\dot{\varphi}}{a_0}\left(\frac{a_0'}{2}B\sin 2\varphi - a_0'B_{12}^*\cos 2\varphi - a_0 B_{13}^*\cos\varphi + a_0 B_{23}^*\sin\varphi\right) + \\ +\frac{1}{2}a_0'^2 C\sin 2\varphi - a_0'^2 C_{12}^*\cos 2\varphi + \\ +a_0'(C_{23}^* a_0 + s_2)\sin\varphi - a_0'(C_{13}^* a_0 + s_1)\cos\varphi = 0, \tag{34}$$

$$
\begin{gathered}
a_0'\ddot{\varphi}(A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi) - a_0'\dot{\varphi}^2(A_{13}\sin\varphi + A_{23}\cos\varphi)+ \\
+\frac{a_0'\dot{\varphi}}{2a_0}[2a_0'a_0B_{12}^*\sin 2\varphi + a_0'a_0B\cos 2\varphi + 2(a_0^2B_{13}^* - a_0'^2m_0A_{13})\sin\varphi+ \\
+2(a_0^2B_{23}^* - a_0'^2m_0A_{23})\cos\varphi + a_0a_0'(2m_0(A_{11}+A_{22}) + B_{11}^* + B_{22}^*)]- \\
-\frac{a_0'^2}{2a_0}(2a_0^2C_{12}^* - a_0'^2m_0B_{12}^*)\sin 2\varphi - \frac{a_0'^2}{4a_0}(2a_0^2C - a_0'^2m_0B)\cos 2\varphi- \\
-a_0'[C_{23}^*(a_0^2 - a_0'^2) - a_0'^2m_0B_{23}^* + a_0s_2]\cos\varphi- \\
-a_0'[C_{13}^*(a_0^2 - a_0'^2) - a_0'^2m_0B_{13}^* + a_0s_1]\sin\varphi+ \\
+\frac{a_0'^2}{4a_0}[a_0'^2m_0(B_{11}^* + B_{22}^*) + a_0^2(4C_{33}^* - 2(C_{22}^* + C_{11}^*))+ \\
+2a_0^2m_0B_{33}^* + 4a_0s_3 + 4m_0k] = 0.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Условия существований решений системы дифференциальных уравнений (34), (35) в общем случае можно найти следующим образом. Необходимо из уравнений, исключив $\ddot{\varphi}$, определить функцию $\dot{\varphi}$. Подстановка этой функции в одно из уравнений системы (34), (35) и требование того, чтобы полученное уравнений было тождеством по φ, приводит к условиям существования решений системы (26), (27). В данной работе рассмотрены частные случаи решения этой системы.

В первом случае потребуем, чтобы уравнение (34) было тождеством для любых $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Тогда получим условия на параметры, которые запишем с учетом обозначений (10) и (19):

$$
\begin{gathered}
A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{12} = 2m_0A_{12}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{23} = 0, \\
s_2 = a_0C_{23}, \quad s_1 = a_0C_{13}, \quad C_{22} - C_{11} = m_0^2(A_{11} - A_{22}), \quad C_{12} = -m_0^2A_{12}.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

При выполнении условий (36) из уравнения (35) имеем

$$
\dot{\varphi} = \rho_1^{(2)}\cos\varphi + \rho_1'^{(2)}\sin\varphi + \rho_0^{(2)},
\tag{37}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\rho_1^{(2)} = \frac{a_0'C_{23}}{\sigma_0}, \quad \rho_1'^{(2)} = \frac{a_0'C_{13}}{\sigma_0}, \\
\rho_0^{(2)} = -\frac{1}{2a_0\sigma_0}[2m_0^2(a_0^2(A_{11} - A_{22}) - A_{22}) + m_0(2k + a_0^2(B_{22} - B_{33}) + B_{22})+ \\
+2a_0^2(C_{11} - C_{33}) + 2s_3a_0], \quad \sigma_0 = m_0(A_{11} - A_{22}) + B_{22}.
\end{gathered}
$$

В (37) полагаем, что $B_{22} \neq m_0(A_{22} - A_{11})$. Из уравнения (14) функцию $\lambda(t)$ при выполнении условий (36) можно записать так:

$$
\lambda(t) = -\dot{\varphi}A_{33} - \frac{m_0}{a_0}(a_0'^2A_{22} + a_0^2A_{33}) + \frac{1}{2a_0}(a_0'^2B_{22} + a_0^2B_{33}) + \frac{k}{a_0}.
\tag{38}
$$

Следовательно, при наличии условий (36) полурегулярная прецессия гиростата описывается формулами (37), (38).

