УДК 517.5

©2011. **Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов**

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

В работе установлен ряд критериев существования регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в произвольных жордановых областях. Соответствующие критерии существования псевдорегулярных и многозначных решений задачи Дирихле сформулированы также для случая конечносвязных областей.

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, задача Дирихле, регулярные решения, псевдорегулярные решения, многозначные решения, теоремы существования.*

1. Введение. Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

– *дилатацией* уравнения (1). Уравнение (1) называется *вырожденным*, если дилатация K_μ является существенно неограниченной, т.е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Краевые задачи для уравнений Бельтрами впервые изучались в известной диссертации Римана, который рассматривал частный случай аналитических функций, когда $\mu(z) \equiv 0$, и работах Гильберта (1904, 1924), который исследовал соответствующую систему Коши–Римана для действительной и мнимой части аналитических функций $f = u + iv$, а также работе Пуанкаре (1910) по приливам. Задача Дирихле хорошо изучена для равномерно эллиптических систем уравнений, см., например, [1] и [2].

Задача Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге изучалась в работе [3]. Заметим, что критерии существования решений задачи Дирихле, сформулированные в последней работе, не инвариантны относительно конформных отображений Римана. Недавние результаты о существовании сильных кольцевых решений для вырожденных уравнений Бельтрами в [4] и [5], а также развитие теории граничного поведения кольцевых гомеоморфизмов, см., например, [6], позволяют получить дальнейшие продвижения в области существования регулярных решений задачи Дирихле в более общих областях.

2. Определения и предварительные замечания. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$

называют *допустимой* для Γ, пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \geqslant 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma. \tag{3}$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^2(z)\,dxdy. \tag{4}$$

Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [7], и тесно связано с решением вырожденных уравнений типа Бельтрами на плоскости. Следуя работе [8], см. также [9], говорим, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0 \in D$, если соотношение

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\,dxdy \tag{5}$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для любой измеримой (по Лебегу) функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1. \tag{6}$$

Говорят, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в D, если условие (5) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

В работах [4] и [5] впервые рассматривались кольцевые Q-гомеоморфизмы в граничных точках области D. Гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в граничной точке* z_0 области D, если

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\,dxdy \tag{7}$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$ и произвольных континуумов C_1 и C_2 в D, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца A в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим

z_0 и ∞, соответственно, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (6). Говорим, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в $\overline{D}$, если условие (7) выполнено для всех точек $z_0 \in \overline{D}$.

Напомним также следующие топологические понятия. Область $D \subset \mathbb{C}$ назовем *локально связной в точке* $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0, существует окрестность $V \subseteq U$ точки z_0 такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что каждая жорданова область D в $\mathbb{C}$ является локально связной в любой точке ∂D, см., например, [10], стр. 66.

Будем говорить, что ∂D *слабо плоская в точке* $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 и любого числа $P > 0$, существует окрестность $V \subset U$ точки z_0 такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P$$

для всех континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Назовем границу ∂D *слабо плоской*, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D.

Замечание 1. Известно, что многие регулярные области, такие как: выпуклые, квазивыпуклые, гладкие, липшицевы, равномерные, области квазиэкстремальной длины по Герингу-Мартио – имеют слабо плоские границы, см., например, [11].

Напомним, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$, $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, называется функцией *ограниченного среднего колебания* по Джону-Ниренбергу, сокр. $\psi \in \mathrm{BMO}$, если

$$\|\psi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\psi(z) - \psi_B| \, dxdy < \infty, \tag{8}$$

где точная верхняя грань берётся по всем кругам $B \subset D$, а ψ_B – среднее значение функции ψ в круге B. Пишем $\psi \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$, если $\psi \in \mathrm{BMO}(G)$, где G – область в $\mathbb{C}$, содержащая $\overline{D}$.

Следуя работе [12], говорим, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in D$, пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \widetilde{\psi}_\varepsilon| \, dxdy < \infty, \tag{9}$$

где $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ – среднее значение ψ в $B(z_0, \varepsilon)$. Пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(D)$, если (9) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(\overline{D})$, если ψ задана в некоторой области G в $\mathbb{C}$, содержащей $\overline{D}$, и $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$ для всех $z_0 \in \overline{D}$.

Как известно, $L^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для всех $p \in [1, \infty)$. Однако, $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя, $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, см., например, [9], с. 211. Таким образом, FMO существенно шире $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

3. О задаче Дирихле в односвязных областях. *Задача Дирихле* для уравнений Бельтрами (1) в ограниченной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состоит в нахождении непрерывной функции $f : D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п.в. и удовлетворяющей уравнению (1) п.в., а также граничному условию

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{10}$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$. При $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *регулярное решение* такой задачи есть непрерывное в $\mathbb{C}$, дискретное и открытое отображение $f : D \to \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (10) и п.в. (1). Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$. В случае $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, под *регулярным решением* задачи Дирихле (10) для уравнения Бельтрами (1) будем понимать функцию $f(z) = c + ic'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$, $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. и $K_\mu \in L^1(D)$. Предположим, что для каждого $z_0 \in \overline{D}$ существует $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и однопараметрическое семейство измеримых функций $\psi_{z_0,\varepsilon} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, таких, что*

