УДК 519.7

©2011. **И. С. Грунский, И. И. Максименко**

ФИНИТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Вводятся понятия представления, фрагмента и кофрагмента для некоторых специальных алгебраических систем. В терминах специализированных "бэровских" метрик дан критерий финитности представлений. Исследованы алгебраические свойства и условия существования представлений для алгебраических систем двух видов.

Ключевые слова: *неструктурированный объект, представление, фрагмент, кофрагмент, алгебраическая система.*

1. Введение. Одной из важнейших проблем теории дискретных систем является идентификация объекта (автомата, отмеченного графа, языка) из некоторого класса объектов [1, 2]. В работах [1, 3] был введен и обоснован подход к исследованию контрольных и распознающих экспериментов в классах автоматов Мили на основе их представления специальными окрестностями в метрических пространствах автоматов, распространенный в [4, 5] на произвольные неструктурированные множества дескрипторов.

Целью настоящей статьи является применение синтеза вышеописанных подходов к исследованию алгебраических систем двух специальных видов.

Статья состоит из введения, трех разделов и заключения.

В первом разделе даны основные понятия алгебраических систем специального вида.

Во втором разделе исследована представимость систем первого вида, доказано необходимое условие существования финитных представлений.

В третьем разделе изучен второй вид алгебраических систем. Исследована алгебраическая структура данных систем. Получен метрический критерий существования финитных представлений и описана алгебраическая структура представлений.

2. Основные понятия и определения. Рассмотрим алгебраическую систему вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$, где $\boldsymbol{A}$ – счетное множество объектов, $\leq$ – предпорядок и задана функция сложности вида $n : \boldsymbol{A} \to N^+ \cup \{\infty\}$.

Вне зависимости от задания функции сложности для любых объектов $A, B \in \boldsymbol{A}$ из соотношения $A \leq B$ вытекает $n(A) \leq n(B)$.

Полагаем, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_f \cup \boldsymbol{A}_{in}$, где $\boldsymbol{A}_f = \{A \in \boldsymbol{A} | n(A) < \infty\}$ – множество финитных объектов и $\boldsymbol{A}_{in} = \{A \in \boldsymbol{A} | n(A) = \infty\}$ – множество инфинитных объектов.

Два объекта A и B эквивалентны ($A \cong B$), если одновременно $A \leq B$ и $B \leq A$. Обозначим через $\cong A$ класс эквивалентности $\{B \in \boldsymbol{A} | B \cong A\}$. Будем писать $A \not\leq B$ и $A \ncong B$, если не выполнены соотношения $A \leq B$ и $A \cong B$, соответственно, и $A < B$, если $A \leq B$ и $A \ncong B$.

Сопоставим каждой алгебраической системе $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ фактор-систему следующего вида $(\boldsymbol{A}/\cong, \leq, \mathrm{n})$, полагая что для любых $F, G \subseteq \boldsymbol{A}$ выполнено соотношение

$F \leq G$ точно тогда, когда для всякого $A \in F$ и $B \in G$ имеет место $A \leq B$ и $n(F) = sup\{n(A)|A \in F\}$ – сложность множества объектов F. Систему назовем факторизованной, если она совпадает со своей фактор-системой.

Каждому объекту A поставим в соответствие множества фрагментов $Fr(A) = \{B \in \boldsymbol{A}|\mathrm{B} \leq \mathrm{A}\}$ и кофрагментов $CoFr(A) = \{B \in \boldsymbol{A}|\mathrm{B} \not\leq \mathrm{A}\}$. Обозначим сужения данных множеств на объекты сложности не выше N как $Fr^N(A) = \{B \in Fr(A)|n(A) \leq N\}$ и $CoFr^N(A) = \{B \in CoFr(A)|n(A) \leq N\}$.

В некоторых случаях будем рассматривать разбиение $CoFr(A)$ объекта A на непересекающиеся множества кофрагментов $\{CoFr_\tau(A)\}_\tau$, элементы которых назовем кофрагментами τ-го сорта. Разбиение назовем однородным по кофрагментам, если оно совпадает с самим $CoFr(A)$. Система является однородной по кофрагментам, если разбиения по всем объектам однородны.

