ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2011. Том 22

УДК 517.9

©2011. **С.М. Чуйко, Ан.С. Чуйко, О.Е. Пирус**

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Используя метод наименьших квадратов, построена новая итерационная техника для нахождения решений автономной слабонелинейной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае в виде разложения в обобщеный полином Фурье в окрестности порождающего решения.

Ключевые слова: *метод наименьших квадратов, итерационная техника, дифференциальные уравнения.*

1. Постановка задачи. Исследована задача о построении решений [1, 2, 3] $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b(\varepsilon)], C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\ b(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0],\ \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Решения нетеровой краевой ($m \neq n$) задачи (1) ищем в малой окрестности решения $z_0(t) \in C^1[a,b^*],\ b^* = b(0)$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ f \in \mathbb{R}^n,\ \ell z_0(\cdot) = \alpha.$$

Здесь $Z(z,\varepsilon)$ – нелинейная вектор-функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ – линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал непрерывно-дифференцируем по неизвестной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии $P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ порождающая задача имеет семейство решений [1]

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)$ – матрица, rank $Q = n_1,\ n - n_1 = r,\ P_{Q^*}-$ $(m \times m)$ – матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)-$ нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы; $X_r(t) = X(t)P_{Q_r},\ P_{Q_r}-$ $(n\times r)$ – матрица, составленная из $r-$ линейно-независимых столбцов $(n \times n)$ – матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q);\ P_{Q_d^*}-$ $(d \times m)-$ мерная матрица

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

$P_{Q_d^*}$ составлена из $d = m - n_1$ – линейно-независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*},

$$G[f;\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$$

– обобщенный оператор Грина порождающей задачи, Q^+ – псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [1],

$$K[f](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f ds$$

– оператор Грина задачи Коши порождающей дифференциальной системы, I_n– единичная $(n \times n)$– матрица. Совершая замену переменной [2, 3]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)),\ b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon),\ \beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],\ \beta(0) = \beta^*,$$

приходим к задаче об отыскании решения $z(\tau, \varepsilon) \in C^1[a, b^*],\ C[0, \varepsilon_0]$ системы дифференциальных уравнений

$$dz/d\tau = Az + f + \varepsilon\Big\{\beta(\varepsilon)A(z(\tau, \varepsilon) + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\Big\},$$

удовлетворяющих краевому условию [3]

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)),\ \ell z(\cdot, \varepsilon),\ \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b^*] \to \mathbb{R}^m.$$

Обозначая

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), 0),\ f_0(s, c^*) = \beta^*[Az_0(t, c_r^*) + f] + Z(z_0(t, c_r^*), 0),$$

аналогично [2], приходим к необходимому условию разрешимости задачи (1).

Лемма. *Если краевая задача (1) в критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$, *то вектор* $c^* = \mathrm{col}\ (c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению [2, 3]*

$$F(c^*) = P_{Q_d^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\} = 0. \tag{2}$$

Фиксируя один из корней $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения (2), приходим к задаче об отыскании решения задачи (1) $z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon)$. Обозначим матрицу $B_0 = F_c'(c^*)$. Пусть $P_{B_0} :\ \mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0)$, $P_{B_0^*}$ матрицы-ортопроекторы $\mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0^*)$. Для каждого простого ($P_{B_0^*} = 0$) корня уравнения $F(c^*) = 0$ задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(\tau, c_r^*)$. Для построения этого решения предложена итерационная схема [2, 3], соответствующая методу простых итераций. Этот метод отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений.

