ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2011. Том 23

УДК 519.21+511.72

©2011. **Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий**

ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ, L-СИМВОЛИ ЯКОЇ В ЗОБРАЖЕННІ ЗНАКОДОДАТНИМ РЯДОМ ЛЮРОТА, Є НЕЗАЛЕЖНИМИ

В роботі вивчається лебегівська структура, тополого-метричні та фрактальні властивості розподілів випадкових величин, представлених рядами Люрота (L-зображеннями) за розподілами своїх "цифр" – L-зображення і навпаки. Доведено, що випадкова величина з незалежними L-символами має або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл; знайдено критерії належності кожному з чистих типів. Доведено, що "переважна" більшість цих розподілів є сингулярними, тобто зосередженими на множинах нульової міри Лебега (фракталах). Описано тополого-метричні властивості спектрів розподілів випадкових величин, та властивості їх функцій розподілу.

Ключові слова: *розклади чисел в знакододатні ряди Люрота, геометрія L-зображення, абсолютно неперервний розподіл, сингулярний розподіл, лебегівська структура розподілу, ортогональні розподіли.*

Вступ. У 1883р. J. Lüroth [13] довів, що кожне $x \in (0,1]$ є сумою ряду:

$$x = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1(d_1-1)d_2} + ... + \frac{1}{d_1(d_1-1)d_2(d_2-1)...d_{n-1}(d_{n-1}-1)d_n} + ..., \qquad (1)$$

де (d_n) – деяка послідовність натуральних чисел, більших 1. Цим самим була побудована ще одна (крім s-кових розкладів, зображень чисел рядами Кантора [8] та рядами Сільвестера [16] тощо) модель дійсного числа з використанням натуральних чисел та рядів. Це дозволило розширити використання різних форм "існування" дійсного числа для моделювання та дослідження різних математичних об'єктів (множин, функцій, операторів, мір, динамічних систем тощо [6]). Дослідженню та застосуванням розкладів (1) присвячено небагато досліджень. Розгляд різних аспектів цих питань можна знайти у кількох джерелах [7, 9, 10, 14, 12, 11], в яких також розглядався і знакозмінний аналог розкладів Люрота. Розклади чисел в ряди Люрота, як ряди Остроградського 1-го та 2-го видів [1, 3], ряди Енгеля [4], $\tilde{Q}_\infty$-зображення [5], відносяться ко класу систем зображень чисел з нульовою надлишковістю і нескінченним алфавітом. Його принциповою відмінністю є "самоподібна геометрія". Зазначимо, що енциклопедичною в цьому відношенні є стаття Серпінського [15], де вказується кілька різних способів розкладу чисел у додатні та знакозмінні ряди, члени яких є числами, оберненими до натуральних.

Теорема 1. *[2] Для довільного числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел $(d_n), d_n = d_n(x)$ така, що*

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}. \qquad (2)$$

Рівність (2) скорочено записуватимемо у формі $x = \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}$ і називатимемо L-зображенням числа x, при цьому d_n – його *n-тою L-цифрою*, або *L-символом.*

1. Геометрія L-зображення дійсних чисел.

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – фіксований впорядкований набір натуральних чисел. *Циліндром* рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називається множина

$$\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m} := \{x : x = \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m d_{m+1} d_{m+2} \ldots}, d_{m+i} \in N\}.$$

Циліндри мають наступні в л а с т и в о с т і:

1. $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1 \ldots c_m i_1 i_2 \ldots i_k} \forall k \in N.$

2. Циліндр $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ є півінтервалом з кінцями

$$\inf \Delta^L_{c_1 \ldots c_m} = \tfrac{1}{c_1+1} + \tfrac{1}{c_1(c_1+1)(c_2+1)} + \ldots + \tfrac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)} = a_m;$$

$$\max \Delta^L_{c_1 \ldots c_m} = a_m + \frac{1}{b_m}, \quad \text{де } b_m = c_1(c_1+1)\ldots c_m(c_m+1).$$

3. Довжина циліндра виражається формулою

$$\left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Зауваження. З властивостей 1 і 3 та аксіоми Кантора випливає, що для довільної послідовності натуральних чисел (c_n) переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots} = x \equiv \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}$$

є точкою півінтервалу $(0, 1]$ і вибір її позначення є природним.

4. Якщо $d_j(a) = d_j(b)$ при $j < m$ і $d_m(a) > d_m(b)$, то $a < b$.

5. Має місце рівність: $\left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m}\right| = i(i+1)\left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m i}\right|$.