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \tag{11}$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z) \cdot \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z - z_0|)\, dxdy = o\left(I^2_{z_0}(\varepsilon)\right). \tag{12}$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение f задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

В условии (12) мы предполагаем, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Доказательство. Пусть F – регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и которое существует по лемме 4.1 из [4] в силу условия (12). Заметим, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^*$, где $D^* = F(D)$, не может состоять из единственной точки ∞, т.к. в противном случае граница D^* являлась бы слабо плоской и по лемме 1 и теореме 3 из работы [6] F должно было иметь гомеоморфное продолжение в $\overline{D}$, что невозможно, поскольку граница D состоит более чем из одной точки. Кроме того, область D^* односвязна, см., например, лемму 5.3 в [12] или лемму 6.5 в [9]. Таким образом, по теореме Римана, см., например, II.2.1 в [13], D^* можно отобразить на единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с помощью конформного отображения R. Ввиду инвариантности модуля при конформных отображениях, $g := R \circ F$ вновь является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами (1), которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и отображает D на $\mathbb{D}$. Более того, по лемме 1 и теореме 3 в [6], g допускает продолжение до гомеоморфизма $g_* : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, поскольку $\mathbb{D}$ имеет слабо плоскую границу, а жорданова область D локально связна на границе.

Будем искать решение исходной задачи Дирихле (10) в виде $f = h \circ g$, где h – аналитическая функция в $\mathbb{D}$, с граничным условием

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \qquad \forall\ \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Как известно, аналитическая функция h восстанавливается в $\mathbb{D}$ с помощью формулы Шварца, см., например, § 8, Гл. III, часть 3 в [14], по её действительной части на границе с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \varphi \circ g_*^{-1}(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Как легко видеть, функция $f = h \circ g$ дает искомое регулярное решение задачи Дирихле (10) для уравнения Бельтрами (1). $\Box$

По лемме 1 с выбором $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv 1/t \log \frac{1}{t}$, см. следствие 2.3 в [12], получаем:

Теорема 1. *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области D функция такая, что $|\mu(z)| < 1$ п.в. и*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(\overline{D}). \tag{13}$$

Тогда для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (10).

Как и в лемме 1, здесь и далее подразумевается, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы 1 остается в силе, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

По следствию 2.1 в [12] из теоремы 1 также имеем:

Следствие 2. *Заключение теоремы 1 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dxdy < \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области D функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0, r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}, \tag{14}$$

где $||K_\mu||_1(z_0,r) = \int\limits_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ – нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Теорема 2 следует из леммы 1 при специальном выборе

$$\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv \psi_{z_0}(t) = \begin{cases} 1/\left[tk_{z_0}(t)\right], & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in [\varepsilon_0, \infty), \end{cases}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(z_0)$ и $k_{z_0}(t)$ – среднее значение $K_\mu(z)$ на окружности $S(z_0, t)$. $\Box$

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции K_μ на окружности $S(z_0, \varepsilon)$.

Из теоремы 2, привлекая также теорему 3.1 из работы [15], имеем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области D функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dxdy < \infty, \tag{15}$$

где $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция, с условием

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{16}$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Замечание 2. По теореме Стоилова о факторизации, см., например, [16], любое регулярное решение f задачи Дирихле для уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ может быть представлено в виде композиции $f = h \circ F$, где h – аналитическая функция, а F – гомеоморфное регулярное решение класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Таким образом, по теореме 5.1 из [17], условие (16) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы любое уравнение Бельтрами (1) с интегральными ограничениями на дилатацию вида (15) имело регулярные решения задачи Дирихле (10) для любой непостоянной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Полагая $H(t) = \log \Phi(t)$, заметим, что по теореме 2.1 в [15] условие (16) эквивалентно любому из следующих условий:

$$\int\limits_\Delta^\infty H'(t)\, \frac{dt}{t} = \infty, \tag{17}$$

или

$$\int\limits_\Delta^\infty \frac{dH(t)}{t} = \infty, \tag{18}$$

или

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\,\frac{dt}{t^2} = \infty \tag{19}$$

для некоторого $\Delta > 0$, а также каждому из равенств:

$$\int\limits_{0}^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \infty \tag{20}$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{21}$$

для некоторого $\Delta_* > H(+0)$.

Здесь, интеграл в (18) понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса, а интегралы в (17) и (19)-(21) как обычные интегралы Лебега.

4. О псевдорегулярных решениях задачи Дирихле в многосвязных областях. Как впервые заметил Боярский, см., например, § 6 главы 4 в [2], в случае многосвязных областей задача Дирихле для уравнений Бельтрами, вообще говоря, не имеет решений в классе непрерывных (однозначных) в $\mathbb{C}$ функций. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом случае существование решения задачи Дирихле получить в более широком классе? Оказывается можно, если решение задачи будем искать в классе функций, имеющих некоторое количество заранее фиксированных изолированных полюсов внутри области D. Точнее, при $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, *псевдорегулярное решение* такой задачи есть непрерывное в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретное и открытое отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ вне полюсов с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (10) и п.в. (1).