2. Периодическая задача для уравнения Льенара. На примере периодической задачи для уравнения Льенара продемонстрируем технику построения модифицированной итерационной техники для нахождения приближенных решений с использованием метода наименьших квадратов [4]. Исследуем задачу о нахождении решения $y(t,\varepsilon) \in C^2[0,T_1(\varepsilon)],\ C[0,\varepsilon_0]$ автономной периодической краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \cdot Y(y,\varepsilon) \cdot \frac{dy}{dt},\ y(0,\varepsilon) - y(T_1(\varepsilon),\varepsilon) = 0,\ \frac{dy(0,\varepsilon)}{dt} - \frac{dy(T_1(\varepsilon),\varepsilon)}{dt} = 0. \quad (3)$$

Решение задачи (3) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0,\ y_0(0) - y_0(2\pi) = 0,\ \frac{dy_0(0)}{dt} - \frac{dy_0(2\pi)}{dt} = 0.$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)$ – нелинейная скалярная функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Зафиксировав начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметричным, например, $y_0(t) = \hat{c}\cdot\cos t,\ \hat{c} \in \mathbb{R}^1$. Замена независимой переменной в случае периодической задачи принимает вид [5]

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\ t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)).$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении 2π-периодических решений уравнения

$$\frac{d^2y(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2 \cdot y(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)) \cdot Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (4)$$

Искомое периодическое решение уравнения (4) ищем в виде $y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon)$. Отклонение от порождающего решения $x(\tau,\varepsilon)$ определяет 2π-периодическая задача для уравнения

$$\frac{d^2x(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2 \cdot x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)) \cdot Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\times \quad (5)$$

$$\times\left[\frac{dy_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau} + \frac{dx(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right] - \left\{\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2 \cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\right\}.$$

Обозначая $f_0(\tau,c^*) = Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y_0'(\tau,\hat{c}^*) - 2\beta^* y_0(\tau,\hat{c}^*)$, приходим к необходимому условию разрешимости периодической задачи (3).

Следствие. *Если периодическая задача (3) для уравнения Льенара имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y(t,0) = y_0(t,\hat{c}^*)$, то вектор $c^* = \mathrm{col}\ (\hat{c}^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению*

$$F(c^*) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} f_0(s,c^*)\ ds = 0. \quad (6)$$

Предположим, что уравнение (6) имеет действительные решения. Фиксируя один из простых корней $c^* \in \mathbb{R}^2$ уравнения (6), приходим к задаче об отыскании решения периодической задачи (3) в окрестности порождающего решения $y_0(t,\hat{c}^*)$.

Положим $Y'_\varepsilon(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\equiv 0$. Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Y(y,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,\hat{c}^*)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0:$

$$Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x(\tau,\varepsilon)+\mathcal{R}(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))=Y'_y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)$. Последовательность приближений [6]

$$\{\beta_j(\varepsilon)\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow\beta(\varepsilon),\ \beta_0(\varepsilon):=\beta^*$$

определяет последовательность независимых переменных

$$\{t_j(\beta_j(\varepsilon))\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow t\in[0,2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))],\ t_0\in[0,2\pi(1+\varepsilon\beta^*)].$$

Первое приближение к решению $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (4)

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\ t_0:=\tau(1+\varepsilon\beta^*),\ \tau\in[0,2\pi]$$

определяет $2\pi-$ периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2x_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+x_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)\Bigg\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot\left[\frac{dy_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau}+\frac{dx_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right]+$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)\frac{dy_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau}x_1(\tau,\varepsilon)\Bigg\}-\left[\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2}+\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\right].\qquad(7)$$

Пусть $\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \dots,\ \varphi_\mu(\tau),\ \dots$ – система линейно-независимых дважды непрерывно-дифференцируемых скалярных 2π-периодических функций. Приближение к решению $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (7) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\ \varphi(\tau)=[\varphi_1(\tau)\ \varphi_2(\tau)\ \dots\ \varphi_\mu(\tau)];$$

здесь $\varphi(\tau)-$ $(1\times\mu)-$ матрица. Обозначим

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)=\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)\cdot\left[\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)-\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big)y_0'(\tau,\hat{c}^*)\right]\varphi(\tau)-$$

$$-\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\varphi'(\tau)+\varphi''(\tau).$$

Вектор $c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu$ определяет уравнение