6. $\sum\limits_{j=a+1}^{\infty} \left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m j}\right| = a \left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m a}\right|.$

7. $\left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m a}\right| = \sum\limits_{j=a(a+1)}^{\infty} \left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m j}\right|.$

8. $\left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m (i+1)}\right| = \dfrac{2i}{i+2} \left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m i 1}\right|.$

9. Якщо $a < b$ і $d_j(a) = d_j(b)$ при $j < m$, але $d_m(a) \neq d_m(b)$, то
1) $(a, b] \subset \Delta^L_{d_1(a) \ldots d_{m-1}(a)}$, 2) $\Delta^L_{d_1(a) \ldots d_{m-1}(a) d_m(b)(d_{m+1}(b)+1)} \subset (a, b]$.

Теорема 2. *Множина $C \equiv C[L, V] = \{x : x = \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}, d_n(x) \in V \subset N\}$ є:*

1. півінтервалом $(0, 1]$, коли $V = N$;

2. ніде не щільною незамкненою множиною нульової міри Лебега, яка з точністю до зліченної множини співпадає зі своїм замиканням, коли $V \neq N$.

3. самоподібною, якщо V – скінченна, і N-самоподібною, якщо V – нескінченна множина, причому її самоподібна (N-самоподібна) розмірність α_s є числом

$$\alpha_s = \sup_n \left\{ x : \sum_{v: V \ni v \le n} \left(\frac{1}{v(v+1)} \right)^x = 1 \right\}. \qquad (3)$$

Доведення. Твердження 1 є очевидним. 2. Нехай $V \neq N$. Легко бачити, що

$$C \subset \bigcup_{d_1 \in V} \Delta^L_{d_1}, \quad C \subset \bigcup_{d_1 \in V} \ldots \bigcup_{d_n \in V} \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n} \equiv F_n \subset F_{n-1},\ n \ge 2,$$

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k \to \infty} F_k.$$

Доведемо ніде не щільність C. Нехай (a, b) – довільний інтервал з $(0, 1]$. Очевидно, що циліндр $\Delta^L_{d_1(b) \ldots d_m(b) d_{m+1}(b)+1} \subset (a, b)$, де $d_m(b) \neq d_m(a)$. Тоді інтервал (α, β), кінці якого співпадають з кінцями циліндра $\Delta^L_{d_1(b) \ldots d_m(b)(d_{m+1}(b)+1)v}$, де $v \in N \backslash V$, не містить точок множини C. Отже, множина C є ніде не щільною за означенням.

Доведемо нуль-мірність C. Справді, для міри Лебега λ виконується

$$\lambda(C) \le \sum_{d_1 \in V} \ldots \sum_{d_n \in V} |\Delta^L_{d_1 \ldots d_n}| = \sum_{d_1 \in V} \ldots \sum_{d_n \in V} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(d_i+1)} = b^n \to 0\, (n \to \infty),$$

де $0 < b^n = \sum\limits_{v \in V \neq N} \dfrac{1}{v(v+1)} < 1$. Отже, $\lambda(C) = 0$.

3. Оскільки $C = \bigcup\limits_{v \in V} [\Delta^L_v \cap C]$ і

$$1)\ C \overset{k_v}{\sim} \Delta^L_v \cap C, \quad \text{де} \quad k_v = \frac{1}{v(v+1)}, \quad 2)\ (\Delta^L_{v_i} \cap C) \cap (\Delta^L_{v_j} \cap C) = \varnothing,$$

то C є самоподібною, якщо V – скінченна; N-самоподібною, якщо V – нескінченна.

За означенням самоподібна (N-самоподібна) розмірність її визначається. □

Розглянемо узагальнення множини $C[L, V]$, а саме:

$$C[L, (V_n)] = \{x : x = \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots},\, d_n(x) \in V_k \subset N, n = 1, 2, \ldots\}$$

Очевидно, що множина $C[L, (V_n)]$ є: 1) півінтервалом $(0, 1]$, якщо всі $V_n = N,\ n \in N$; 2) об'єднанням циліндрів рангу m, якщо $V_j = N$ при $j > m$; 3) ніде не щільною множиною, якщо $V_n \neq N$ нескінченну кількість разів.

2. Розподіл L-символів рівномірно розподіленої величини.

Теорема 3. *Якщо випадкова величина (в.в.) τ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$, то її L-символи τ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ є незалежними і однаково розподіленими, причому*

$$P\{\tau_k = i\} = \frac{1}{i(i+1)}, i = 1, 2, \ldots .$$

Доведення. Оскільки τ має рівномірний розподіл на $[0,1]$, то

1. $P\{\tau = a\} = 0$ *для довільного* $a \in [0,1]$ і

2. $P\{\tau \in (a,b)\} = P\{\tau \in [a,b]\} = P([a,b]) = b - a$, зокрема для довільного циліндра $\Delta^L_{c_1 \ldots c_m}$, згідно властивості циліндрів, має місце рівність

$$P(\Delta^L_{c_1 \ldots c_m}) = |\Delta^L_{c_1 \ldots c_m}| = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Враховуючи неперервність розподілу в.в. τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_1 = i\} = P\{\tau \in \Delta_i\} = P(\Delta_i) = |\Delta_i| = \frac{1}{i(i+1)};$$

$$P\{\tau_2 = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ji}\} = \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_{ji}| = \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{1}{j(j+1)i(i+1)} = \tfrac{1}{i(i+1)};\ \ldots;$$
$$P\{\tau_{k+1} = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{j_k=1}^{\infty} \Delta^L_{j_1 \ldots j_k i}\} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=1}^{\infty} |\Delta^L_{j_1 \ldots j_k i}| = \tfrac{1}{i(i+1)}.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k, а лише від i, то τ_k є незалежними і однаково розподіленими. □