Нетрудно видеть, что для любого A выполнено $Fr(A) \cup CoFr(A) = \boldsymbol{A}$ и $Fr(A) \cap CoFr(A) = \emptyset$.

Введем функции $Fr : 2^{\boldsymbol{A}} \rightarrow 2^{\boldsymbol{A}}$ и $CoFr : 2^{\boldsymbol{A}} \rightarrow 2^{\boldsymbol{A}}$, полагая $Fr(F) = \bigcup_{A \in F} Fr(A)$ и $CoFr(F) = \bigcup_{A \in F} CoFr(A)$ для любого множества объектов F.

Объект C назовем разделяющим для A и B ($C \in S(A, B)$), если выполнено ($C \leq A$ и $C \not\leq B$) или ($C \not\leq A$ и $C \leq B$).

На множестве объектов зададим "расстояние" между объектами β аналогично "бэровской" метрике [3], полагая $\beta(A, B) = 0$, если $A \cong B$ и $\beta(A, B) = 1/r$, где $r = inf\{n(C)|C \in S(A, B)\}$ в противном случае. Заметим, что объекты A и B могут быть неэквивалентными, но при этом $\beta(A, B) = 0$. Введем множество предельных объектов для $F \subseteq \mathbf{A}$ как $LimF = \{B \in \mathbf{A}|\mathrm{inf}\{\beta(\mathrm{B}, \mathrm{C})|\mathrm{C} \in \mathrm{F}, \mathrm{C} \ncong \mathrm{B}\} = 0\}$.

Система $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ является финитно разделимой, если для любых двух неэквивалентных объектов существует разделяющий их финитный объект.

Кортеж объектов $(A; B_1, ..., B_r) \in Fr(A_0) \times CoFr^r(A_0)$ назовем представлением ранга r для произвольных $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$, если для любого $C \in F$ из включения $(A; B_1, ..., B_r) \in Fr(C) \times CoFr^r(C)$ вытекает $C \cong A_0$. Представление является простым, если r=1 и конечным, если величина r конечна.

Прямым представлением назовем кортеж без кофрагментов, а косвенным – кортеж без фрагмента.

Система $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ является сильно непредставимой, если для всякого объекта $A \in \boldsymbol{A}$ нет представления относительно A и $\boldsymbol{A}$.

Систему $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ назовем линейно упорядоченной, если $\boldsymbol{A}$ – линейно упорядочено. Система $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ всюду плотна, если для любых объектов A, B из $A < B$ вытекает существование такого объекта C, что $A < C < B$.

Отметим, что для всякого объекта A линейно упорядоченного множества $\boldsymbol{A}$ выполнено равенство $CoFr(A) = \{B \in \boldsymbol{A}|A < B\}$.

Введем алгебраические системы объектов вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$, где $\leq$ – предпорядок, $\nabla, \triangle$ – идемпотентные, коммутативные и ассоциативные всюду определенные бинарные операции, $\mathrm{n} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{N}^+ \cup \{\infty\}$ – неубывающая функция сложности, и справедливы следующие аксиомы:

1. для любых двух объектов A и B выполнены соотношения $A \leq A \nabla B$ и $A \triangle B \leq$

A;

2. для любых объектов $A_1, A_2, B \in \mathbf{A}$ из $A_1 \in Fr(B), A_2 \in Fr(B)$ следует $A_1 \nabla A_2 \in Fr(B)$;

3. для любых объектов $A_1, A_2, B \in \mathbf{A}$ из $A_1 \in CoFr_\tau(B), A_2 \in CoFr_\tau(B)$ вытекает $A_1 \triangle A_2 \in CoFr_\tau(B)$ для любого τ;

4. для любых двух объектов $A, B \in \mathbf{A}$ полагаем, что $n(A\nabla B) = max(n(A), n(B))$ и $n(A\triangle B) = min(n(A), n(B))$.

Назовем алгебраическую систему $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ локально замкнутой, если для всякого $A \in \boldsymbol{A}$ множества $Fr(A)$ и $CoFr(A)$ замкнуты относительно применения счетного числа операций ∇ и $\triangle$, соответственно.