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)c_1(\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y_0'(\tau,\hat{c}^*)-$$

$$-\left[\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2}+\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\right]\Bigg\}d\tau,$$

однозначно разрешимое при условии невырожденности матрицы Грама

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\ d\tau.$$

Таким образом, при условии $\det\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]\neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y_0'(\tau,\hat{c}^*)-$$

$$-\left[\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2}+\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\right]\Bigg\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (7). Первое приближение к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, как

$$\beta_1(\varepsilon):=\beta^*+\bar{\beta}_1(\varepsilon),\ (1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)):=(1+\varepsilon\beta^*)\cdot(1+\varepsilon\gamma_1(\varepsilon)),\ \gamma_1(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)\cdot q_1,\ q_1\in\mathbb{R}^{\lambda}.$$

Обозначим вектор-столбцы

$$\Omega_1(\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos\tau\\ \sin\tau\end{pmatrix}\Bigg[\varepsilon^2\cdot\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)Y(y_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y_1'(\tau,\varepsilon)-$$

$$-2\varepsilon y_1(\tau,\varepsilon)-2\varepsilon^2\beta^*\cdot\Big(2+\varepsilon\beta^*\Big)y_1(\tau,\varepsilon)\Bigg]d\tau,$$

$$\omega_1(\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos\tau\\ \sin\tau\end{pmatrix}\Bigg[\varepsilon\beta^*\Big(2+\varepsilon\beta^*\Big)y_1(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)Y(y_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y_1'(\tau,\varepsilon)\Bigg]d\tau.$$

Из условия разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения

$$y_1''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta^*)^2(1+2\varepsilon\gamma_1(\varepsilon))\cdot y_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\cdot(1+\varepsilon\beta^*)(1+\varepsilon\gamma_1(\varepsilon))Y(y_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y_1'(\tau,\varepsilon)$$

получаем систему $\Omega_1(\varepsilon)\cdot\gamma_1(\varepsilon)=\omega_1(\varepsilon)$ для нахождения поправки $\gamma_1(\varepsilon)$, разрешимую при условии $P_{\Omega_1^*(\varepsilon)}\cdot\omega_1(\varepsilon)=0$. Если последнее условие выполнено, находим наилучшую (в смысле наименьших квадратов) поправку $\gamma_1(\varepsilon)=\Omega_1^+(\varepsilon)\cdot\omega_1(\varepsilon)$, которая определяет первое приближение $\beta_1(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$. Последующие приближения к решению $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (4) ищем, как

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ \dots\ +\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),\ c_{k+1}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu}.$$

Предположим, что найденное приближение $y_k(\tau,\varepsilon)\approx y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_k(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности первого приближения $y_k(\tau,\varepsilon)$, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{l} y\ =\ y_k(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\ =\ \ 0\end{array}}.$$

Приближение $y_{k+1}(\tau,\varepsilon)$ к решению $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (5) определяет периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\Bigg\{Y(y_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot\left[\frac{dy_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau}+\frac{d\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right]+$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)\frac{dy_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Bigg\}-\left[\frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)\right].\qquad(8)$$

Обозначим $(1\times\mu)-$ матрицу

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot\left[\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)-\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)y_k'(\tau,\varepsilon)\right]\varphi(\tau)-$$

$$-\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\varphi'(\tau)+\varphi''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации невязки приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\cdot c_{k+1}(\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\cdot y_k'(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Bigg\}d\tau.$$

При условии невырожденности $(\mu\times\mu)-$ матрицы Грама

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\ d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\cdot y'_k(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2 \cdot y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2 y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Big\}d\tau.$$

Обозначим вектор-столбцы:

$$\Omega_{k+1}(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} \Big[\varepsilon^2 \cdot \Big(1+\varepsilon\beta_k\Big) Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-2\varepsilon y_{k+1}(\tau,\varepsilon) - 2\varepsilon^2\beta_k \cdot \Big(2+\varepsilon\beta_k\Big) y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big]d\tau,$$

$$\omega_{k+1}(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} \Big[\varepsilon\beta_k(2+\varepsilon\beta_k) y_{k+1}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\cdot(1+\varepsilon\beta_k) Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big]d\tau.$$

