

УДК 539.3:534.1

©2011. Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ И С ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ ТОРЦАМИ

В трехмерной постановке рассмотрена задача об установившихся колебаниях трехслойных изотропных пластин с покрытыми диафрагмой плоскими гранями. На границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Проведены асимптотический анализ и численные исследования дисперсионного уравнения. Представлены диаграммы спектральных кривых, графики изменения фазовых и групповых скоростей.

Ключевые слова: трехслойная пластина, скользящий контакт, установившиеся колебания, метод однородных решений, дисперсионные спектры, фазовые и групповые скорости.

1. Введение. История развития теорий поперечно-неоднородных упругих пластин, подходов и методов решения конкретных задач отражена в обзорных статьях [1-4] и монографиях, например, [5, 6]. Данные и другие современные публикации свидетельствуют о том, что большинство научных результатов получено с использованием приближенных теорий. Поэтому актуальным для науки и практических приложений является изучение напряженного состояния и волновых полей в слоистых пластинах на основе уравнений трехмерной теории упругости.

Важную роль в решении трехмерных задач статики и динамики неоднородных пластин сыграли однородные решения [7-12], предложенные в работе [13]. В работе [10] впервые полуобратным методом [14] получена полная система однородных решений уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной плиты симметричного строения. Исследованию свойств однородных решений неоднородных плит посвящены работы [5, 11].

Колебания трехслойной пластины в случае идеального контакта слоев для различных граничных условий на торцах исследовались с использованием однородных решений в работах [7-9]. Однако в горной механике существует понятие поверхностей ослабленного механического контакта [15]. В частности, на границе слоев может иметь место условие полного проскальзывания при неразрывности нормальных компонент смещений и напряжений [16, 17]. Такой контакт уже нельзя считать идеальной состыковкой сред. Для кососимметричных колебаний трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев получены однородные решения в работе [12].

В настоящей работе на основе метода однородных решений в трехмерной постановке рассмотрена задача о гармонических изгибных колебаниях трехслойной пластины, плоские грани которой покрыты диафрагмой, с учетом скользящего контакта слоев.

2. Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину толщиной $2h$ сим-

метричного строения относительно срединной плоскости. Внешние одинаковые и внутренний слой пластины находятся в условиях скользящего контакта и являются изотропными. Плоские грани пластины покрыты диафрагмой, а кососимметричные колебания вызваны внешними гармонически изменяющимися во времени усилиями, приложенными к боковой поверхности. Отнесем пластину к безразмерным прямоугольным координатам x_1, x_2, x_3 , причем срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью Ox_1x_2 . Величины, относящиеся к внешним слоям, имеют индекс (1), к внутреннему – индекс (2). Обозначим через h_1 толщину внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщину внутреннего слоя, а физико-механические характеристики материалов слоев – через $\tilde{G}_m, \rho_m, \nu_m$ ($m = 1, 2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига, ρ_m – плотность материала, а ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя. Введем безразмерные величины и координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, & x_2 &= \tilde{x}_2/R, & x_3 &= \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), & \lambda &= h/R, & h &= h_1 + h_2, \\ \lambda_1 &= h_1/h, & \lambda_2 &= h_2/h, & u_{i(m)} &= \tilde{u}_{i(m)}/R, & \sigma_{ij(m)} &= \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2), \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, & G_1 &= G & (i, j &= \overline{1, 3}, m = 1, 2). \end{aligned}$$

Построение однородных решений рассматриваемой задачи сводится к интегрированию известных систем уравнений движения для каждого слоя

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{j(m)} + \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом краевых условий

$$\begin{aligned} u_{j(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, & \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, \\ u_{3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), & \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{j3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0, & \sigma_{j3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работах [7-9].