Для удобства записи дополним носитель системы специальными объектами 0 и 1, для которых выполнены соотношения $0\nabla A = A$ и $1\triangle A = A$ для любого A.

Введем операцию $\odot$ над кортежами объектов из $\boldsymbol{A}$ следующим образом:

$(A_1; B_1, ..., B_r) \odot (A_2; C_1, ..., C_r) = (A_1\nabla A_2; B_1\triangle C_1, ..., B_r\triangle C_r)$.

3. Представимость алгебраических систем вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$. Следующая лемма сводит предпорядок в $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ к теоретико-множественному включению в множестве $Fr(\boldsymbol{A})$ и носит вспомогательный характер:

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1. Для любых объектов A и B равносильны условия:

1.1. $A \leq B$;

1.2. $Fr(A) \subseteq Fr(B)$;

1.3. $CoFr(B) \subseteq CoFr(A)$;

2. Для любых объектов A и B равносильны условия:

2.1. $A \cong B$;

2.2. $Fr(A) = Fr(B)$;

2.3. $CoFr(A) = CoFr(B)$;

3. Для любых объектов A и B равносильны условия:

3.1. $A < B$;

3.2. $Fr(A) \subset Fr(B)$;

3.3. $CoFr(B) \subset CoFr(A)$.

Доказательство.

1. Покажем, что условия 1.1 и 1.2 равносильны. Пусть $A \leq B$ и $C \in Fr(A)$. В этом случае $C \leq A$ и по свойству транзитивности получаем $C \leq B$. Но тогда $C \in Fr(B)$ и выполнено включение $Fr(A) \subseteq Fr(B)$.

Обратно, пусть $Fr(A) \subseteq Fr(B)$. По определению предпорядка $A \in Fr(A)$ и, следовательно, $A \in Fr(B)$, что и означает $A \leq B$. Таким образом доказана равносильность условий 1.1 и 1.2.

Равносильность 1.2 и 1.3 непосредственно следует из соотношений $CoFr(A) = \boldsymbol{A} - Fr(A)$ и $CoFr(B) = \boldsymbol{A} - Fr(B)$.

2. Следует из пункта 1 настоящего доказательства, если заметить, что $A \cong B$ точно тогда, когда $A \leq B$ и $B \leq A$.

3. Вытекает непосредственно из пунктов 1 и 2 настоящего доказательства. $\square$

На множестве $2^{\boldsymbol{A}}$ вводится операция алгебраического замыкания следующим образом:

Утверждение 2. *Операция $Fr : 2^{\boldsymbol{A}} \to 2^{\boldsymbol{A}}$ является операцией замыкания.*

Доказательство. Покажем, что выполнены условия замыкания.

1. Для любого $F \subseteq \boldsymbol{A}$ выполнено соотношение $F \subseteq Fr(F)$. Действительно, пусть $C \in F$. Тогда $C \in Fr(C)$ и $Fr(C) \subseteq Fr(F)$. Следовательно, $C \in Fr(F)$.

2. Даны $F_1, F_2 \in \boldsymbol{A}$ и $F_1 \subseteq F_2$. Покажем, что $Fr(F_1) \subseteq Fr(F_2)$. Действительно, выберем произвольно $C \in Fr(F_1)$. Это значит, что $C \in Fr(D)$ для некоторого $D \in F_1$. Но тогда $Fr(D) \subseteq Fr(F_2)$ и следовательно, $C \in Fr(F_2)$.

3. Покажем, что $Fr(Fr(F)) = Fr(F)$ для любого $F \subseteq \boldsymbol{A}$. Согласно пункта 1 настоящего доказательства выполнено включение $Fr(F) \subseteq Fr(Fr(F))$. Покажем, что выполнено обратное включение. Выберем произвольно $C \in Fr(Fr(F))$. Тогда существует такое $D \in Fr(F)$, для которого $C \in Fr(D)$. Из соотношения $D \in Fr(F)$ вытекает существование такого $G \in F$, что $D \in Fr(G)$. Но в этом случае $C \in Fr(G)$ и, следовательно, $C \in Fr(F)$. Таким образом, $Fr(Fr(F)) = Fr(F)$ для любого $F \subseteq \boldsymbol{A}$. $\square$