3. Лебегівська структура розподілу випадкової величини з незалежними L-символами. Розглядається в.в. $\xi = \Delta^L_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots}$, L-символи τ_n якої є незалежними і мають розподіли $P\{\tau_n = i\} = p_{in} \geq 0$; $p_{1n} + \ldots + p_{in} + \ldots = 1$.

Теорема 4. *Якщо символи L-зображення в.в. ξ є незалежними, то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним, причому чисто дискретним є тоді і тільки тоді, коли*
$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0.$$
Множина атомів дискретно розподіленої в.в. ξ складається з точки x_0 такої, що $p_{d_j(x_0)j} = \max\limits_i \{p_{ik}\}$, і всіх точок x, які мають властивість $p_{d_j(x)j} > 0$ для довільного $j \in N$ і існує таке $m \in N$, що $d_j(x) = d_j(x_0)$ при $j \geq m$.

Доведення. З незалежності τ_k і єдиності L-зображення випливає, що

$$P\{\xi = \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k}, \quad \text{тобто} \quad P\{\xi = x\} = \prod_{j=1}^{\infty} p_{d_j(x)j}.$$

Спочатку доведемо н е о б х і д н і с т ь: якщо $M > 0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi = x_0\} = M$, то $P\{\xi = x_0\} > 0$.

Якщо $p_{d_k(x')k} > 0 \ \forall\, k \in N$ і L-зображення точки x' відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими $(m-1)$ L-символами, то

$$P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{d_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{d_k(x_0)k} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{d_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{d_k(x_0)k}}.$$

Нехай A_m – множина всіх точок x', L-цифри яких співпадають з L-цифрами точки x_0, починаючи з m. Тоді послідовність множин A_m має властивості:
1. $\{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_m \subset A_{m+1} \subset ...$
2. $P\{\xi \in A_m\} = \sum\limits_{d_1 \in N} \cdots \sum\limits_{d_{m-1} \in N} \left(\prod\limits_{k=1}^{m-1} p_{d_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{d_k(x_0)k}} \right) =$
$= \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{d_k(x_0)k}} \to 1 (m \to \infty).$

Отже, зліченна множина $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ є носієм розподілу в.в. ξ, тобто розподіл є дискретним.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x' таке, що

$$0 < P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{d_k(x')k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = M. \qquad \square$$

Лема 1. Функція розподілу (ф.р.) в.в. ξ подається у вигляді

$$F_\xi(x) = \beta_{d_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\beta_{d_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_j(x)j} \Big), \quad \text{де} \quad \beta_{d_k(x)k} = \sum_{j=d_k+1}^{\infty} p_{jk}, \quad k \in N.$$

Доведення. Згідно з означенням ф.р. $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$.

Подія $\{\xi < x\}$ є об'єднанням несумісних подій $\{\tau_1 > d_1(x)\}$, $\{\tau_1 = d_1(x) \wedge \tau_2 > d_2(x)\}, \ldots, \{\tau_j = d_j(x),\, j = \overline{1, k-1} \wedge \tau_k > d_k(x)\}, \ldots.$

Тому

$$P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau_j = d_j(x),\, j = \overline{1, k-1} \wedge \tau_k > d_k(x)\}.$$

Але з незалежності випадкових подій τ_k отримаємо

$$P\{\tau_j = d_j(x),\, j = \overline{1, k-1} \wedge \tau_k > d_k(x)\} = \beta_{d_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_j(x)j}.$$

А отже, $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \beta_{d_1(x)1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \Big(\beta_{d_k(x)k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{d_j(x)j} \Big)$. $\square$

Наслідок. *Приріст δ ф.р. F_ξ на циліндрі $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ обчислюється за формулою*

$$\delta \equiv \delta(\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i i}.$$

Лема 2. *Якщо в точці $x_0 = \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}$ ф.р. F_ξ має похідну, то*

$$F'_\xi(x_0) = \prod_{i=1}^{\infty} (d_i(d_i+1) p_{d_i i}) \equiv A(x_0).$$

Справді, оскільки $F'_\xi(x_0)$ існує, то

$$F'_\xi(x_0) = \lim_{\substack{x'<x_0<x'' \\ x''-x'\to 0}} \frac{F_\xi(x'')-F_\xi(x')}{x''-x'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta(\Delta^L_{d_1\ldots d_m})}{|\Delta^L_{d_1\ldots d_m}|} = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} (d_i(d_i+1)p_{d_i i})\,.$$

Лема 3. Спектр S_ξ розподілу в.в. ξ (тобто його мінімальний замкнений носій) є замиканням множини

$$B_\xi = \{x : x = \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots},\ \textit{де}\ p_{d_n(x)n} > 0\ \forall n \in N\} = C[L,\,(V_n)].$$

Доведення. Взагалі кажучи, B_ξ не є замкненою, тому для доведення леми досить показати, що $B_\xi \subset S_\xi$ і кожна внутрішня точка $[0,1]\backslash B_\xi$ не належить S_ξ.