3. Однородные решения задачи. Значения векторов перемещений представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3).$$

Вихревое решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \\ u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), & u_{3(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p_{(1)k}(x_3) &= \cos l_{(1)k}(x_3 - \lambda_2), \quad p_{(2)k}(x_3) = 0, \quad \text{когда} \quad \cos l_{(1)k}\lambda_1 = 0, \\
 p_{(1)k}(x_3) &= 0, \quad p_{(2)k}(x_3) = l_{(2)k}^{-1} \sin l_{(2)k}x_3, \quad \text{когда} \quad \cos l_{(2)k}\lambda_2 = 0; \\
 l_{(m)k}^2 &= \Omega_m^2 + \delta_k^2, \quad D^2 B_k(x_1, x_2) = (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

Потенциальное решение введем с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 u_{j(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\
 u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Из выражений (1)-(3) следует

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций $n_{(m)}(x_3)$, $q_{(m)}(x_3)$ и параметра разделения переменных γ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}
 n_{(m)}'' + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' &= 0, \\
 q_{(m)}'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)} + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda(1 + \nu_{0(m)})} n_{(m)}' &= 0;
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 n_{(1)}(1) &= 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(\lambda_2) = 0, \\
 q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(2)}'(\lambda_2) &= 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2), \\
 \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(1) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(1) &= 0, \\
 G [\gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(\lambda_2)] &= \\
 = \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q_{(2)}'(\lambda_2).
 \end{aligned}$$

Общим решением системы (4) являются функции

$$\begin{aligned}
 n_{(1)}(x_3) &= H_1 \cos \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + H_2 \sin \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + \\
 &+ H_3 \cos \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2) + H_4 \sin \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2), \\
 q_{(1)}(x_3) &= Q_1 \sin \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + Q_2 \cos \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + \\
 &+ Q_3 \sin \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2) + Q_4 \cos \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2), \\
 n_{(2)}(x_3) &= H_5 \sin \gamma_{1(2)}x_3 + H_6 \sin \gamma_{2(2)}x_3, \\
 q_{(2)}(x_3) &= Q_5 \cos \gamma_{1(2)}x_3 + Q_6 \cos \gamma_{2(2)}x_3.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1(m)}^2 &= k_m^2 \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad \gamma_{2(m)}^2 = \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad k_m^2 = (1 - 2\nu_m)/(2 - 2\nu_m); \\
 Q_i &= \lambda^{-1} a_i H_i \quad (i = \overline{1, 6}), \quad a_1 = -\gamma_{1(1)}, \quad a_2 = \gamma_{1(1)}, \\
 a_3 &= -\gamma^2/\gamma_{2(1)}, \quad a_4 = \gamma^2/\gamma_{2(1)}, \quad a_5 = \gamma_{1(2)}, \quad a_6 = \gamma^2/\gamma_{2(2)}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты H_i имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \left(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2 \right) \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_2 &= -\gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \left(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2 \right) \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_3 &= -2\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_4 &= 2\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_5 &= -\gamma_{1(1)} \Omega_1^2 \left(\gamma^2 + \gamma_{2(2)}^2 \right) \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_6 &= 2\gamma_{1(1)} \gamma_{1(2)} \gamma_{2(2)} \Omega_1^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2, \end{aligned}$$

а для нахождения собственных значений γ получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} F(\gamma, \Omega) &\equiv \frac{\eta}{G} \gamma_{1(1)} C_{11} C_{21} (\xi_2 S_{12} C_{22} - \tau_2 C_{12} S_{22}) + \\ &+ G (\xi_1 S_{11} C_{21} - \tau_1 C_{11} S_{21}) \gamma_{1(2)} C_{12} C_{22} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \rho_1 / \rho_2, \quad \xi_m = \left(\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2 \right)^2, \quad \tau_m = 4\gamma^2 \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)}, \\ S_{jm} &= \sin \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad C_{jm} = \cos \gamma_{j(m)} \lambda_m \quad (j, m = 1, 2). \end{aligned}$$

Важной характеристикой колебаний являются частоты запираания [18]. Для их определения полагаем в (5) $\gamma = 0$ и получаем трансцендентное уравнение

$$F(0, \Omega) \equiv (G k_2 \Omega_1 s_{11} c_{12} + k_1 \Omega_2 c_{11} s_{12}) c_{21} c_{22} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} s_{1m} &= \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m), \\ c_{1m} &= \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m). \end{aligned}$$

Уравнение (6) определяет три независимые серии частот запираания. Причем частоты второй и третьей серий находятся в явном виде и не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 в отличие от частот первого семейства.

4. Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения. Для определения корней дисперсионного уравнения (5) важным является поиск точек их пересечения с плоскостью $\Omega = 0$. Предельный переход к задаче статики осуществляется с помощью разложения функции $F(\gamma, \Omega)$, порождающей дисперсионное уравнение, в ряд Тейлора в окрестности точки $\Omega = 0$. Если $\Omega \rightarrow 0$, тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$F(\gamma, 0) \equiv (1 - \nu_1) \cos^2 \gamma \lambda_1 (\sin 2\gamma \lambda_2 - 2\gamma \lambda_2) + G (1 - \nu_2) (\sin 2\gamma \lambda_1 - 2\gamma \lambda_1) \cos^2 \gamma \lambda_2 = 0,$$

а в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ – к уравнению

$$F(\gamma, 0) \equiv (\sin \gamma - \gamma) \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 0,$$

корни которого не зависят от параметров ν_1 , ν_2 , G . Серия действительных корней последнего уравнения состоит из двукратных.

Для данного вида колебаний в особом положении оказывается первая мнимая ветвь дисперсионного спектра уравнения (5), проходящая через начало координат $\gamma = 0$, $\Omega = 0$. Соответствующая дисперсная мода оказывается распространяющейся при любой частоте Ω . Для анализа скоростей этой моды при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионное уравнение (5) за счет малости величин $v = \text{Im}\gamma$ и Ω . При этом для безразмерной фазовой скорости $v_p = c_p/c_{S2} = \Omega_2/v$ имеем

$$v_p = 2v \sqrt{\frac{G\lambda_1^3(1-k_1^2) + \lambda_2^3(1-k_2^2)}{3(\eta\lambda_1 + \lambda_2)}}.$$

Из последнего выражения и соотношения [18]

$$v_g = v_p + v \frac{dv_p}{dv}$$

следует, что значение безразмерной групповой скорости v_g для данного случая определяется равенством

$$v_g = 2v_p.$$

При $\gamma = 0$ находим

$$v_p(0) = v_g(0) = 0.$$

Таким образом, в низкочастотном диапазоне кососимметричная волна обладает дисперсией, и ее групповая скорость вдвое превосходит фазовую.

При $\gamma \rightarrow \infty$ из (5) для первой бегущей моды получаем уравнение

$$r_1 \frac{\eta}{G} \left((1 + s_2^2)^2 - 4r_2 s_2 \right) + G r_2 \left((1 + s_1^2)^2 - 4r_1 s_1 \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$r_m = \sqrt{1 - c^2/c_{Pm}^2}, \quad s_m = \sqrt{1 - c^2/c_{Sm}^2},$$

c_{Pm} , c_{Sm} – соответственно скорости продольных и поперечных волн в m -м слое.

Уравнение (7) совпадает с известным [19] для нахождения скорости c_{St} волны Стоунли вблизи поверхности раздела двух упругих полупространств с условиями проскальзывания по поверхности контакта. Поэтому для коротких волн границы пластины не влияют на характер волнового процесса и вид граничных условий на торцах не имеет значения.

В результате фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом высокочастотном пределе значение скорости поверхностной волны Стоунли. Для остальных ветвей при $\gamma \rightarrow \infty$ получаем

$$c = \min \{c_{S1}, c_{S2}\}.$$

Рассмотрим случай соотношений параметров упругости в слоях: $G = 1$, $\eta = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Тогда дисперсионное уравнение (5) имеет вид

$$C_1 C_2 \left((\gamma^2 + \gamma_2^2)^2 S_1 C_2 - 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 C_1 S_2 \right) = 0, \quad (8)$$