Следующее утверждение показывает, что каждый объект с точностью до эквивалентности изоморфен его нижнему конусу с сохранением предпорядка и сложности объекта:

Утверждение 3. *Алгебраические системы $(\boldsymbol{A}/\cong, \leq, \mathrm{n})$ и $(Fr(\boldsymbol{A}), \subseteq, \mathrm{n})$ изоморфны.*

Доказательство. Введем соответствие δ классов эквивалентности $\cong A$ и множеств $Fr(A)$. По условию 2 леммы 1 образы по δ разных классов эквивалентности $\cong A$ и $\cong B$ различны. Таким образом, существует биекция между множествами $\boldsymbol{A}/\cong$ и $Fr(\boldsymbol{A})$.

Кроме того, вводим предпорядок $\leq$ на $\boldsymbol{A}/\cong$ полагая, что $\cong A \leq \cong B$ точно тогда, когда $A \leq B$. Согласно пункту 1 леммы 1 в этом случае $\cong A \leq \cong B$ тогда и только тогда, когда $Fr(A) \subseteq Fr(B)$.

Заметим также, что $n(\cong A) = sup\{n(B) | B \cong A\} = n(A)$ и $n(Fr(A)) = sup\{n(B) | B \leq A\} = n(A)$.

Утверждение 3 доказано. $\square$

Докажем простую, но полезную в дальнейшем лемму

Лемма 4. *Дана алгебраическая система $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$.*

1. Для двух объектов A и B существует разделяющий их объект C тогда и только тогда, когда $A \ncong B$.

2. Для двух объектов A и B существует разделяющий их финитный объект C точно тогда, когда $\beta(A, B) > 0$.

Доказательство.

1. Покажем от противного. Пусть C – разделяющий объект для эквивалентных объектов A и B. Тогда $C \in Fr(A) \oplus Fr(B)$. Но согласно пункта 2 леммы 1 $Fr(A) = Fr(B)$ и такого объекта не существует.

Обратно, пусть $A \ncong B$. Тогда по пункту 2 леммы 1 множество $Fr(A) \oplus Fr(B)$ не пусто и любой объект из $Fr(A) \oplus Fr(B)$ будет искомым разделяющим объектом.

2. Пусть C – разделяющий финитный объект для объектов A и B. Тогда $\beta(A, B) \geq 1/n(C) > 0$.

Обратно, пусть $\beta(A, B) > 0$. Тогда существует объект C, разделяющий объекты A и B, причем $n(C) = 1/\beta(A, B)$. Таким образом, объект C финитен. $\square$

В отличие от утверждения 3 статьи [4], в алгебраических системах $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$ не всегда существует представление относительно любого A и $\boldsymbol{A}$. Более того, справедлив следующий критерий сильной непредставимости системы:

Утверждение 5. *Пусть дана линейно упорядоченная система* $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$. *Система сильно непредставима тогда и только тогда, когда она является всюду плотной.*

Доказательство. Пусть дана сильно непредставимая, но не всюду плотная система. Тогда существует такая пара объектов A и B, что $A < B$ и нет такого C, для которого $A < C < B$. Покажем от противного, что пара (A, B) является представлением для A и $\boldsymbol{A}$. Предположим, что существует такое $C' \ncong A$, для которого $A < C' < B$. Но в этом случае система является всюду плотной.

Обратно, пусть дана всюду плотная система. Предположим, что для некоторого $A_0 \in \boldsymbol{A}$ существует представление вида (A, B) для A_0 и $\boldsymbol{A}$. Тогда $A \leq A_0 < B$. В данной системе найдется такой объект C, для которого $A_0 < C < B$. Но тогда (A, B) не является представлением для C и $\boldsymbol{A}$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение. $\square$

Теорема 6. *Дана финитно разделимая алгебраическая система* $(\boldsymbol{A}, \leq, \mathrm{n})$. *Если для произвольных* $A_0 \in \boldsymbol{A}$ *и* $F \subseteq \boldsymbol{A}$ *существует финитное простое представление, тогда* $A_0 \notin limF$. *Обратное утверждение неверно.*

Доказательство. Пусть для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}$ существует финитное простое представление $(A; B_1)$, для которого $n(\{A, B_1\}) \leq N_0$, где N_0 – некоторое натуральное число. Выберем произвольный объект $B \in F$, не эквивалентный A_0. Если такого объекта нет, то по определению $limF$ пусто и условие утверждения выполнено.