Второе и последующие приближения $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, как

$$\Big(1+\varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)\Big) := \Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(1+\varepsilon\gamma_{k+1}(\varepsilon)\Big).$$

Из условия разрешимости $2\pi-$ периодической задачи для уравнения

$$y''_{k+1}(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_k)^2(1+2\varepsilon\gamma_{k+1}(\varepsilon))\cdot y_{k+1}(\tau,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\cdot(1+\varepsilon\beta_k)(1+\varepsilon\gamma_{k+1}(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\cdot y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)$$

получаем систему $\Omega_{k+1}(\varepsilon)\cdot\gamma_{k+1}(\varepsilon) = \omega_{k+1}(\varepsilon)$ для нахождения поправки $\gamma_{k+1}(\varepsilon)$, разрешимую при условии $P_{\Omega^*_{k+1}(\varepsilon)}\cdot\omega_{k+1}(\varepsilon) = 0$. Если последнее условие выполнено, находим поправку $\gamma_{k+1}(\varepsilon) = \Omega^+_{k+1}(\varepsilon)\cdot\omega_{k+1}(\varepsilon)$. Продолжая рассуждения, приходим к следующей итерационной схеме:

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \gamma_1(\varepsilon)\cdot\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big),\ \gamma_1(\varepsilon) = \Omega^+_1(\varepsilon)\cdot\omega_1(\varepsilon),$$

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\ c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_1(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times\Big\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\cdot y'_0(\tau,\hat{c}^*) - \Big[\frac{d^2 y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2} + \Big(1+\varepsilon\beta^*\Big)^2\cdot y_0(\tau,\hat{c}^*)\Big]\Big\}d\tau,\ \ldots$$

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ ...+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \qquad (9)$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),\ c_{k+1}(\varepsilon)=-\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_k^*(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times\left\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)\cdot Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\cdot y_k'(\tau,\varepsilon)-\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\right\}d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta_k(\varepsilon)+\gamma_{k+1}(\varepsilon)\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big),\ \gamma_{k+1}(\varepsilon)=\Omega_{k+1}^+(\varepsilon)\cdot\omega_{k+1}(\varepsilon),\ ...\ k\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для каждого простого* $\det B_0\neq 0,\ B_0:=F_c'(c^*)$ *корня* $c^*\in\mathbb{R}^2$ *уравнения для порождающих амплитуд (6) периодическая задача (3) для уравнения Льенара имеет единственное решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $y(t,0)=y_0(t,\hat{c}^*)$. *При условии* $\det\left[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]\neq 0,\ P_{\Omega_k^*(\varepsilon)}\cdot\omega_k(\varepsilon)=0,\ k\in\mathbb{N}$ *для нахождения решения периодической задачи (3) для уравнения Льенара применима итерационная схема (9).*

Пример. *Исследуем задачу о построении периодического решения уравнения Ван-дер-Поля [2, 5, 7]* $y''+y=\varepsilon\cdot\Big(1-y^2\Big)\cdot y'$, *наиболее известного частного случая уравнения Льенара.*

Периодическая задача для уравнения Ван-дер-Поля имеет единственное решение в малой окрестности порождающего решения $y_0(t,\hat{c}^*)=2\cos t$, при этом известна величина $\beta^*=0$. Положим к примеру

$$\varphi(\tau)=[\sin\tau\ \ \sin 3\tau\ \ \sin 5\tau\ \ \sin 7\tau\ \ \cos\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(t,\hat{c}^*)=2\cos t$

$$\det[\Gamma\big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\big)]\approx 4\ 057\ 816\ 381\ 784\ 064\pi^7\varepsilon^4+2\ 143\ 386\ 517\ 635\ 072\pi^7\varepsilon^6+\ ...\ \neq 0$$