Покажемо, що точка x', для якої мають місце співвідношення $p_{d_j(x')j} > 0$ для будь-якого $j \in N$, належить спектру S_ξ.

Згідно з означенням, x' є точкою росту ф.р. F_ξ, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $F_\xi(x'+\varepsilon)-F_\xi(x'-\varepsilon) > 0$. Оскільки для довільного $\varepsilon > 0$ легко вказати циліндр $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}$, який містить x', $(p_{c_i i} > 0)$ повністю належить інтервалу $(x'-\varepsilon,\, x'+\varepsilon)$, то для приростів виконуються нерівності

$$F_\xi(x'+\varepsilon) - F_\xi(x'-\varepsilon) \equiv \delta\left((x'-\varepsilon,\, x'+\varepsilon)\right) \geq \delta(\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i i} > 0.$$

Якщо точка $x' \in [0,1]\backslash B_\xi$ не є кінцем жодного з циліндрів і існує $p_{d_j(x')j} = 0$, то згідно з наслідком леми x' належить інтервалу сталості функції $\nabla_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv int\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$. Розглянувши $\varepsilon > 0$ таким, що $(x'-\varepsilon,\, x'+\varepsilon) \subset \nabla_{c_1c_2\ldots c_m}$, матимемо

$$F_\xi(x'+\varepsilon) - F_\xi(x'-\varepsilon) \leq \delta(\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}) = 0, \quad \text{тобто} \quad x' \notin S_\xi. \qquad \square$$

Теорема 5. *Спектр S_ξ розподілу в.в. ξ є: 1) відрізком $[0,\,1]$, якщо матриця $\|p_{ik}\|$ нулів не містить; 2) об'єднанням відрізків, якщо $\|p_{ik}\|$ містить нулі у скінченній кількості стовпців; 3) ніде не щільною множиною, міра Лебега якої обчислюється за формулою*

$$\lambda(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k,\ \ \textit{де}\ W_k = \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)},\ \ k \in N, \tag{4}$$

якщо матриця $\|p_{ik}\|$ містить нулі у нескінченній кількості стовпців.

Доведення. Твердження 1) є очевидним. 2) Нехай $p_{ik} > 0$ для $i \in N,\ k \geq m$. Оскільки

$$P\{\xi \in \Delta^L_{c_1\ldots c_m i_{m+1}\ldots i_{m+n}}\} = \Big(\prod_{c_i:p_{c_i i}>0} p_{c_i i}\Big) \cdot \prod_{j=m+1}^{m+n} p_{i_j j} > 0$$

для довільного набору натуральних чисел $(i_{m+1},...,i_{m+n})$, $n \in N$, то F_ξ є строго зростаючою на кожному з циліндрів $\Delta^L_{c_1\ldots c_m}$, для яких $p_{c_k k} > 0$, $k = \overline{1,\, m-1}$. Тобто в цьому випадку S_ξ є замиканням множини $\bigcup\limits_{c_i:p_{c_i i}>0} \Delta^L_{c_1\ldots c_m}$.

3) Виходячи з означення спектра S_ξ і наслідку з леми 1, для кожного $k \in N$ маємо $S_\xi \bigcap \Delta^L_{d_1 \ldots d_k} = \varnothing$, якщо $\exists m \le k$: $p_{d_m m} = 0$,

$$S_\xi \bigcap \Delta^L_{d_1 \ldots d_k} \neq \varnothing, \quad \text{якщо} \quad \prod_{j=1}^{k} p_{d_j j} > 0.$$

Тому

$$\lambda(S_\xi) = 1 - \sum_{d_1 : p_{d_1 1} = 0} |\Delta^L_{d_1}| - \sum_{\substack{d_1 : p_{d_1 1} > 0 \\ d_2 : p_{d_2 2} = 0}} |\Delta^L_{d_1 d_2}| - \ldots - \sum_{\substack{d_1, \ldots, d_{k-1} : \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{d_j j} > 0 \\ d_k : p_{d_k k} = 0}} |\Delta^L_{d_1 \ldots d_k}| =$$

$$= 1 - M_1 - W_1 M_2 - W_1 W_2 M_3 - \ldots = W_1 - W_1 M_2 - W_1 W_2 M_3 - \ldots =$$

$$= W_1 W_2 - W_1 W_2 M_3 - \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \quad \text{де} \quad M_k = 1 - W_k. \qquad \square$$