где

$$\gamma_1^2 = \gamma^2 + k^2 \Omega^2, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2, \quad k^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}, \quad S_j = \sin \frac{1}{2} \gamma_j, \quad C_j = \cos \frac{1}{2} \gamma_j.$$

Из уравнения (8) получается предельное соотношение, описывающее асимптотическое значение фазовой скорости первой моды на высоких частотах, к которому должны стремиться численные решения этого уравнения. Уравнение (8) сводится к уравнению для скорости волны Рэлея

$$(2 - v_p^2)^2 - 4\sqrt{1 - k^2 v_p^2} \sqrt{1 - v_p^2} = 0.$$

Таким образом, безразмерная фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом пределе значение безразмерной скорости волны Рэлея $v_R = c_R/c_S$ и величина v_p остается меньше v_R .

Спектр частот запираания мод уравнения (8) получается таким

$$\Omega^* = \{p\pi/k; (2p - 1)\pi\}_{p=1}^{\infty}.$$

Здесь вторая серия частот запираания является двухкратной.

Если $G \rightarrow 0$ (внешний слой – мягкий), тогда из уравнения (5) следует

$$\cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 (\sin 2\gamma \lambda_2 - 2\gamma \lambda_2) = 0,$$

и дисперсионный спектр состоит из двух частей. Одна соответствует колебаниям внешних слоев, а другая – равновесию внутреннего слоя.

При $G \rightarrow \infty$ (внутренний слой – мягкий) из уравнения (5) имеем

$$(\sin 2\gamma \lambda_1 - 2\gamma \lambda_1) \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2 = 0.$$

Когда одно из $\lambda_{3-m} = 0$, дисперсионное уравнение (5) преобразуется к виду

$$\left(\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2 \right)^2 \sin \gamma_{1(m)} \cos \gamma_{2(m)} - 4\gamma^2 \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)} \cos \gamma_{1(m)} \sin \gamma_{2(m)} = 0.$$

5. Анализ результатов численных исследований. Пусть внешние слои пластины изготовлены из алюминия и характеризуются параметрами среды $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_1 = 0,35$, $c_{S1} = 3110$ м/с, а внутренний – из вольфрама: $\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_2 = 0,29$, $c_{S2} = 2860$ м/с. Расчеты производились для варианта $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. При этом входящие в уравнение (5) частоты Ω_1 , Ω_2 , Ω связаны соотношениями

$$\Omega_1 = \Omega c_{S2}/c_{S1}, \quad \Omega_2 = \Omega.$$

Дисперсионное уравнение (5) определяет счетное множество спектральных кривых – зависимостей безразмерной частоты Ω от параметра γ .

На рис. 1 представлен полный дисперсионный спектр кососимметричных колебаний пластины. На диаграмме сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ($\text{Re}\gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im}\gamma, \Omega$) плоскости. Дисперсионное уравнение (5) при фиксированной частоте имеет конечное число мнимых корней, счетное множество действительных и комплексных корней.

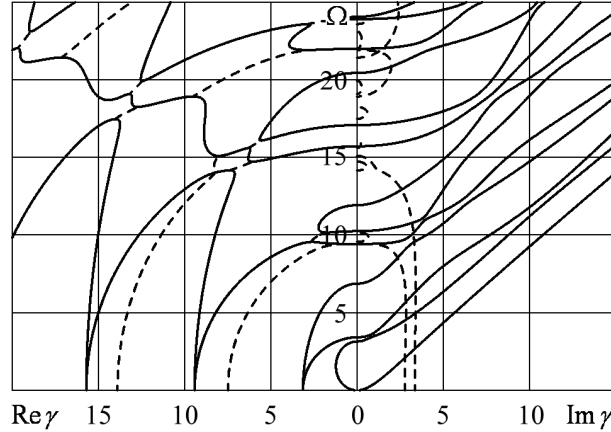


Рис. 1. Полный дисперсионный спектр изгибных мод в трехслойной пластине

На рис. 2 показаны зависимости безразмерных фазовых $v_p = c_p/c_{S2}$ (рис. 2, а) и групповых $v_g = c_g/c_{S2}$ (рис. 2, б) скоростей первых трех распространяющихся мод. Сплошные кривые соответствуют диафрагме, штриховые – свободным от на-