В противном случае, пара $(A; B_1)$ разделяет A_0 и любой объект $C \in F$, неэквивалентный A_0. Очевидно, что $\beta(A_0, C) \geq 1/N_0$. В силу произвольности выбора C делаем вывод, что $A_0 \notin limF$.

Обратно, пусть $A_0 \notin limF$. Построим пример алгебраической системы, для которой условие $A_0 \notin limF$ выполнено, но нет представления для A_0 и F. Рассмотрим множество конечных слов X^* в алфавите $X, |X| \geq 2$. Будем считать, что для слов p, q выполнено соотношение $p \leq q$, если p является префиксом q, а сложность слова положим равным его длине. Зафиксируем некоторое непустое слово p_0 сложности N_0 и класс $F = p_0 {*} X$, где операция $*$ есть конкатенация слов. Слова из X^* эквивалентны, если они имеют одинаковую запись. Очевидно, что расстояние $\beta(p_0, p') \geq 1/(N_0 + 1)$ для любого $p' \in F$. Следовательно, $p_0 \notin LimF$.

Покажем теперь, что для p_0 и F нет представлений. Предположим противное. Пусть пара слов (p_1, p_2) есть представление для p_0 и F. Тогда слово p_1 является префиксом (фрагментом) для p_0 и любого слова из F. Пусть слово p_2 является кофрагментом (т.е. не префиксом) слова p_0, но является фрагментом некоторого слова из F. Это возможно только в том случае, если слово p_2 совпадает с некоторым словом q из F. Так как алфавит X содержит не менее двух символов, то можно выбрать слово q' из F, для которого слово p_2 не является префиксом. Но тогда слова q' и p_0 должны совпадать, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что не существует представления для p_0 и F. $\Box$

В работах [1, 3] показано, что для классов автоматов Мили подобный метрический критерий является необходимым и достаточным условием. Обобщение этого результата на неструктурированные множества описателей любой природы дано в [4]. Теорема 6 показывает, что для произвольных алгебраических систем с предпорядком критерий справедлив только как необходимое условие.

4. Представимость алгебраических систем вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$**.** Покажем, что в алгебраических системах вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ имеют место результаты, аналогичные работе [4].

Предварительно докажем вспомогательное утверждение

Утверждение 7. *Дана алгебраическая система* $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$.

Справедливы утверждения:

1. Для любых $A_1, A_2, B \in \boldsymbol{A}$ *из соотношения* $A_1 \nleq B$ *следует, что* $A_1 \nabla A_2 \nleq B$.

2. Для любого $A \in \boldsymbol{A}$ *и натурального* N *множества* $\boldsymbol{A}_f$, $\boldsymbol{A}_{in}$, $Fr(A)$, $CoFr(A)$, $Fr^N(A)$, $CoFr^N(A)$ *замкнуты относительно операций* ∇ *и* $\triangle$.

3. Факторизованная алгебраическая система вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ *является верхней полурешеткой.*

4. Алгебраическая система вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ *является решеткой, если она однородна по кофрагментам.*

Доказательство.

1. Докажем от противного. Предположим, что $A_1 \nabla A_2 \leq B$. Тогда $A_1 \leq A_1 \nabla A_2$ и из транзитивности операции $\leq$ следует $A_1 \leq B$, что противоречит условию утверждения.

2. Замкнутость приведенных множеств непосредственно следует из аксиом алгебраической системы $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$.

3. Покажем, что для двух объектов A_1, A_2 объект $A_1 \nabla A_2$ является супремумом. Предположим, что существует такой B, что $A_1 \leq B$ и $A_2 \leq B$ и B неэквивалентен $A_1 \nabla A_2$. Тогда выполнены соотношения $A_1 \nabla A_2 \leq B$ и $A_1 \nabla A_2 \cong B$. Выполнение аксиом полурешетки [6] следует из свойств операций ∇ и $\triangle$ и факторизованности системы.

