УДК 517

©2011. **И. В. Горохова, Н. А. Роженко**

ДЕЙСТВИЕ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ НА МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ НА КОНЦЕ

Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний упругого стержня с сосредоточенной массой на конце под действием вязкого трения. Левый конец стержня закреплен жестко без трения. Правый конец несет сосредоточенную массу. Описано расположение спектра такой задачи и получена асимптотическая формула для собственных значений.

Ключевые слова: *собственные значения, операторный пучок, краевые условия.*

1. Введение. Одной из наиболее ранних, досконально исследованных задач на собственные значения является рассмотренная Леонардом Эйлером в 1744 году проблема определения критической нагрузки для гибкого стержня, работающего на сжатие и подверженного опасности потери устойчивости. В XIX веке при построении классической математической физики возникли многочисленные задачи на собственные значения для колебаний (см.например, [1], [2], [3]). В 70-80 г.г. прошлого века появляется необходимость в рассмотрении новых начально-краевых спектральных задач, содержащих спектральный параметр не только в уравнениях, но и в граничных условиях. Кроме того, особый интерес представляет влияние вязкого трения на различные изучаемые физические объекты ([4], [5]).

Далее будет представлена задача о поперечных колебаниях стержня, который находится под действием вязкого трения. Стержни являются наиболее часто применяемыми расчетными схематизациями при рассмотрении поперечных колебаний судовых конструкций. Ими моделируются балки судового набора, валы, мачты, пиллерсы, кронштейны и целый ряд других конструкций. Основными целями расчетов поперечных колебаний стержней являются: определение спектра собственных частот и соответствующих им форм колебаний и определение параметров вынужденных колебаний под действием заданной системы возмущающих сил.

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня плотности $\rho = 1$, растянутого распределённой силой, пропорциональной $g(x) \geqslant 0$, $g \in C^1[0, l]$, находящегося под действием однородного вязкого трения, коэффициент которого $k > 0$, описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь x – координата, измеряемая от левого конца стержня, t – время, $u(x,t)$ – поперечное смещение точки стержня, находящейся на расстоянии x от левого конца в момент времени t. Левый конец стержня закреплен жестко без трения. На правом конце находится массивное кольцо массы $m > 0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Жесткое закрепление левого конца описывается краевыми условиями (2)-(3)

$$u(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{3}$$

Краевые условия на правом конце имеют следующий вид

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \tag{4}$$

$$-\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=l} + m\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l} + g(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} + \beta\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l} = 0, \tag{5}$$

где $l > 0$ – длина стержня, $\beta > 0$ – коэффициент вязкого трения (демпфирования) кольца. Условие (4) означает, что стержень соединен с кольцом шарнирно, а условие (5) означает, что кольцо движется вдоль вертикали с вязким трением. Различные виды краевых условий в отсутствие демпфирования рассмотрены в [6]. Условие (5) является физически наиболее оправданным (см.например, [6], [7], [8], [9]). Отметим, что результаты, близкие к полученным в настоящей статье, для другого краевого условия на правом конце имеются в работе [10], на левом – в [11]. После стандартного преобразования $u(x,t) = e^{i\lambda t}y(\lambda, x)$ получаем спектральную задачу

$$y^{(4)} - \lambda^2 y - (gy')' + ik\lambda y = 0, \tag{6}$$

$$y(\lambda, 0) = 0, \tag{7}$$

$$y^{(1)}(\lambda, 0) = 0, \tag{8}$$

$$y^{(2)}(\lambda, l) = 0, \tag{9}$$

$$-y^{(3)}(l) - m\lambda^2 y(l) + g(l)y'(l) + i\lambda\beta y(l) = 0. \tag{10}$$

2. Теоретико-операторная трактовка задачи. В данной работе мы используем следующие определения.

Определение 1. Множество значений λ, для которых обратный оператор $L(\lambda)^{-1}$ существует как ограниченный замкнутый, называется резольвентным множеством, а дополнение к нему – спектром пучка $L(\lambda)$.

