УДК 517.5

©2011. **Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов**

# О ВЗАИМОСВЯЗИ КОЛЬЦЕВЫХ И НИЖНИХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА ГРАНИЦЕ

В данной работе рассмотрены нижние и кольцевые $Q$-гомеоморфизмы на гладких римановых многообразиях и установлена их взаимосвязь на границе.

***Ключевые слова:*** *нижние и кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, гладкие римановы многообразия.*

**1. Введение.** В настоящее время математические науки тесно контактируют с многообразиями. В алгебре – это группы Ли, в экономике – поверхности безразличия, в механике – фазовые пространства и уровни энергии, в теории относительности – пространство-время. В современной математике различают топологические и гладкие многообразия. Это связано с теми или иными возможностями согласования систем координат, заданных на отдельных участках многообразия. Участки многообразия могут пересекаться, и пересечения получают таким образом различные системы координат, при этом каждая система координат может быть связана через другую непрерывным или гладким (дифференцируемым) преобразованием, [4]. В первом случае многообразие называют топологическим, во втором – гладким. В нашей работе рассматриваются лишь гладкие римановы многообразия.

Параллельно теории многообразий длительное время развивалась теория отображений в рамках конформных и квазиконформных отображений. Бельтрами, Каратеодори, Кристоффель, Гаусс, Риман и другие внесли свой вклад в развитие этой теории. В последнее время активно развивалась теория так называемых $Q$-гомеоморфизмов. В препринте [2], а затем в статье [3] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения $Q$-гомеоморфизмов. Основной целью теории $Q$-гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения $f$ и свойств мажоранты $Q(x)$ в модульном неравенстве. Высокий уровень абстракции теории $Q$-отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удается установить оценку модуля с подходящей функцией $Q(x)$, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе, к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [8] и [12].

В последние годы активно изучаются кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, мотивированные кольцевым определением квазиконформности по Герингу в [6], которые были впервые введены на плоскости в связи с изучением уравнений Бельтрами, см., напр., [17], а затем и в пространстве, см. [16]. Впоследствии понятие кольцевого гомеоморфизма было распространено в граничные точки областей на плоскости в работах [18] и [19]. Весьма полезным инструментом в исследованиях отображений с конечным искажением по Иванцу оказались также нижние $Q$-гомеоморфизмы, введенные в работе [10]. Отметим, что кольцевые и нижние $Q$-гомеоморфизмы сами являются отображениями с конечным искажением в смысле геометрического определения.

Напомним некоторые определения, относящиеся к теории многообразий, которые можно найти, напр., в [9], [11], [13] и [15]. *$n$-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ – это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара $(U, \varphi)$, где $U$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а $\varphi$ – гомеоморфное отображение подмножества $U$ на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из $n$ чисел, ее *локальных координат*. *Гладкое многообразие* – многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким $(C^\infty)$ образом.

*Римановым многообразием* $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданной на нем римановой метрикой, т.е. положительно определенным симметричным тензорным полем $g = g_{ij}(x)$, которое задается в координатных картах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x))\ \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\ \frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Тензорное поле $g_{ij}(x)$ в дальнейшем также подразумевается гладким.

*Элемент длины* на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j,$$

где $g_{ij}$ – метрический тензор, $x^i$ – локальные координаты. *Геодезическое расстояние* $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кривых, соединяющих точки $p_1$ и $p_2$ в $(\mathbb{M}^n, g)$, см. [11], с. 94. Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой

$$dv = \sqrt{det g_{ij}}\ dx^1 ... dx^n,$$

см., напр., § 88 в [15]. Заметим, что $det\ g_{ij} > 0$ в силу положительной определенности $g_{ij}$, см. напр., [5], с. 277.

Заметим также, что *элемент площади* гладкой гиперповерхности $H$ на $(\mathbb{M}^n, g)$ можно задать инвариантной формой

$$d\mathcal{A} = \sqrt{det\ g^*_{\alpha\beta}}\ du_1 ... du_{n-1}, \tag{2}$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ – риманова метрика на $H$, порожденная исходной римановой метрикой $g_{ij}$ по формуле:

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u)) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \tag{3}$$

где $x(u)$ – гладкая параметризация поверхности $H$ с $\nabla_u x \neq 0$, ср., напр., § 88 в [15].

Напомним, что геодезическая сфера в достаточно малой окрестности произвольной точки гладкого риманового многообразия – гладкая поверхность, см. [11], с. 106.