4. Покажем, что в данном случае система вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ линейно упорядочена. Пусть $B = A_1 \triangle A_2$. Нетрудно видеть, что $A_1 \nleq B$ и $A_2 \nleq B$ и из однородности системы вытекает, что $A_1 \triangle A_2 \nleq A_1 \triangle A_2$, что возможно только в случае, когда любые два объекта A_1 и A_2 сравнимы.

Положим для определенности, что для объектов A_1 и A_2 выполнено сотношение $A_1 \leq A_2$. Введем операции ∇ и $\triangle$, полагая $A_1 \triangle A_2 = A_1$ и $A_1 \nabla A_2 = A_2$. Тогда система является решеткой по определению [6]. Нетрудно показать, что все аксиомы определения системы $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ выполнены. $\square$

В предыдущем разделе был приведен пример отсутствия представления для объекта A_0 и конечного множества объектов F. Для алгебраических систем вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ справедливо следующее утверждение

Утверждение 8.

1. Существует конечное представление для всякого $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и конечного множества $F \subseteq \boldsymbol{A}$.

2. Если система $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ финитно разделима, то существует финитное конечное представление для всякого $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и конечного множества $F \subseteq \boldsymbol{A}$.

Доказательство.

1. Пусть дано конечное множество объектов $F = \{A_1, A_2, .., A_N\}$. Построим разность F и $\cong A_0$ и обозначим через r ее мощность. Если $r = 0$, то представление $(A_0, 1)$ является искомым представлением.

В противном случае полагаем, что C_i есть разделяющий объект для A_0 и A_i, где $i \leq N$. Если $C_i \leq A_0$, то обозначим его как C'_i, в противном случае – C''_j. В результате получаем два конечных множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$. Построим объект C', применяя к элементам 1-го множества операцию ∇ и объекты C''_τ, применяя к элементам 2-го множества одного сорта τ операцию $\triangle$. Если кофрагментов τ-го сорта среди C''_j нет, то положим C''_τ равным 1. Покажем, что полученный кортеж $(C'; C''_1, ..., C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F, где r – количество сортов кофрагментов A_0.

Действительно, согласно аксиомам 1,2 алгебраической системы получаем, что $C' \leq A_0$ и $C''_k \not\leq A_0$ для всех $k \leq r$. Предположим, что существует такой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$, что $C' \leq B$ и $C''_k \not\leq B$. Пусть C'_s есть разделяющий объект для B и A_0. Но в этом случае $C'_s \not\leq A_0$, а значит и $C' \not\leq A_0$, что противоречит свойствам C'. Если же C''_s есть разделяющий объект для B и A_0, то $C''_s \leq A_0$, что также противоречит свойствам C''_s. Полученное противоречие доказывает, что кортеж $(C'; C''_1, ..., C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F.

2. Следует из пункта 1 настоящего доказательства и того факта, что в процессе доказательства выбираны множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$ финитной сложности. $\square$

Для локально замкнутых алгебраических систем вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ имеет место

Утверждение 9. *Существует представление для всякого $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и произвольного множества $F \subseteq \boldsymbol{A}$.*

Доказательство. Пусть дано произвольное счетное множество объектов F. Удалим из данного множества $\cong A_0$ и обозначим мощность разницы r. Если разность пуста, то очевидно, что $(A_0, 1)$ является искомым представлением.

В противном случае полагаем, что C_i есть разделяющий объект для A_0 и A_i. Если $C_i \leq A_0$, то обозначим его как C'_i, в противном случае – C''_j. В результате получаем два не более чем счетных множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$. Пусть объект C' получен применением операции ∇ ко всем элементам 1-го множества и объекты C''_k – результат применения к элементам 2-го множества сорта k операции $\triangle$. Если кофрагмента сорта k нет среди C''_j, то полагаем C''_k равным 1.

Такие объекты всегда существуют в силу локальной замкнутости системы. Покажем, что полученный кортеж $(C'; C''_1, ..., C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F, где r – число сортов кофрагментов A_0.