Рассуждая аналогично случаю односвязных областей и применяя теорему V.6.2 из [13] об отображениях конечносвязных областей на круговые области, а также теорему 4.14 в [2], получаем следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из $n \geqslant 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(\overline{D}). \tag{22}$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, с полюсами в n предписанных внутренних точках D.

Следствие 4. *В частности, заключение теоремы 4 остается в силе, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

Следствие 5. *Заключение теоремы 4 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dxdy < \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}.$$

Теорема 5. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из $n \geqslant 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0,r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}, \tag{23}$$

где $||K_\mu||_1(z_0,r) = \int\limits_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ – нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, с полюсами в n предписанных внутренних точках D.

Следствие 6. *В частности, заключения теоремы 5 имеют место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции K_μ на окружности $S(z_0,\varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из $n \geqslant 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\,dxdy < \infty, \tag{24}$$

где $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция с условием

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{25}$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, с полюсами в n предписанных внутренних точках D.

5. О существовании многозначных решений в многосвязных областях. В многосвязных областях D в $\mathbb{C}$, помимо псевдорегулярных решений, задача Дирихле (10) для уравнений Бельтрами (1) допускает многозначные решения в духе теории многозначных аналитических функций. Говорим, что непрерывное, дискретное и открытое отображение $f : B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, где $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$, является *локальным регулярным решением* уравнения (1), если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $J_f \neq 0$ и f удовлетворяет (1) п.в. Два локальных регулярных решения $f_0 : B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ и $f_* : B(z_*, \varepsilon_*) \to \mathbb{C}$ уравнения (1) будем называть продолжением друг друга, если существует конечная цепь таких решений $f_i : B(z_i, \varepsilon_i) \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ для $z \in E_i := B(z_i, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \varnothing$, $i = \overline{1, m-1}$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j : B(z_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения* (1) в D, если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ накрывают всю область D и f_j попарно являются продолжениями друг друга в этой совокупности. Многозначное решение (1) будем называть *многозначным решением задачи Дирихле* (10), если $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, f_j(z)$, $z \in B(z_j, \varepsilon_j)$, $j \in J$, является однозначной функцией в D, которая удовлетворяет условию (10).

Аналогично предыдущим секциям, доказательство существования многозначных решений задачи Дирихле для уравнений Бельтрами (1) в многосвязных областях редуцируются к задаче Дирихле для гармонических функций в круговых областях, см., например, § 3 главы VI в [13].

Теорема 7. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., удовлетворяющая посылкам теорем 4-6 или следствий 4-6. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.*

Замечание 3. Можно показать, что имеет место аналог известной теоремы о монодромии для аналитических функций, состоящий в том, что любое многозначное решение уравнения Бельтрами (1) в односвязной области D является его регулярным однозначным решением.

1. *Боярский Б.В.* Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. – 1957. – Т. 43 (85). – С. 451-503.
2. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959.
3. *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – V. 55, no. 12. – P. 1099-1116.
4. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – V. 55, no. 1-3. – P. 219-236.
5. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – № 1. – P. 127-137.
6. *Ломако Т.В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 10. – С. 1329–1337.
7. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353–393.
8. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117-150.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Monographs in Mathematics, 2009. – 367 p.
10. *Wilder R.L.* Topology of Manifolds. – AMS, New York, 1949.
11. *Афанасьева Е.С., Рязанов В.И.* Регулярные области в теории отображений на римановых многообразиях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 23-32.

12. *Игнатьев А.А., Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 395-417.
13. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966.
14. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – Москва: Наука, 1968.
15. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестник. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 524-535.
16. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1964.
17. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2011. – DOI: 10.1080/17476933.2010.534790.

D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov

The Dirichlet problem for the Beltrami equations.

In this paper it is established a series of criteria for the existence of regular solutions of the Dirichlet problem for degenerate Beltrami equations in arbitrary Jordan domains. It is also formulated the corresponding criteria for existence of pseudoregular and multi-valued solutions of the Dirichlet problem in the case of finitely connected domains.

Keywords: *Beltrami equations, Dirichlet problem, regular solutions, pseudoregular solutions, multi-valued solutions, existence theorems.*

Д. О. Ковтонюк, I. В. Пєтков, В. I. Рязанов

Задача Дiрiхле для рiвнянь Бельтрамi.

У роботi встановлено ряд критерiїв iснування регулярних розв'язкiв задачi Дiрiхле для вироджених рiвнянь Бельтрамi у довiльних жорданових областях. Вiдповiднi критерiї iснування псевдорегулярних та багатозначних розв'язкiв задачi Дiрiхле сформульовано також для випадку скiнченнозв'язних областей.

Ключовi слова: *рiвняння Бельтрамi, задача Дiрiхле, регулярнi розв'язки, псевдорегулярнi розв'язки, багатозначнi розв'язки, теореми iснування.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 23.11.11
denis_ kovtonyuk@bk.ru
igorpetkov@i.ua
vlryazanov1@rambler.ru
vl.ryazanov1@gmail.com