Теорема 6. *Неперервна* ($M = 0$) *в.в.* ξ *з незалежними* L*-символами має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл.*

Доведення. Нехай $\delta = (\delta_1 \ldots \delta_m)$, де $m \in N$, $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ – деякий впорядкований набір натуральних чисел. T^m_δ*-перетворенням точки* $x = \Delta^L_{d_1 \ldots d_k \ldots}$ називатимемо точку $\Delta^L_{\delta_1 \ldots \delta_m d_1 \ldots d_k \ldots} \equiv T^m_\delta(x)$. Очевидно, що T^m_δ-перетворення має єдину інваріантну точку x_0, яка має чисто періодичне L-зображення з періодом $(\delta_1 \ldots \delta_m) : x_0 = \Delta^L_{(\delta_1 \ldots \delta_m)}$.

T^m_δ*-перетворенням множини* E називається множина T^m_δ-образів всіх $x \in E$:

$$T^m_\delta(E) = \left\{ x : \ \Delta^L_{\delta_1 \ldots \delta_m d_1 \ldots d_k \ldots}, \text{ де } \Delta^L_{d_1 \ldots d_k \ldots} \in E \right\}.$$

Легко бачити, що $T^m_\delta\left((0;1]\right) = \Delta^L_{\delta_1 \ldots \delta_m}$ і T^m_δ-перетворення є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = \prod\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{\delta_i(\delta_i + 1)}$. Очевидно, що $\lambda\left[T^m_\delta(E)\right] = k\lambda(E)$, а тому, $\lambda\left[T^m_\delta(E)\right]$ і $\lambda(E)$ рівні нулю одночасно.

Через $T^m(x)$ позначимо множину всіх образів x під дією T^m_δ-перетворення, де δ пробігає множину всеможливих наборів довжини m натуральних чисел.

Нехай E – борелівська множина з $(0;1]$, $T^0(x) \equiv x$, T – множина всеможливих перетворень T^m для всіх скінченних значень m. Оскільки подія $A = \{\xi \in T(E)\}$ є залишковою множиною відносно всіх σ-алгебр B_k, породжених першими $\tau_1, \ldots, \tau_k$, то за законом 0 і 1 Колмогорова $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Можливі випадки: 1) існує множина E міри Лебега нуль така, що $P\{\xi \in E\} > 0$; 2) такої множини E немає, тобто для кожної E: з $\lambda(E) = 0$ випливає $P\{\xi \in E\} = 0$.

У першому випадку $P\{\xi \in T(E)\} = 1$ і $\lambda\{T(E)\} = 0$, тобто ξ має чисто сингулярно неперервний розподіл; у другому – чисто абсолютно неперервний, згідно з означенням. Отже, розподіл в.в. ξ є чистим. $\square$

Лема 4. Для довільного набору дійсних чисел $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ таких, що $p_i \geq 0$, $i \in \mathrm{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, виконується

$$\prod_{k=1}^{\infty} (k(k+1)p_k)^{p_k} \geq 1,$$

причому рівність має місце лише при $p_i = (i(i+1))^{-1}$ $\forall i \in \mathrm{N}$.

Дане твердження є наслідком леми 3.8.1 [6].

Якщо $N_i(x,k)$ – кількість символів i в L-зображенні x до k-го місця включно, то границя (якщо вона існує) $\lim\limits_{k\to\infty} N_i(x,k)k^{-1} = \nu_i(x)$ називається *частотою символа* i в L-зображенні x.

Число x, для якого частота $\nu_i(x) = (i(i+1))^{-1}$ $\forall i \in N$, називається L-*нормальним.*

Використовуючи посилений закон великих чисел, можна довести, що множина H всіх L-нормальних чисел відрізка $[0; 1]$ має міру Лебега рівну 1.

Теорема 7. *Неперервний розподіл* $(M = 0)$ *в.в.* ξ *є число абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*

$$\begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \Big[\sum\limits_{i:p_{ik}>0} \dfrac{1}{i(i+1)} \Big] > 0, & \texttt{(i)} \\ -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i:p_{ik}>0} \dfrac{1}{i(i+1)} \ln i(i+1)p_{ik} < \infty, & \texttt{(ii)} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i:p_{ik}>0} \dfrac{1}{i(i+1)} \ln^2 i(i+1)p_{ik} < \infty. & \texttt{(iii)} \end{cases}$$

Доведення. Якщо добуток (i) розбігається до нуля, то ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Тому вважатимемо, що має місце нерівність (i).