Во втором частном случае потребуем, чтобы уравнение (35) было тождеством для всех $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Тогда условия на параметры с учетом обозначений (10), (19) примут вид

$$\begin{gathered} A_{23}=0, \quad A_{13}=0, \quad B_{12}=2m_0A_{12}, \quad B_{13}=0, \quad B_{23}=0, \\ B_{11}=m_0(A_{11}-A_{22}), \quad B_{22}=m_0(A_{22}-A_{11}), \quad C_{22}-C_{11}=m_0^2(A_{11}-A_{22}), \\ C_{12}=-m_0^2A_{12}, \quad C_{13}=0, \quad C_{23}=0, \quad s_1=0, \quad s_2=0, \\ s_3=\frac{-m_0k^*+2a_0^2[m_0^2(A_{33}-A_{22})+m_0(B_{22}-B_{33})+(C_{22}-C_{33})]}{2a_0}, \end{gathered} \tag{39}$$

где $k^*=a_0^2B_{33}+2k-m_0(a_0'^2(A_{11}+A_{22})+2a_0^2A_{33})$.

При выполнении условий (39) уравнение (34) обращается в тождество. Функция $\dot{\varphi}$ является произвольной. Из уравнения (14) с учетом (10), (39) следует

$$\lambda(t)=\frac{k^*}{2a_0}-A_{33}\dot{\varphi}. \tag{40}$$

Из формулы (40) вытекает, что проекция вектора момента количества движения на ось собственного вращения постоянна.

4. Случай $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0), \dot{\varphi}=\sqrt{a+b\sin\varphi}$. Пусть $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)$. Выразив из уравнения (14) функцию $\lambda(t)$ и подставив $\lambda(t)$ и $\dot{\lambda}(t)$ в уравнения (11) и (13), получим следующую систему уравнения

$$\begin{gathered} 4A_{33}\ddot{\varphi}\sin\varphi+2(a_0'(A_{23}\cos 2\varphi+A_{13}\sin 2\varphi)+2a_0A_{33}\cos\varphi+a_0'A_{23})m_0\dot{\varphi}- \\ -p_1\sin 3\varphi-p_2\cos 3\varphi-2a_0'p_3\sin 2\varphi-2a_0'p_4\cos 2\varphi- \\ -p_5\sin\varphi-p_6\cos\varphi+p_7=0, \end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered} (a_0A_{33}\sin 2\varphi+2a_0'A_{23}\sin\varphi)\ddot{\varphi}-2(a_0'A_{23}\cos\varphi+a_0A_{33})\dot{\varphi}^2+ \\ +\Big[\frac{1}{2}a_0a_0'm_0(A_{23}\cos 3\varphi+A_{13}\sin 3\varphi)+\left(p_8+\frac{1}{2}a_0'^2(B_{11}^*+B_{22}^*)\right)\cos 2\varphi- \\ -\frac{3}{2}a_0a_0'm_0A_{13}\sin\varphi+p_9\cos\varphi-p_8+\frac{1}{2}a_0'^2B+a_0^2B_{33}^*+2k\Big]\dot{\varphi}- \\ -\frac{1}{4}a_0p_1\sin 4\varphi-\frac{1}{4}a_0p_2\cos 4\varphi-\frac{1}{2}a_0'(a_0p_3-a_0'^2C_{13}^*)\sin 3\varphi- \\ -\frac{1}{2}a_0'(a_0p_4-a_0'^2C_{23}^*)\cos 3\varphi+\frac{1}{2}a_0p_1\sin 2\varphi+p_{10}\cos 2\varphi+ \\ +\frac{3}{2}a_0'(a_0p_3-a_0'^2C_{13}^*)\sin\varphi+\frac{1}{2}a_0'(a_0p_4-a_0'^2C_{23}^*)\cos\varphi+p_{11}=0, \end{gathered} \tag{42}$$

где введены обозначения

$$p_1 = a_0'^2(m_0 B_{12}^* + 2C_{12}^*), \quad p_2 = \frac{a_0'^2}{2}(m_0 B + 2C), \quad p_3 = s_1 + a_0(m_0 B_{13}^* + C_{13}^*),$$
$$p_4 = s_2 + a_0(m_0 B_{23}^* + C_{23}^*), \quad p_5 = a_0'^2(m_0 B_{12}^* - 2C_{12}^*), \quad p_8 = m_0(a_0'^2(A_{11} + A_{22}) + A_{33}),$$
$$p_6 = \frac{m_0}{2}(a_0'^2(B_{11}^* + 3B_{22}^*) + 4a_0^2 B_{33}^* + 4k) - a_0'^2 C,$$
$$p_7 = 2a_0' s_2 + 2a_0' a_0(C_{23}^* - m_0 B_{23}^*), \quad p_9 = \frac{a_0' a_0}{2}(4B_{23}^* - m_0 A_{23}),$$
$$p_{10} = a_0'^2 a_0(C_{33}^* - C_{11}^*) - \frac{a_0 m_0}{2}(a_0'^2 B_{11}^* + a_0^2 B_{33}^*) + a_0'^2 s_3 - a_0 m_0 k,$$
$$p_{11} = \frac{a_0'^2 a_0}{4}(3C_{11}^* + C_{22}^* - 4C_{33}^*) + \frac{a_0 m_0}{8}(3a_0'^2 B_{11}^* + a_0'^2 B_{22}^* + 4a_0^2 B_{33}^*) - a_0'^2 s_3 + a_0 m_0 k.$$