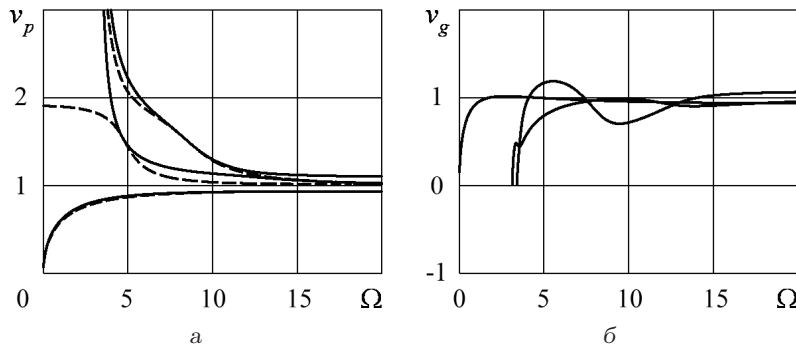


Рис. 2. Зависимость безразмерных фазовых и групповых скоростей изгибных мод от безразмерной частоты Ω

пряжений плоским граням [12]. Вблизи частот запирания фазовая скорость $c_p \rightarrow \infty$, а групповая $c_g = 0$. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными, и значения групповой скорости мало отличаются от значений фазовой. Фазовая скорость первой моды для обоих

видов граничных условий отличается незначительно. Однако вид граничных условий на лицевых плоскостях оказывает значительное влияние на характер изменения фазовой скорости второй моды в диапазоне средних частот (рис. 2, *a*). На графиках имеются точки касания кривых. Это свидетельствует о равенстве фазовых и, как следствие, групповых скоростей мод для различных граничных условий на лицевых плоскостях пластины.

На основании уравнения (6) в таблице приведены первые пятнадцать частот запираания. Столбец с номером 1 соответствует граничным условиям типа диафрагмы, столбец 2 – свободным от напряжений плоских граней [12]. Значения частот запираания уравнения (6) для слоев из одинаковых материалов ($\nu = 0, 29$) представлены в столбце 3, которые свидетельствуют о том, что в такой пластине из-за неидеального контакта слоев невозможен переход к однородной.

Частоты запираания

Номер частоты	Значения частот запираания		
	1	2	3
1	3,1415927	3,1415927	3,1415927
2	3,4147847	6,8295695	3,1415927
3	6,8637900	6,8637900	5,7765615
4	9,4247780	9,4247780	9,4247780
5	10,244354	11,916072	9,4247780
6	11,916072	13,659139	11,553123
7	15,707963	15,707963	15,707963
8	17,073924	20,433021	15,707963
9	20,433021	20,488708	17,329684
10	21,991149	21,991149	21,991149
11	23,903493	24,040633	21,991149
12	24,040633	27,318278	23,106246
13	28,274334	28,274334	28,274334
14	30,733063	33,419397	28,274334
15	33,419397	34,147847	28,882807

Анализ дисперсионных кривых, частот запираания, графиков изменения фазовых и групповых скоростей показывает, что по сравнению с аналогичными задачами для трехслойной пластины с идеальным контактом слоев [7-9] и скользящим контактом [12] происходят количественные и качественные изменения характеристик волнового процесса. В частности, в трехслойной пластине в области низких частот для кососимметричного случая появляются одновременно счетное множество действительных и одна мнимая моды, изменяются значения и количество частот запираания на интервале $0 \leq \Omega \leq 25$. Первая мнимая мода оказывается распространяющейся при любой частоте и в низкочастотном пределе обладает дисперсией. Для остальных ветвей групповая скорость на частотах запираания равна нулю, а фазовая стремится к бесконечности. Следует отметить, что возможно появление двукратных корней при $\Omega = 0$. Комплексные и действительные участки дисперсионных ветвей, начинающихся при $\text{Re}\gamma > 0$, пересекают плоскость $\Omega = 0$ и ось $\gamma = 0$ под прямым углом.