Действительно, имеют место соотношения $C' \leq A_0$ и $C''_k \not\leq A_0$ для всех $k \leq r$. Предположим, что существует такой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$, что $C' \leq B$ и $C''_k \not\leq B$. Пусть C'_s есть разделяющий объект для B и A_0. Тогда $C'_s \not\leq A_0$, а значит и $C' \not\leq A_0$, что противоречит свойствам C'. Если же C''_k есть разделяющий объект для B и A_0, то $C''_k \leq A_0$, что также противоречит свойствам C''_k. Полученное противоречие показывает, что кортеж $(C'; C''_1, ..., C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F. $\Box$

Для финитно разделимых и локально замкнутых алгебраических систем вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ справедлив метрический критерий финитной представимости:

Теорема 10. *Финитное представление для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и множества $F \subseteq \boldsymbol{A}$ существует тогда и только тогда, когда $A_0 \notin LimF$.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что для более общих алгебраических систем из существования финитного представления для $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и множества $F \subseteq \boldsymbol{A}$ следует, что $A_0 \notin LimF$.

Обратно, пусть $A_0 \notin LimF$. Тогда для любого $B_k \in F$, не эквивалентного A_0, существует объект C_i, разделяющий A_0 и B_k со сложностью $n(C_i) \leq N_0$ для некоторого натурального числа N_0. Если $C_i \leq A_0$, то обозначим его как C'_i, в противном случае – C''_j. В результате получаем два не более чем счетных множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$. Пусть объект C' равен результату применения операции ∇ ко всем элементам 1-го множества и объекты C''_k – результат применения к элементам 2-го множества одинакового сорта k операции $\triangle$. Если кофрагмента сорта k нет среди C''_j, то полагаем C''_k равным 1. Покажем, что полученный кортеж $(C'; C''_1, ..., C''_r)$ будет искомым финитным представлением для A_0 и F, где r – число сортов кофрагментов A_0.

Нетрудно показать, что $C' \leq A_0$ и $C''_k \not\leq A_0$ для всех $k \leq r$. Предположим, что существует такой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$, что $C' \leq B$ и $C'' \not\leq B$. Пусть C'_s есть разделяющий объект для B и A_0. Но в этом случае $C'_s \not\leq A_0$, а значит и $C'_s \not\leq A_0$, что противоречит свойствам C'. Если же C''_s есть разделяющий объект для B и A_0, то $C''_s \leq A_0$, что также приводит к противоречию. Таким образом, кортеж $(C'; C''_1, ..., C''_r)$ будет представлением для A_0 и F, причем $n(\{C', C''_1, ..., C''_r\}) \leq N_0$. Теорема 10 доказана. $\Box$

Метрический критерий представимости неструктурированных множеств дескрипторов [4] и теорема 10 обобщают аналогичные метрические критерии представимости для классов автоматов Мили [3] и помеченных графов.

Справедливо следующее

Следствие 11. *Для произвольных $A_0 \in \boldsymbol{A}_f$ и $F \subseteq \boldsymbol{A}_f$, где $n(F) \leq N_0$, существует финитное представление для A_0 и F сложности не выше $N' = max(N_0, n(A_0))$.*

Доказательство. Выберем любой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$. Если такого объекта нет, то пара $(A_0, 1)$ является искомым финитным представлением со сложностью $n(A_0)$. Пусть объект C разделяет A_0 и B. Очевидно, что $C \leq A_0$ или

$C \leq B$. В любом случае, $n(C) \leq N'$ и $\beta(A_0, B) \geq 1/N'$. Таким образом, выполнено $A_0 \notin LimF$ и по теореме 10 существует финитное представление для A_0 и F со сложностью не выше N'. $\square$

Следующее утверждение позволяет порождать представления объединения классов в финитно разделимых и локально замкнутых алгебраических системах вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$

Утверждение 12. *Даны $A_0 \in \boldsymbol{A}$ и $F_1, F_2 \subseteq \boldsymbol{A}$. Если O_1 является представлением для A_0 и F_1, а O_2 – представлением для A_0 и F_2, то $O_1 \odot O_2$ есть представление для A_0 и $F_1 \cup F_2$.*