Відомо, що ф.р. майже скрізь має скінченну похідну. Множину таких точок зі спектра S_ξ позначимо через H. Вона складається з двох частин H_0 і H_+, в першу з яких входять такі x, що $F'_\xi(x) = 0$, а в другу – такі x, що $0 < F'_\xi(x) < \infty$. Якщо $\lambda(H_+) = 0$, то розподіл ξ є сингулярним, в протилежному випадку, враховуючи чистоту, ξ матиме абсолютно неперервний розподіл.

Нехай G – множина L-нормальних точок, в яких похідна $F'_\xi(x)$ скінченна, тоді $\lambda(G) = 1$. Якщо x_0 – довільна точка з G, то, згідно з лемою 2,

$$F'_\xi(x_0) = A(x_0) = e^{B(x_0)}, \quad \text{де} \quad B(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(d_k(d_k+1)p_{d_k k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k. \qquad (5)$$

Для кожного конкретного x_0 ряд (5) – числовий ряд. Випадковий вибір $x_0 \in S_\xi$ веде до випадкового числа $A(x_0)$. Тому на (5) можна дивитись як на ряд з незалежних в.в. $\tau_k = \ln\left(d_k(d_k+1)p_{d_k k}\right)$, які набувають значень

$$g_{1k} = \ln\left(2p_{1k}\right), \; g_{2k} = \ln\left(6p_{2k}\right), ..., \; g_{sk} = \ln\left(s(s+1)p_{sk}\right), ... \; .$$

Оскільки $F'(x_0) < \infty$ рівносильно тому, що (5) збігається, а $F'(x_0) = 0$ рівносильно $B(x_0) = -\infty$, причому $x_0 \in H_0$ чи $x_0 \in H_+$ не залежить від будь-якої скінченної кількості перших L-символів x_0, то подія $A = \{$"ряд (5) збігається"$\}$ (рівносильна "хвіст" ряду (5) збігається") є залишковою і згідно з законом "0 та 1" $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$. Тому факту: $F(x)$ майже скрізь на S_ξ має скінченну похідну, можна дати інтерпретацію в термінах збіжності ряду (5). Справді, якщо розподіл в.в. τ_k вибрати таким, щоб $p_{d_k k}$ набували значень $p_{1k},\ p_{2k}, ...,\ p_{sk}, ...$ з ймовірностями $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}, ...,\ \frac{1}{s(s+1)}, ...$, то матимуть місце рівності

$$P\{x:\ 0 < B(x) < \infty\} = \frac{\lambda(H_+)}{\lambda(S_\xi)},\ P\{x:\ B(x) = -\infty\} = \frac{\lambda(H_0)}{\lambda(S_\xi)}.$$

Таким чином, інша інтерпретація того факту, що $F_\xi(x)$ має на S_ξ скінченну похідну майже скрізь, полягає в тому, що коли $x \in S_\xi$ вибрано випадково так, що його L-символи $d_k(x)$ набувають значень $1, 2, ..., s, ...$ з ймовірностями $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}, ...,\ \frac{1}{s(s+1)}, ...$, то з ймовірністю 1 випадковий ряд (iii) збігається або розбігається до $-\infty$ і навпаки. Тому $F'_\xi(x) = 0$ $(0 < F'_\xi(x) < \infty)$ майже скрізь на S_ξ рівносильно збіжності (розбіжності) з ймовірністю 1 випадкового ряду (5). Знайдемо необхідні й достатні умови збіжності останнього з ймовірністю 1.

За законом "0 та 1" для залишкових подій можливі два взаємнодоповнюючі і виключаючі випадки: 1. $P\{x:\ \tau_k(x) \to 0,\ k \to \infty\} = 0$, 2. $P\{x:\ \tau_k(x) \to 0,\ k \to \infty\} = 1$. Якщо має місце 1, то з ймовірністю 1 ряд (5) розбігається, $F'_\xi(x) = 0$ майже скрізь, тобто $F_\xi(x)$ – сингулярна, і при цьому порушується одна з умов (i)-(iii).

У випадку 2 очевидно, що множина

$$G' = \{x:\ \tau_k(x) \to 0,\ k \to \infty\} = \left\{x:\ p_{d_k(x)k} \to \frac{1}{k(k+1)},\ k \to \infty\right\}$$

має ту ж міру Лебега, що й S_ξ. Оскільки математичне сподівання τ_k дорівнює $M[\tau_k] = \sum\limits_{i: p_{ik} > 0} \frac{1}{i(i+1)} \ln i(i+1)p_{ik}$, то умова (ii) рівносильна збіжності ряду з математичних сподівань τ_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M[\tau_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i: p_{ik} > 0} \frac{1}{i(i+1)} \ln i(i+1)p_{ik}. \tag{6}$$

Враховуючи, що дисперсія $D[\tau_k] =\ M[\tau_k^2] - M^2[\tau_k]$ і те, що із збіжності (6) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M^2[\tau_k]$, приходимо до висновку, що з умови (iii) слідує збіжність ряду з дисперсій в.в. τ_k, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} D[\tau_k]$. Тоді за теоремою Колмогорова (про два ряди) з умов (i)-(iii) випливає збіжність з ймовірністю 1 випадкового ряду (5), що дає абсолютну неперервність розподілу ξ.