Для нас важны следующие фундаментальные факты, см., напр., лемму 5.10 и следствие 6.11 в [11], а также [9], с. 260-261.

Предложение 1. В каждой точке гладкого риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка отрезков лучей, исходящих из начала координат.

Окрестности и координаты, указанные в предложении 1, принято называть *нормальными*.

Замечание 1. В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор $g$ в начале этих координат совпадает с единичной матрицей, см., напр., предложение 5.11 в [11], а ввиду его непрерывности $g$ произвольно близок к единичной матрице в достаточно малых окрестностях нуля.

Борелеву функцию $\rho : \mathbb{M}^n \to [0, \infty]$ называем *допустимой* для семейства $k$-мерных поверхностей $\Gamma$ в $\mathbb{M}^n$, $k = 1, 2, ..., n-1$, пишем $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geq 1$$

для любого $S \in \Gamma$. *Модуль семейства* $\Gamma$ есть величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in adm \Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n \; dv.$$

Далее говорим, что некоторое свойство $P$ имеет место для п.в. (почти всех) $S \in \Gamma$, если модуль подмножества $\Gamma_*$ тех $S \in \Gamma$, для которых свойство $P$ нарушается, равен нулю.

Аналогично [12], измеримую относительно меры объема $v$ функцию $\rho : \mathbb{M}^n \to [0, \infty]$ называем *обобщенно допустимой* для семейства $\Gamma$, состоящего из $k$-мерных поверхностей $S$ в $\mathbb{M}^n$, пишем $\rho \in ext\,adm\,\Gamma$, если условие допустимости выполнено для п.в. $S \in \Gamma$.

Здесь мы говорим также, что семейство $\Gamma_1$ *минорируется* с семейством $\Gamma_2$, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для любой $S \in \Gamma_1$ найдется $S' \in \Gamma_2$ такая, что $\mathcal{A}_S(B) \geq \mathcal{A}_S{}'(B)$ для любого борелевского множества $B$ в $\mathbb{M}^n$. Как известно, тогда $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, см., напр., [22].

В дальнейшем, для множеств $A, B$ и $C$ на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, символом $\Delta(A, B; C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих $A$ и $B$ в $C$, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a, b)$.

Всюду далее мы предполагаем, что $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ – гладкие римановы многообразия. В дальнейшем подразумевается, что геодезические сферы $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = \varepsilon\}$, геодезические шары $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ и геодезические кольца $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ лежат в нормальной окрестности точки $x_0$.

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением Геринга для квазиконформных отображений в [6], было впервые введено в $\mathbb{R}^n$, см. статью [10], а также монографию [12].

Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, соответственно, и пусть $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D_*$ называется *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если условие

$$M\left(\Delta(f(C),\, f(C_0); D_*)\right) \;\leq \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \tag{4}$$

выполняется для любого геодезического кольца $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \infty$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $C \subset \overline{B(x_0,\, \varepsilon)} \cap D$ и $C_0 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$ и любой измеримой функции $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1. \tag{5}$$

Будем также говорить, что $f$ является *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом* в $D$, если (4) выполнено для всех точек $x_0 \in \overline{D}$.

Пусть даны области $D$ и $D_*$ на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, соответственно, и измеримая функция $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$. Следуя [10], см. также [12], гомеоморфизм $f : D \to D_*$ будем называть *нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если существует $\delta_0 \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$, такое что для всякого $\varepsilon_0 < \delta_0$ и геодезических колец $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, выполнено условие

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \;\geq \inf_{\rho \,\in\, ext\ adm\, \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dv(x), \tag{6}$$

где через $\Sigma_\varepsilon$ обозначено семейство всех пересечений с областью $D$ геодезических сфер $S(x_0, r), r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D_*$ является *нижним $Q$-гомеоморфизмом в области* $D$, если $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

**2. Характеризация нижних Q-гомеоморфизмов.** Аналог следующего критерия нижних $Q$-гомеоморфизмов был получен ранее в $\mathbb{R}^n$, см. теорему 2.1 в [10], а затем и на гладких многообразиях, см. теорему 4.1. в [1].