Доказательство. Пусть $O_1 = (A_1; B_1, ..., B_r)$ и $O_2 = (A_2; C_1, ..., C_s)$ – некоторые представления для A_0 и F_1, F_2 ранга r и s, соответственно. Если r не равно s, то всегда представления O_1 и O_2 можно расширить объектами 1 в нужных позициях кортежа для достижения $r = s$. Предположим, что $O_1 \odot O_2$ не является представлением для A_0 и $F_1 \cup F_2$. В этом случае существует неэквивалентный A_0 объект $B \in F_1 \cup F_2$, для которого $A_1 \nabla A_2 \leq B$ и $B_k \triangle C_k \nleq B$. Без потери общности будем считать, что $B \in F_1$. Тогда из $A_1 \leq A_1 \nabla A_2$ и $A_1 \nabla A_2 \leq B$ следует, что $A_1 \leq B$. Аналогично, из соотношений $B_k \triangle C_k \nleq B$ и $B_k \triangle C_k \leq B_k$ вытекает $B_k \nleq B$. Но тогда кортеж O_1 не является представлением для A_0 и F_1. Полученное противоречие доказывает утверждение 12. $\square$

Алгебраическая структура представлений в финитно разделимых и локально замкнутых алгебраических системах вида $(\boldsymbol{A}, \leq, \nabla, \triangle, \mathrm{n})$ описывается следующей

Теорема 13.

1. Множество представлений для фиксированных A_0 и F является идемпотентной и коммутативной полугруппой относительно операции $\odot$.

2. Множество финитных представлений для фиксированных A_0 и F является идемпотентной и коммутативной полугруппой относительно операции $\odot$.

Доказательство.

1. Замкнутость множества представлений для фиксированных A_0 и F относительно операции $\odot$ следует из утверждения 12 при предположении $F_1 = F_2 = F$. Идемпотентность, коммутативность и ассоциативность операции $\odot$ вытекает из аналогичных свойств операций $\nabla, \triangle$.

2. Вытекает из пункта 1 настоящего доказательства и соотношения $n(O_1 \odot O_2) \leq max(n(O_1), n(O_2))$ для любых пар объектов O_1, O_2. $\square$

5. Заключение. В настоящей статье методы исследования представлений неструктурированных объектов распространены на алгебраические структуры специального вида. Для локально замкнутых и финитно разделимых алгебраических систем получен метрический критерий существования финитных представлений, аналогичный результатам работы [4]. Описана алгебраическая структура представлений для фиксированных объекта-эталона и множества объектов.

1. *Грунский И.С., Козловский В.А.* Синтез и идентификация автоматов. – Киев.: Наукова думка, 2004. – 245 с.
2. *Бородай С.Ю.* Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ – Саратов, 1997. – 21 с.
3. *Максименко И.И.* Эксперименты в финитно-определенных метрических пространствах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ – Саратов, 2000. – 16 с.
4. *Максименко И.И.* Финитные представления неструктурированных объектов // Труды ИПММ. – 2009. – Т. 19. – С. 162-167.
5. *Грунский И.С., Максименко И.И.* Распознавание неструктурированных объектов // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 21. – С. 76-85.
6. *Общая алгебра.* – Т. 1. / Под общ. ред. Л.А.Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – 592 с.

I. S. Grunsky, I. I. Maksimenko

Finite representation in algebraic systems.

Concepts of representation, fragment and cofragment for some special algebraic systems are considered. A conditions of finiteness representations give in terms of specialized metrics of Ber. The algebraic properties and conditions for the existence of representations investigated for algebraic systems in the two cases.

Keywords: *unstructured object, representation, fragment, cofragment, algebraic systems.*

І. С. Грунський, І. І. Максименко

Фінітні зображення в алгебраїчних системах.

Введено поняття зображення, фрагмента та кофрагмента для деяких спеціальних алгебраїчних систем. У термінах спеціалізованих "беровських" метрик надано критерій фінітності зображень. Досліджено алгебраїчні властивості та умови існування зображень для алгебраїчних систем двох видів.

Ключові слова: *неструктурований об'єкт, зображення, фрагмент, кофрагмент, алгебраїчна система.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
iim@bank-prsp.dn.ua

Получено 15.11.11