Уравнение (7) имеет вещественный корень, что указывает на существование по-

верхностной волны Стоунли вблизи плоскостей контакта слоев. Значение ее скорости v_{St} , отнесенной к c_{S2} , равно 0,936. В случае изгибных колебаний величина фазовой скорости v_p для первой моды в коротковолновом пределе остается меньше асимптотического значения v_{St} (рис. 2). Остальные кривые приближаются к асимптоте $v_p = 1$ сверху. Таким образом, в высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными.

6. Заключение. Таким образом, в данной работе предложен аналитический метод решения трехмерной задачи об упругих колебаниях трехслойных симметричного строения пластин при скользящем контакте слоев и с торцами, покрытыми диафрагмой. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний.

Собственные функции вихревого и потенциального решений находятся в явном виде. Для определения собственных значений получено дисперсионное уравнение в форме, приспособленной для численных исследований.

На основе численно-аналитических исследований дисперсионного уравнения изучены некоторые закономерности в распространении упругих волн в трехслойной пластине в зависимости от изменения физико-механических свойств материалов слоев, их относительных толщин и частот колебаний, вида однородных граничных условий на плоских гранях.

1. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
2. Шульга Н.А. Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15-56.
3. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review // Mechanics of composite materials. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243-252.
4. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Applied mechanics reviews. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287-308.
5. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов на Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
6. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
7. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями // Вісн. Донецьк. нац. ун-у. Сер. А. Природничі науки. – 2009. – № 1. – С. 117-124.
8. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146-153.
9. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3-10.
10. Ворович И.И., Кадомцев И.Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикл. математика и механика. – 1970. – Т. 34, № 5. – С. 870-876.
11. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755-758.
12. Фоменко М.В. Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 188-195.
13. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, № 2-3. – С. 151-168.

14. Ворович И.И., Малкина О.С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 2. – С. 230-241.
15. Краужлис П.В., Краужлис Л.А. Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Математические вопросы теории распространения волн. – 1988. – Вып. 18. – С. 113-122.
16. Заславский Ю.М., Митякова О.И. Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругий слой и полупространство в скользящем контакте // Акустический журнал. – 1992. – Т. 38, вып. 2. – С. 296-303.
17. Марчук А.В. Трехмерное аналитическое решение для слоистых плит с учетом проскальзывания слоев // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 9. – С. 10-14.
18. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
19. Meleshko V.V. Energy analysis of Stoneley surface waves // International Applied Mechanics. – 1980. – Vol. 16, No 5. – P. 382-385.

E. V. Altukhov, M. V. Fomenko

Vibrations of three-layered plates under layers slip and with ends covered by a diaphragm.

In three-dimensional statement the problem about the steady-state vibrations of three-layered isotropic plates with flat faces covered by a diaphragm is considered. Conditions of sliding contact are satisfied on interface of layers. The homogeneous solutions of equations system of motion in the displacements are got. The asymptotic analysis and computational investigations of dispersive equation are carried out. Diagrams of spectral curves, change curves of phase and group velocities are represented.

Keywords: *three-layered plate, sliding contact, steady-state vibrations, method of homogeneous solutions, dispersion spectra, phase and group velocities.*

Є. В. Алтухов, М. В. Фоменко

Коливання тришарових пластин при проковзуванні шарів та з покритими діафрагмою торцями.

У тривимірній постановці розглянуто задачу про усталені коливання тришарових ізотропних пластин з покритими діафрагмою плоскими гранями. На межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту. Отримано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Проведено асимптотичний аналіз і чисельні дослідження дисперсійного рівняння. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки зміни фазових і групових швидкостей.

Ключові слова: *тришарова пластина, ковзний контакт, усталені коливання, метод однорідних розв'язків, дисперсійні спектри, фазові та групові швидкості.*

Донецкий национальный ун-т
altukhov@matfak.dondu.donetsk.ua

Получено 16.09.11