**Лемма 1.** *Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, *соответственно,* $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ *– измеримая функция, и пусть*

$x_0 \in \overline{D}$. *Гомеоморфизм* $f : D \to D_*$ *является нижним* $Q$*-гомеоморфизмом в точке* $x_0$ *тогда и только тогда, когда для любой нормальной окрестности* $B(x_0, \varepsilon_0)$ *точки* $x_0$ *с* $\varepsilon_0 < d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \ \geq \ \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||\,Q||_{\,n-1}(x_0, r)} \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{7}$$

*где* $\Sigma_\varepsilon$ *– семейство всех пересечений с областью* $D$ *геодезических сфер* $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, *и*

$$||\,Q||_{\,n-1}(x_0, r) = \left( \int\limits_{D(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\ d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{8}$$

*–* $L^{n-1}$*-норма* $Q$ *по* $D(x_0, r) = \{x \in D : d(x, x_0) = r\} = D \cap S(x_0, r)$.

Также будет полезно следующее утверждение, см. лемму 4.1 в [1].

**Лемма 2.** *Пусть* $D$ *и* $D_*$ *– области на гладких римановых многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geq 2$, $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ *– измеримая функция и* $f : D \to D_*$ *– нижний* $Q$*-гомеоморфизм в точке* $x_0 \in \overline{D}$. *Тогда*

$$M\left(\Delta(f(S), f(S_0); D_*)\right) \leq cI^{1-n}, \tag{9}$$

*где* $S = S(x_0, \varepsilon)$ *и* $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $B(x_0, \varepsilon_0)$ *– нормальная окрестность точки* $x_0$,

$$I = I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||Q||_{n-1}(x_0, r)}, \tag{10}$$

$||Q||_{n-1}(x_0, r)$ *определено в (8), а константа с произвольно близка к 1 в достаточно малых окрестностях точки* $x_0$.

Замечание 2. В частности, ввиду гомеоморфности $f$, из неравенства (9) следует, что $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) \neq \infty$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в нормальной окрестности точки $x_0$.

**3. Связь нижних Q-гомеоморфизмов с кольцевыми.** В дальнейшем мы придерживаемся стандартных соглашений, что $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$, если $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$, см., напр., [20].

**Лемма 3.** *Пусть* $D$ *– область на гладком римановом многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ *– геодезическое кольцо,* $B(x_0, \varepsilon_0)$ *– нормальная окрестность точки* $x_0$ *и пусть* $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ *– измеримая функция,* $Q \in L^{n-1}_{loc}(D)$. *Полагаем*

$$\eta_0(t) = 1/I \cdot \|Q\|_{n-1}(x_0, t),$$

*где* $\|Q\|_{n-1}(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ *и* $I = I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ *определены в (8) и (10), соответственно. Тогда*

$$I^{1-n} = \int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x) \cdot \eta_0^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x)\cdot\eta^n\left(d(x,x_0)\right)dv(x) \tag{11}$$

*для любой измеримой функции* $\eta:(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta(r)dr=1. \tag{12}$$

*Доказательство.* В дальнейшем мы пользуемся тем обстоятельством, что по замечанию 1 элементы объема и площадей на геодезических сферах в нормальных окрестностях точки $x_0$ эквивалентны евклидовым с коэффициентом эквивалентности произвольно близким к единице, а радиусы геодезических сфер $S(x_0,r)$ совпадают с евклидовыми в достаточно малых окрестностях, см. также (2) и (3).

Если $I=\infty$, то левая часть соотношения (11) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I=0$, то $\|Q\|_{n-1}(x_0,r)=\infty$ для п.в. $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$ и обе части неравенства (11) равны бесконечности по теореме Фубини и замечанию 1. Пусть теперь $0<I<\infty$. Тогда $\|Q\|_{n-1}(x_0,r)\neq 0$ и $\eta_0(r)\neq\infty$ п.в. в $(\varepsilon,\varepsilon_0)$. Полагая

$$\alpha(r)=\eta(r)\cdot\|Q\|_{n-1}(x_0,r)$$

и

$$\omega(r)=[\|Q\|_{n-1}(x_0,r)]^{-1},$$

по стандартным соглашениям будем иметь, что $\eta(r)=\alpha(r)\omega(r)$ п.в. в $(\varepsilon,\varepsilon_0)$ и что

$$L:=\int\limits_{A\cap D} Q_*(x)\cdot\eta^n\left(d(x,x_0)\right)\ dv(x)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\alpha^n(r)\omega(r)\ dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см. теорему 2.6.2 в [14], к выпуклой функции $\varphi(t)=t^n$, заданной в интервале $\Omega=(\varepsilon,\varepsilon_0)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E)=\frac{1}{I}\int\limits_E\omega(r)\ dr,$$

получаем, что

$$\left(⨍\alpha^n(r)\omega(r)dr\right)^{\frac{1}{n}}\geq ⨍\alpha(r)\omega(r)\ dr=\frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r)=\alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (12). Таким образом,

$$L\geq\frac{1}{I^{n-1}},$$

что и доказывает (12). $\square$

**Следствие 1.** *При условиях и обозначениях лемм 1–3,*

$$M(\Delta(f(S), f(S_0); D_*)) \leq c \int\limits_{A\cap D} Q^{n-1}(x)\ \eta^n(d(x, x_0))\ dv(x), \tag{13}$$

*где* $S = S(x_0, \varepsilon)$ *и* $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$.