Нехай ряд (ii) розбігається, що рівносильно розбіжності ряду (6). Тоді можливі випадки: 1) існує $\varepsilon \in (0; 1)$ таке, що $1 - \varepsilon < i(i+1)p_{ij}$ $\forall i \in N, \forall j \in N$; 2) такого ε

немає, тобто для кожного $\varepsilon \in (0;1)$ існує множина $J = \{j_1, ..., j_k, ...\}$, $j_{k+1} > j_k$, для кожного елемента j_k якої існує i_k таке, що $i_k(i_k+1)p_{i_k j_k} < 1 - \varepsilon$.

У випадку 1) в.в. $\{d_k(d_k+1)p_{d_k k}\}$ є відокремленими від 0. Тоді за теоремою Колмогорова (про три ряди), враховуючи лему 4, випадковий ряд (5) з ймовірністю 1 розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності (ряд з математичних сподівань розбігається). Тому розподіл ξ є сингулярним.

У випадку 2) ф.р. $F_\xi(x)$ в.в. ξ може мати відмінну від нуля похідну лише на множині чисел, L-зображення яких на нескінченній кількості місць не може використовувати одного чи кількох L-символів, а така множина згідно з теоремою 5 має міру Лебега нуль, що рівносильно сингулярності розподілу ξ.

Якщо ж розбігається ряд (iii), то розбігається ряд (ii) і наведені міркування приводять до попереднього висновку. □

Наслідок. *Неперервний розподіл* $(M = 0)$ *в.в.* ξ *є число сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли порушується хоча б одна з умов* (i)-(iii).

4. Тополого-метричні властивості сингулярного розподілу ξ. Нагадаємо [6], що сингулярні розподіли за своїми тополого-метричними властивостями спектрів бувають трьох типів. Сингулярний розподіл в.в. називається: 1) розподілом *канторівського типу* (або *C-типу*), якщо його спектр S_ξ є множиною нульової міри Лебега. 2) розподілом *салемівського типу* (або *S-типу*), якщо його спектр S_ξ містить відрізки; 3) розподілом *квазіканторівського типу* (або *K-типу*), якщо спектр S_ξ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Теорема 8. *Сингулярний розподіл в.в. ξ є сингулярним розподілом: 1) C-типу тоді і тільки тоді, коли добуток (4) розбігається; 2) S-типу тоді і тільки тоді, коли матриця $||p_{ik}||$ має скінченну кількість стовпців, які містять нулі; 3) K-типу тоді і тільки тоді, коли (4) збігається, а матриця $||p_{ik}||$ містить нескінченну кількість стовпців, які містять нулі.*

Доведення. Теорема 8 є наслідком теореми 5. Справді, якщо матриця $||p_{ik}||$ має лише скінченну кількість стовпців, які містять нулі, то спектр розподілу ξ є об'єднанням відрізків і сам розподіл належить S-типу. Якщо ж таких стовпців нескінченна кількість, то спектр є ніде не щільною множиною. При цьому нульової міри Лебега, якщо добуток (4) розбігається до нуля, тобто ξ має розподіл C-типу, і додатної міри при збіжності добутку (4), тобто розподіл ξ належить до K-типу. Оскільки наведені умови є несумісними, то це доводить теорему. □

5. Випадкові величини з однаково розподіленими L-символами. Нехай $\xi_0 = \Delta^L_{\tau_1\tau_2...\tau_k...}$ – в.в., L-символи τ_k якої є незалежними і однаково розподіленими, тобто $P\{\tau_k = i\} = p_{ik} = p_i$. Як випливає з попереднього, розподіл в.в. ξ_0 є або виродженим (дискретним розподілом з одним атомом), коли $\max\limits_i p_i = 1$; або рівномірним, коли $p_i = \dfrac{1}{i(i+1)}$ для кожного $i \in N$; або сингулярно неперервним – в решті випадків. Таким чином, властивість сингулярності розподілу є домінуючою у досліджуваному класі.

Теорема 9. *Має місце рівність*

$$\int_0^1 F_{\xi_0}(x)dx = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i(i+1)}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i(i+1)}}. \tag{7}$$

Доведення. Використовуючи адитивну властивість інтеграла Лебега, маємо

$$I \equiv \int_0^1 F_{\xi_0}(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} [\beta_i + p_i F_{\xi_0}(\Delta^L_{d_2 d_3 \ldots d_n \ldots})]dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i(i+1)} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i(i+1)} \right) \cdot \int_0^1 F_{\xi_0}(x)dx.$$

А тому

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i(i+1)} \right) \cdot I = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i(i+1)}.$$

Звідси отримуємо (7). □

Нехай стохастичний вектор $\left(p_k^{(i)}\right)$ задає розподіл в.в. $\xi_0^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$.