Предположим, что функция $\dot\varphi$ имеет вид

$$\dot\varphi = \sqrt{a + b\sin\varphi}. \tag{43}$$

Подставив $\dot\varphi, \dot\varphi^2, \ddot\varphi$ в уравнение (41) и (42) и потребовав, чтобы полученные уравнения были тождествами, получим условия на параметры, которые с учетом (10) и (19) можно записать так:

$$\begin{aligned}
&A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_0' = 1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0,\\
&k = m_0(A_{22} + A_{33}) + \frac{1}{2}B_{11}, \quad B_{12} = 2m_0 A_{12}, \quad B_{22} = -2m_0 A_{33} - B_{11},\\
&C_{12} = -m_0^2 A_{12}, \quad C_{13} = -m_0 B_{13}, \quad C_{23} = -m_0 B_{23},\\
&C_{22} - C_{11} = m_0^2 A_{33} + m_0 B_{11}, \quad b = \frac{2s_1}{A_{33}}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Из равенства (14) в силу (44) вытекает

$$\lambda(t) = [B_{11} - m_0(A_{11} - A_{22} - A_{33})]\sin\varphi.$$

Из формулы (43) следует, что $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени.

5. Случай $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0), \dot\varphi = a + b\sin\varphi$. Пусть

$$\dot\varphi = a + b\sin\varphi. \tag{45}$$

Из уравнения (14) с учетом (45) найдем

$$\lambda(t) = \frac{1}{4a_0'\sin\varphi}(d_2'\sin 2\varphi + d_2\cos 2\varphi + d_1'\sin\varphi + d_1\cos\varphi + d_0), \tag{46}$$

где

$$d_2' = 2a_0'(a_0' B_{12}^* - A_{23} b), \quad d_2 = a_0'(2A_{13} b + a_0'(B_{22}^* - B_{11}^*)),$$
$$d_1' = 4(a_0(a_0' B_{13}^* - A_{33} b) - a_0' A_{13} a), \quad d_1 = 4a_0'(a_0 B_{23}^* - A_{23} a),$$
$$d_0 = 2a_0(a_0 B_{33}^* - 2A_{33} a) - a_0'(2A_{13} b - a_0'(B_{11}^* + B_{22}^*)) + 4k.$$

Для устранения особенности в знаменателе формулы (46) потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$A_{23}a = a_0 B_{23}^*, \tag{47}$$

$$2a_0 A_{33} a - a_0'^2 B_{22}^* - a_0^2 B_{33}^* = 2k, \tag{48}$$

Предположим, что $A_{23} \neq 0$, тогда

$$a = \frac{a_0 B_{23}^*}{A_{23}}. \tag{49}$$

Отождествив уравнения (11) и (13) по φ с учетом (46), (48), (49), получим условия на парметры, выписанные с учетом (10)

$$\begin{gathered}
a = \frac{a_0(B_{23} - 2m_0 A_{23})}{A_{23}}, \quad b = \frac{a_0'(B_{12} - 2m_0 A_{12})}{A_{12}}, \\
k = \frac{a_0^2 A_{33}}{A_{23}}(B_{23} - 2m_0 A_{23}) - \frac{1}{2}a_0'^2(B_{22} - 2m_0 A_{22}) - \frac{1}{2}a_0^2(B_{33} - 2m_0 A_{33}), \\
s_1 = \frac{a_0}{2A_{23}^2}\{A_{23}[2m_0 A_{13} B_{23} + (B_{11} + B_{22})(B_{12} - 2m_0 A_{12})] - 2m_0 A_{23}^2 B_{13}\}, \\
s_2 = 0, \quad s_3 = -\frac{a_0}{2A_{23}^2}[A_{23}^2(-2m_0^2(A_{33} + A_{22}) - m_0(B_{11} + B_{22} + 2B_{33}) - \\
-2(C_{33} - C_{11})) - A_{23}(4A_{13}A_{12}m_0^2 - 2(A_{33}B_{23} + A_{13}B_{12})m_0 - \\
-B_{23}(B_{22} + B_{11})) - 8A_{12}A_{33}m_0(B_{12} - m_0 A_{12}^2) + 2A_{33}B_{12}^2], \\
C_{13} = m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} + \frac{1}{2A_{23}}(B_{12} - 2m_0 A_{12})(2m_0 A_{33} + B_{11} + B_{22}), \\
C_{22} = m_0(m_0 A_{22} - B_{22}) + \frac{1}{2A_{23}^2}[A_{23}^2(2C_{11} - 2m_0^2 A_{22} + m_0(B_{11} + B_{22})) - \\
-2m_0 A_{13} A_{23}(2m_0 A_{12} - B_{12}) + 2A_{33}(4m_0 A_{12}(m_0 A_{12} - B_{12}) + B_{12}^2)], \\
C_{12} = m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12}, \quad C_{23} = m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23}.
\end{gathered} \tag{50}$$