Следующая теорема устанавливает связь между нижними и кольцевыми $Q$-гомеоморфизмами.

**Теорема 1.** *Пусть* $D$ *и* $D_*$ *– области на гладких римановых многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geq 2$, *соответственно, и пусть* $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ *– измеримая функция,* $Q \in L^{n-1}_{loc}(D)$. *Если* $f : D \to D_*$ *– нижний* $Q$*-гомеоморфизм в точке* $x_0 \in \overline{D}$, *то* $f$ *является кольцевым* $Q_*$*-гомеоморфизмом в точке* $x_0$ *с* $Q_*(x) = c \cdot Q^{n-1}(x)$, *где константа* $c$ *может быть выбрана произвольно близкой к 1.*

*Доказательство.* Действительно, пусть $C$ и $C_0$ – произвольные континуумы в $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap D$ и $D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $B(x_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки $x_0$.

Поскольку семейство кривых $\Delta(f(C), f(C_0); D_*)$ минорируется семейством $\Delta(f(S), f(S_0); D_*)$, где $S = S(x_0, \varepsilon)$ и $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$, то

$$M(\Delta(f(C), f(C_0); D_*)) \leq M(\Delta(f(S), f(S_0); D_*)),$$

и заключение теоремы получается из следствия 1. $\square$

Таким образом, в статье доказан фундаментальный результат (теорема 1), в котором установлено, что на гладких римановых многообразиях любой нижний $Q$-гомеоморфизм является кольцевым $Q_*$-гомеоморфизмом с $Q_* = c \cdot Q^{n-1}$.


1. *Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Об отображениях в классах Орлича-Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вестник. – 2011. – Т. 8, № 3. – С. 319-342.
2. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. – 2000. – № 256. – 22 pp.
3. *Bishop C.J., Gutlyanski V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – V. 22. – P. 1397-1420.
4. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию // М: Наука, Физматлит. – 1995.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц // М.: Наука. – 1966.
6. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353-393.
7. *Ziemer W.P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 126, № 3. – P. 460-473.
8. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis // Oxford: Clarendon Press. – 2001.
9. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере // М.: МГУ. – 1960.
10. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории нижних $Q$-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 159-84.
11. *Lee J.M.* Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature // New York: Springer. – 1997.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer. – 2009.
13. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия // М.: Изд-во МГУ. – 1990.

14. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane // Cambridge: Univ. Press. – 1995.
15. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ // М.: Гос. изд. тех.-теор. лит. – 1953.
16. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q$-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 6. – С. 1361-1376.
17. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, № 1. – С. 97-115.
18. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – V. 55, № 1-3. – P. 219-236.
19. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. 2009. – № 1. – P. 127-137.
20. *Сакс С.* Теория интеграла // М.: ИЛ. – 1949.
21. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – № 98. – P. 171-219.
22. *Hesse J.* A $p$-extremal length and $p$ – capacity equality // Ark. Mat. – 1975. – V. 13. – P. 131-144.

**O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov**

**About relationship between ring and lower $Q$-homeomorphisms on the boundary.**

In this article lower and ring $Q$-homeomorphisms on the smooth Riemannian manifolds are considered and its relationship become established.

***Keywords:*** *lower and ring Q-homeomorphisms, smooth Riemannian manifolds.*

**О. С. Афанасьєва, Р. Р. Салімов**

**Про взаємозв'язки кільцевих та нижніх $Q$-гомеоморфізмів на межі.**

У даній роботі розглянуто нижні та кільцеві $Q$-гомеоморфізми на гладких ріманових многовидах і встановлено їх взаємозв'язок на межі.

***Ключові слова:*** *нижні та кільцеві Q-гомеоморфізми, гладкі ріманові многовиди.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
es.afanasjeva@yandex.ru
ruslan623@yandex.ru

*Получено 10.11.11*