Теорема 10. *Якщо* $\left(p_k^{(1)}\right) \neq \left(p_k^{(2)}\right)$, *то розподіли в.в.* $\xi_0^{(1)}$ *і* $\xi_0^{(2)}$ *ортогональні.*

Доведення. Одним з носіїв розподілу $\xi_0^{(i)}$ є множина

$$M^{(i)} \equiv M[p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, ..., p_n^{(i)}, ...] = \{x : \nu_n(x) = p_n^{(i)}, n = 1, 2, ...\}, i \in \{1, 2\},$$

тобто $P\{\xi_0^{(i)} \in M^{(i)}\} = 1$. Оскільки при $\left(p_k^{(1)}\right) \neq \left(p_k^{(2)}\right)$ і $M^{(1)} \cap M^{(2)} = \varnothing$, то

$$P\{\xi_0^{(1)} \in M^{(1)}\} = P\{\xi_0^{(2)} \in [0; 1] \setminus M^{(1)}\} = 1,$$

тобто розподіли $\xi_0^{(1)}$ і $\xi_0^{(2)}$ ортогональні за означенням. □

1. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1155-1168.
2. *Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 200-211.
3. *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 174-189.
4. *Працьовитий М.В., Гетьман Б.І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 105-116.

5. *Працьовитий М.В., Лещинський О.Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірн. та мат. стат. – 1997. – № 57. – С. 134-139.
6. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
7. *Barrionuevo J., Burton R., Dajani K., Kraaikamp C.* Ergodic properties of generalized Lüroth series // Acta Arith. – 1996. – № 4 – P. 311-327.
8. *Cantor G.* Über die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. – 1869. – Bd. 14. – S. 121-128.
9. *Dajani K., Kraaikamp C.* On approximation by Lüroth series // J. Théor. Nombres Bordeaux. – 1996. – **8**, № 2. – P. 331-346.
10. *Galambos J.* Some remarks on the Lüroth expansion. // Czechoslovak Math. J. – 1972. – **22**, № 2. – P. 266-271.
11. *Ganatsiou C.* On some properties of the Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Int. J. Math. Math. Sci. – 2001. – **28**, № 6. – P. 367-373.
12. *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Metric properties of alternating Lüroth series // Portugal. Math. – 1991. – **48**, № 3. – P. 319-325.
13. *Lüroth J.* Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. – 1883. – **21**. – P. 411-423.
14. *Šalát T.* Zur metrischen Theorie der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen // Czechoslovak Math. J. 1968. – **18**, № 3. – P. 489-522.
15. *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III. – 1911. – **4**. – P. 56-77.
16. *Sylvester J.J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. J. Math. – 1880. – **3**, № 4. – P. 332-335. – Postscript, ibid 388-389.

Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi

Properties of distribution of random variable with independent L-symbols of representation by the positive Lüroth series.

In the paper we consider the distributions of random variables represented by the Lüroth series (L-representation). We study Lebesgue structure, topological, metric and fractal properties of these random variables depending on distributions of their “digits” of the L-representation, and vice versa. We prove that random variable with independent L-symbols has a pure discrete, pure absolutely continuous or pure singularly continuous distribution; the criteria (necessary and sufficient conditions) for random variable to be of each pure type of probability distributions are found. We prove that “overwhelming” majority of these probability distributions are singular, i.e., they are concentrated on sets of zero Lebesgue measure (fractals). We describe topological and metric properties of the spectra of distributions of random variables as well as properties of their probability distribution functions.

Keywords: *expansions of numbers by positive Lüroth series, geometry of L-representation, absolutely continuous probability distribution, singular probability distribution, Lebesgue structure of probability distribution, ortogonal probability distributions.*

Ю. И. Жихарева, М. В. Працевитый

Свойства распределения случайной величины, L-символы которой в представлении знакоположительным рядом Люрота, независимы.

В работе изучается лебеговская структура, тополого-метрические и фрактальные свойства распределений случайных величин, представленных рядами Люрота (L-представлениями) по делениям своих “цифр” – L-представления и наоборот. Доказано, что случайная величина с независимыми

L-символами имеет или чисто дискретное, или чисто абсолютно непрерывное, или чисто сингулярно непрерывное распределение; найдены критерии принадлежности каждому из чистых типов. Доказано, что "подавляющее" большинство этих распределений является сингулярными, то есть сосредоточенными на множествах нулевой меры Лебега (фракталах). Описаны тополого-метрические свойства спектров распределений случайных величин, и свойства их функций распределения.

Ключевые слова: *разложения чисел в знакоположительные ряды Люрота, геометрия L-представления, абсолютно непрерывное распределение, сингулярное распределение, лебеговская структура распределения, ортогональные распределения.*

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова
july2105@mail.ru
prats4@yandex.ru

Получено 14.12.11