невырождена. Предложенная итерационная процедура определяет функции:

$$\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\cdot\frac{\sin\tau-\sin 3\tau}{4}+\varepsilon^2\cdot\Big(-\frac{3\cos\tau}{128}-\frac{5}{96}\cos 5\tau\Big)+$$

$$+\varepsilon^3\cdot\frac{-397\sin\tau+297\sin 3\tau+100\sin 5\tau+70\sin 7\tau}{9\ 216}+$$

$$+\varepsilon^4\cdot\frac{4\ 293\cos\tau+9\ 196\cos 5\tau+2\ 380\cos 7\tau}{884\ 736}+$$

$$+\varepsilon^5\cdot\frac{197\ 173\sin\tau-138\ 573\sin 3\tau-58\ 600\sin 5\tau-46\ 366\sin 7\tau}{21\ 233\ 664}+$$

$$+\varepsilon^6\cdot\frac{-5\ 867\ 397\cos\tau-4\ 460\ 092\cos 5\tau-1\ 576\ 804\cos 7\tau}{2\ 038\ 431\ 744}+$$

$$+\varepsilon^7 \cdot \frac{-147\ 152\ 989 \sin\tau + 116\ 416\ 989 \sin 3\tau + 30\ 736\ 000 \sin 5\tau + 25\ 022\ 662 \sin 7\tau}{48\ 922\ 361\ 856}$$

и

$$\xi_2(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^2 \cdot \frac{3\cos\tau}{128} + \varepsilon^3 \cdot \left(\frac{41\sin\tau}{1\ 024} - \frac{21\sin 3\tau}{1\ 024} - \frac{5\sin 5\tau}{768} + \frac{7\sin 7\tau}{1\ 536}\right) +$$
$$+\varepsilon^4 \cdot \left(-\frac{3\ 787\cos\tau}{589\ 824} - \frac{473\cos 5\tau}{73\ 728} - \frac{7\cos 7\tau}{8\ 192}\right) + \varepsilon^5 \cdot \left(-\frac{65\ 663\sin\tau}{4\ 718\ 592} +\right.$$
$$\left. + \frac{15\ 181\sin 3\tau}{1\ 572\ 864} + \frac{395\sin 5\tau}{147\ 456} + \frac{487\sin 7\tau}{1\ 179\ 648}\right) + \varepsilon^6 \cdot \left(-\frac{13\ 786\ 913\cos\tau}{243\ 024\ 443} +\right.$$
$$\left. + \frac{5\ 399\ 155\cos 5\tau}{1\ 138\ 742\ 666} + \frac{1\ 938\ 002\cos 7\tau}{2\ 560\ 428\ 281}\right) + \varepsilon^7 \cdot \left(-\frac{9\ 009\ 047\sin\tau}{249\ 230\ 597} + \frac{84\ 430\ 978\sin 3\tau}{3\ 627\ 550\ 289} -\right.$$
$$\left. - \frac{181\ 844\sin 5\tau}{2\ 810\ 321\ 573} - \frac{1\ 854\ 818\sin 7\tau}{1\ 720\ 405\ 007}\right) + \varepsilon^8 \cdot \left(\frac{17\ 284\ 649\cos\tau}{496\ 497\ 510} + \frac{11\ 564\ 805\cos 5\tau}{1\ 549\ 162\ 486} -\right.$$
$$\left. - \frac{572\ 747\cos 7\tau}{5\ 213\ 617\ 729}\right) + \varepsilon^9 \cdot \left(\frac{14\ 502\ 929\sin\tau}{522\ 989\ 888} - \frac{14\ 718\ 563\sin 3\tau}{669\ 621\ 228} - \frac{1\ 438\ 656\sin 5\tau}{1\ 577\ 943\ 161} -\right.$$
$$\left. - \frac{4\ 842\ 238\sin 7\tau}{1\ 980\ 404\ 069}\right) + \varepsilon^{10} \cdot \left(-\frac{9\ 692\ 105\cos\tau}{797\ 934\ 848} - \frac{6\ 818\ 500\cos 5\tau}{865\ 183\ 731} - \frac{12\ 590\ 253\cos 7\tau}{29\ 454\ 573\ 767}\right),$$