Определение 2. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением ([12], с. 61) пучка $L(\lambda)$, если существует вектор $y_0 \in D(A)$ (называемый собственным вектором) такой, что $y_0 \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Векторы $y_1, ..., y_{p-1}$ называются цепочкой присоединенных к y_0 векторов, если

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} \left.\frac{d^s L(\lambda)}{d\lambda^s}\right|_{\lambda=\lambda_0} y_{k-s} = 0, \quad k = \overline{1, p-1}.$$

Число p называется длиной цепочки из собственного и присоединенных векторов. Геометрической кратностью собственного значения называется число соответствующих линейно независимых собственных векторов. Алгебраической кратностью собственного значения называется максимальное значение суммы длин цепочек, соответствующих линейно независимым собственным векторам. Собственное значение называется изолированным, если некоторая его выколотая окрестность принадлежит резольвентному множеству. Изолированное собственное значение λ_0 конечной алгебраической кратности называется нормальным, если образ $\mathrm{Im} L(\lambda_0)$ замкнут.

Рассмотрим теоретико-операторную трактовку этой задачи. Для этого введём операторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(0,l) \oplus \mathbb{C}$ согласно следующим формулам:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y(x) \in W_2^4(0,l), \\ c = y(l), \quad y(0) = y^{(1)}(0) = 0, \quad y^{(2)}(l) = 0 \end{array} \right\},$$

$$A \begin{pmatrix} y(x) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(4)} \\ -y^{(3)}(l) \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(gy')' \\ g(l)y'(l) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda) = (A - \lambda^2 M + G + i\lambda K)$$

с областью определения $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A)$. Эта область определения не зависит от спектрального параметра λ по определению. Естественно считать, что спектр пучка $L(\lambda)$ является спектром нашей задачи, поскольку, расписав уравнение $L(\lambda)Y = 0$ покомпонентно, получим (6) и (10), а условия (7)-(8) входят в описание $D(A)$. Коэффициенты этой задачи являются целыми функциями спектрального параметра λ. Поэтому (см. [12], с. 27) спектр этой краевой задачи и пучка L состоит из нормальных собственных значений, которые сгущаются только к бесконечности.

Лемма 1. *Оператор A самосопряженный и неотрицательный.*

Доказательство. Пусть $Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y(l) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$, а $Z = \begin{pmatrix} z(x) \\ z(l) \end{pmatrix}$, где $z(x) \in W_2^4(0,l)$, тогда, учитывая, что $y(0) = 0$, $y^{(1)}(0) = 0$, и интегрируя по частям дважды, получаем

$$(AY, Z) = \int\limits_0^l y^{(4)}(x)\overline{z}(x)\,dx - y^{(3)}(l)\overline{z}(l) = \tag{11}$$

$$= -y^{(3)}(0)\overline{z}(0) + y'(l)\overline{z}^{(2)}(l) + y^{(2)}(0)\overline{z}^{(1)}(0) - y(l)\overline{z}^{(3)}(l) + \int\limits_0^l y\overline{z}^{(4)}\,dx.$$

Отсюда видно, что, если мы положим

$$z(0) = z^{(1)}(0) = z^{(2)}(l) = 0, \tag{12}$$

то $(AY, Z) = (Y, AZ)$ и $D(A^*) = D(A)$. Покажем, что оператор A неотрицателен. Для этого рассмотрим скалярное произведение (AY, Y). Полагая в (11) $Z = Y$ и учитывая условия (12), получим

$$(AY, Y) = \int\limits_0^l |y^{(2)}|^2\, dx \geqslant 0.$$

Откуда видно, что оператор A является неотрицательным. □

Лемма 2. *Оператор G симметричный и неотрицательный.*

Доказательство. Пусть $Y \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(G)$, $Z \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(G)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(GY, Z) = -\int\limits_0^l (g(x)y')'\overline{z}(x)\, dx + g(l)\overline{z}(l)y'(l) =$$

$$= \int\limits_0^l gy'\overline{z}'\, dx = g(l)\overline{z}'(l)y(l) - \int\limits_0^l (g\overline{z}')'y\, dx = (Y, GZ). \tag{13}$$

Таким образом, оператор G симметричный. Покажем, что на области $D(G) = D(A)$ оператор G неотрицательный. Для этого рассмотрим скалярное произведение (GY, Y). Из формулы (13) следует, что

$$(GY, Y) = \int\limits_0^l g(x)|y'|^2\, dx \geqslant 0.$$

□

Предложение. Спектр пучка $L(\lambda)$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости.