При выполнении условий (50) функция $\lambda(t)$ из (46) примет вид

$$\lambda(t) = g_1 \sin\varphi + g_0,$$

где $g_1 = \dfrac{a_0'}{2A_{23}}(2A_{13}B_{12} + A_{23}(B_{22} - B_{11}) - 2m_0(2A_{12}A_{13} + (A_{22} - A_{11})A_{23}))$,

$g_0 = \dfrac{a_0}{A_{23}}(A_{13}B_{23} - A_{23}B_{13} + A_{33}(B_{12} - 2m_0 A_{12}))$.

Предположим, что в (47) $A_{23} = 0$. Тогда получаем два случая при $a_0 = 0$ и $B_{23}^* = 0$.

Пусть $a_0 = 0$, тогда $a_0' = 1$. Подставив (46) в уравнения (11) и (13), и отождествив их по φ, выпишем условия на параметры

$$\begin{aligned}
&C_{12} = -m_0^2 A_{12}, \quad C_{23} = -m_0 B_{23},\\
&C_{13} = -b\left(\frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + m_0 A_{33}\right) + m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13},\\
&C_{11} = -b(m_0 A_{13} + A_{33} b) + \frac{1}{2} m_0 (B_{22} - B_{11}) + C_{22},\\
&B_{12} = 2m_0 A_{12}, \quad s_1 = a(A_{33} b + m_0 A_{13}), \quad s_2 = 0,\\
&s_3 = -a\left(\frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + m_0 A_{33}\right), \quad k = -\frac{1}{2}(B_{22} - 2m_0 A_{22}).
\end{aligned}$$

Из (46) следует

$$\lambda(t) = -A_{13} a - \sin\varphi\left(A_{13} b + \frac{1}{2}(B_{22} - B_{11}) - m_0(A_{22} - A_{11})\right).$$

Случай $B_{23}^* = 0$ рассматривается аналогично и приводит к линейной зависимости $\lambda(t)$ от $\sin\varphi$

6. Выводы. В статье проведено исследование условий существования прецессий первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Получены новые решения уравнений Кирхгофа-Пуассона движения неавтономного гиростата.

1. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наука, 1980. – 175 с.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.Л: ОГИЗ. – 1949. – Т. 2. – С. 152-309.
3. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вест. Моск. ун-та. Математика. Механика.– 1970. – № 2. – С. 83-96.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
5. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
6. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ИПММ. – 2009. – Т. 19.– С. 30-35.
7. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
8. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
9. *Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гироскопическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Труды ИПММ. – 2010. – Том 21. – С. 64-75.
10. *Мазнев А.В.* О прецессии сферического гиростата с переменным гироскопическим моментом в поле силы тяжести // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2011. – № 1. – С. 14-18.
11. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their tranformations // J. Meean. Theor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 742-745.

A. A. Voznyak

Semiregular precession of the first type in the problem of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces.

The problem of the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces has been considered. Conditions for the existence of semiregular gyrostat precessions of the first type with variable gyrostatic moment in the generalized problem of gyrostat dynamics described by the Kirchhoff-Poisson are obtained. New solutions of the equations of gyrostat motion, which are expressed either in elementary or elliptic functions of time has been founded.

Keywords: *gyrostat, semiregular precession, gyrostatic moment, potential and gyroscopic forces.*

А. О. Возняк

Напiврегулярнi прецесiї першого типу в задачi про рух гiростата зi змiнним гiростатичним моментом пiд дiєю потенцiйних i гiроскопiчних сил.

Розглянуто задачу про рух гiростата зi змiнним гiростатичним моментом пiд дiєю потенцiальних i гiроскопiчних сил. Отримано умови iснування напiврегулярних прецесiй першого типу гiростата зi змiнним гiростатичним моментом в узагальненiй задачi динамiки гiростата, що описується рiвняннями Кiрхгофа-Пуассона. Знайдено новi розв'язки рiвнянь руху гiростата, якi виражаються або в елементарних, або в елiптичних функцiях часу.

Ключовi слова: *гiростат, напiврегулярна прецесiя, гiростатичний момент, потенцiальнi та гiроскопiчнi сили.*

Донецкий национальный ун-т
экономики и торговли им. Туган-Барановского
`alina_voznyak@mail.ru`

Получено 05.03.12