Этот результат следует из [13] для пучка ограниченных операторов, но доказательство остается справедливым и для случая пучка неограниченных операторов (см., например, [14]).

3. Асимптотика собственных значений. Найдем асимптотику собственных значений задачи (6)-(10). Положим, что $g = const > 0$. Прямое вычисление показывает, что:

$$y_3(\lambda, x) = \frac{\operatorname{ch}(z_2 x)}{(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\operatorname{ch}(z_1 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)}, \tag{14}$$

$$y_4(\lambda, x) = \frac{\operatorname{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\operatorname{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)}, \tag{15}$$

где

$$z_1 = \sqrt{\lambda}(1+\frac{g}{4\lambda}-\frac{ik}{4\lambda})+o(\frac{1}{\lambda}), \tag{16}$$

$$z_2 = i\sqrt{\lambda}(1-\frac{g}{4\lambda}-\frac{ik}{4\lambda})+o(\frac{1}{\lambda}). \tag{17}$$

Решение уравнения (6), которое удовлетворяет условиям (7), (8), (9), имеет вид

$$y = y_3^{(2)}(\lambda,l)\cdot y_4(\lambda,x) - y_4^{(2)}(\lambda,l)\cdot y_3(\lambda,x).$$

Подставляя его в краевое условие (10), получаем уравнение

$$\begin{gathered} y_3^{(2)}(\lambda,l)\cdot(-y_4^{(3)}(\lambda,l)-m\lambda^2 y_4(\lambda,l)+gy_4^{(1)}(\lambda,l)+i\lambda\beta y_4(\lambda,l))- \\ -y_4^{(2)}(\lambda,l)\cdot(-y_3^{(3)}(\lambda,l)-m\lambda^2 y_3(\lambda,l)+gy_3^{(1)}(\lambda,l)+i\lambda\beta y_3(\lambda,l))=0, \end{gathered}$$

или с учетом (14), (15), (16) и (17)

$$\begin{gathered}
\frac{g{z_2}^2\,(\mathrm{ch}\,(z_2\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}+\frac{g{z_1}^2\,(\mathrm{ch}\,(z_1\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}+\frac{m\lambda^2{z_2}^2\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,\mathrm{sh}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2\,z_1}+ \\
+\frac{m\lambda^2{z_1}^2\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)\,\mathrm{sh}\,(z_2\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2\,z_2}-\frac{i\lambda\,\beta\,{z_2}^2\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,\mathrm{sh}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2\,z_1}+\frac{{z_2}^4\,(\mathrm{sh}\,(z_2\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}+ \\
+\frac{i\lambda\,\beta\,z_2\;\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}+2\,\frac{{z_2}^2\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,{z_1}^2\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}-\frac{{z_1}^4\,(\mathrm{ch}\,(z_1\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}- \\
-\frac{{z_2}^4\,(\mathrm{ch}\,(z_2\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}-\frac{g{z_2}^2\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}-\frac{g{z_1}^2\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}- \\
-\frac{z_2\;\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,{z_1}^3\,\mathrm{sh}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}+\frac{{z_1}^4\,(\mathrm{sh}\,(z_1\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}-\frac{z_1\;\mathrm{sh}\,(z_1\,l)\,{z_2}^3\,\mathrm{sh}\,(z_2\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}- \\
-\frac{m\lambda^2 z_2\;\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}-\frac{m\lambda^2 z_1\;\mathrm{sh}\,(z_1\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}- \\
-\frac{g{z_2}^2\,(\mathrm{sh}\,(z_2\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}-\frac{g{z_1}^2\,(\mathrm{sh}\,(z_1\,l))^2}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}+\frac{i\lambda\,\beta\,z_1\;\mathrm{sh}\,(z_1\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}- \\
-\frac{i\lambda\,\beta\,{z_1}^2\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)\,\mathrm{sh}\,(z_2\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2\,z_2}+2\,\frac{gz_2\;\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,z_1\;\mathrm{sh}\,(z_1\,l)}{({z_2}^2-{z_1}^2)^2}=0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Найдем асимптотику корней уравнения (18). Для этого подставим в него:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}+A+\frac{B}{n}+\frac{C}{n^2}+\frac{D}{n^3}+O(\frac{1}{n^4}). \tag{19}$$

Тогда, приравнивая нулю коэффициенты перед степенями $1/n$ в (19), получим:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{\pi^2 n}{2l^2} + \frac{\pi^2}{16l^2} + \frac{ik}{2} + \frac{g}{2} + \frac{1}{lm} - \frac{1}{2\pi n m^2} -$$

$$-\frac{g}{2\pi n} + \frac{1}{8\pi n^2 m^2} + \frac{g}{8\pi n^2} - \frac{1}{4\pi^2 m^2 n^2} + \frac{lg}{2\pi^2 m n^2} - \frac{l^2 g^2}{8\pi^2 n^2} - \frac{l^2 k^2}{8\pi^2 n^2} + \tag{20}$$

$$+\frac{l}{6\pi^2 m^3 n^2} - \frac{il}{\pi^2 n^2}(\frac{lkg}{4} + \frac{\beta}{m^2} + \frac{k}{m}) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

4. Выводы. В представленной работе исследована задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня с грузом на конце, находящегося под влиянием вязкого трения. Описана теоретико-операторная трактовка этой задачи. Доказано, что оператор A самосопряженный, неотрицательный и оператор G симметричен. Показано, что спектр пучка $L(\lambda)$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Из формулы (20) видно, что по спектру задачи последовательно можно найти параметры задачи l, k, g, m, β, т.е. решить обратную задачу для $g = const$.

1. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. – [2-е изд.]. – М.-Л.: ОНТИ ГТТИ, вып. 1. – 1934. – 172 с.
2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 532 с.
3. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
4. *Griniv R.O., Shkalikov A.A.* On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping // Matematicheskie Zametki. – 1994. – V. 56, № 2. – P. 114-131.
5. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // Труды СПб матем. общества. – 1998. – С. 3-33.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1968. – 503 с.
7. *Amara J.B.* Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions // Functional Analysis and its Applications V.Kadets and W.Zelazko. North-Holland Mathematics Studies. – 2004. – 197. – P. 49-58.
8. *Takemura Kazuo, Kametaka Yochinori, Nagai Atsushi, N.D. Kopachevsky* Pozitivity and hierarchical structure of Green functions for bending of a beam: boundary value problems with boundary conditions of not simple type // Far East J.Math. Sci. – 2007. – V. 25 , № 12. – P. 201-230.
9. *Яковлев А.В.* Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского.– 2006. – Т. 2, № 15 (54). – С. 105-114.
10. *Möller M., Pivovarchik V.* Spectral Properties of a Fourth Order Differential Equation // Zeitschrift f ur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications. European Mathematical Society. V. – 2006. – 25. – P. 341-366.
11. *Gorokhova I.V.* Small transversal vibrations of elastic rod with point mass at one end subject to viscous friction // Журн.матем.физ.,анал.,геом. – 2009. – 5:4. – P. 375-385.
12. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
13. *Krein M.G., Langer H.* On sone mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua I, II // Integral Equations Operator Theory. – 1978. – V. 3. – P. 364-399, P. 539-566.
14. *V.N. Pivovarchik* On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with onedimensional linear part // Укр. матем. ж. – 2007. – Т. 59. – С. 702-715.

I. V. Gorokhova, N. A. Rozhenko

Action of the viscous friction on small transversal vibrations of the rod with one loaded end.

A spectral problem describing small transversal vibrations of an elastic rod with a concentrated mass (bead) at the right end under viscous friction is considered. The left end is hinge joined. Location of the spectrum of such a problem is described and asymptotic formula of the eigenvalues is provided.

Keywords: *eigenvalues, operator pencil, boundary conditions.*

І. В. Горохова, Н. О. Роженко

Дія в'язкого тертя на малі поперечні коливання пружного стержня з зосередженною масою на кінці.

Розглянуто спектральну задачу, пов'язану з описом малих поперечних коливань пружного стержня з зосередженою масою на кінці під дією в'язкого тертя. Лівий кінець стержня закріплений жорстко без тертя. Правий кінець несе зосереджену масу. Описано розташування спектра такої задачі та отримано асимптотичну формулу на власні значення.

Ключові слова: *власні значення, операторний пучок, крайові умови.*

Южноукраинский национальный педагогический ун-т им. К.Д. Ушинского, Одесса
Одесский национальный ун-т им. И.И. Мечникова
e-mail-i.gorochova@rambler.ru
e-mail-mainatasha@mail.ru

Получено 20.09.11