а также первое

$$\beta_1(\varepsilon) = \frac{1}{16} \cdot \varepsilon - \frac{17}{3\ 072} \cdot \varepsilon^3 + \frac{40\ 781}{28\ 311\ 552} \cdot \varepsilon^5 - \frac{13\ 979}{20\ 897\ 579} \cdot \varepsilon^7$$

и второе приближение

$$\beta_2(\varepsilon) = \frac{1}{16} \cdot \varepsilon - \frac{5}{3\ 072} \cdot \varepsilon^3 - \frac{23\ 431}{28\ 311\ 552} \cdot \varepsilon^5 - \frac{280\ 007}{32\ 802\ 415} \cdot \varepsilon^7$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Таким образом, найдены первое $y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon)$, $x_1(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon)$ и второе приближение к решению периодической задачи для уравнения Ван-дер-Поля $y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_2(\tau,\varepsilon)$, $x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon)$. Для оценки точности найденного второго приближения определим невязки:

$$\Delta_2(\varepsilon) := ||y_2''(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon))^2 \cdot y_2(\tau,\varepsilon) - \varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta_2(\varepsilon)) \cdot (1-y_2^2(\tau,\varepsilon)) \cdot y_2'(\tau,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_a(\varepsilon) := ||y_a''(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon))^2 \cdot y_a(\tau,\varepsilon) - \varepsilon \cdot (1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon)) \cdot (1-y_a^2(\tau,\varepsilon)) \cdot y_a'(\tau,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]}.$$

Заметим, что точность найденого нами второго приближения

$$\Delta_2(0,1) \approx 0,0\ 000\ 252\ 158,\ \ \Delta_2(0,01) \approx 3,14\ 846 \cdot 10^{-9}$$

выше точности приближений $y_a(\tau,\varepsilon)$, $\beta_a(\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля $\Delta_a(0,1) \approx 0,000\ 202$, $\Delta_a(0,01) \approx 2,01\ 398 \cdot 10^{-8}$, полученного в статьях [8, 9].

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
2. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1992. – 28, № 10. – С. 1668-1674.
3. *Чуйко С.М., Бойчук И.А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**. – № 3.
4. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**. – № 4. – С. 554-573.
5. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М. Гостехиздат. 1956. 491 с.
6. *Чуйко С.М., Чуйко Ан.С.* Периодическая задача для уравнения типа Хилла // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. – Вип. 2(4). – 2010. – С. 140-181.
7. *Van der Pol B.* The nonlinear theory of electric oscillations // Proceedings of the Institute of Radio Engineers. – 1934. – № 22. – P. 1051-1086.
8. *Andersen C.M., Geer J.F.* Power expansion for the Frequency and period of limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM Journ. Applied Math. – 1982. – **42**. – P. 678-693.
9. *Geer J.F., Andersen C.M.* Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation - Galerkin technique // NASA Contractor Report 187 632. – ICASE Report № 91-68. – 1991. – 30 p.

S. M. Chuiko, An. S. Chuiko, O. E. Pirus

Approximate solutions of Noetherian boundary value problems in the critical case.

We construct a new convergent iteration algorithm for the construction of solution of autonomous weakly nonlinear boundary value problem for a system of ordinary differential equations in critical case. Using the least squares method we expand solution of boundary value problem in the neighborhood of the generating solution in generalized Fourier polynomial.

Keywords: *the least squares method, iteration algorithm, differential equations.*

С. М. Чуйко, Ан. С. Чуйко, О. Є. Пірус

Наближені розв'язки нетерових крайових задач у критичному випадку.

Використовуючи метод найменших квадратів, побудовано нову ітераційну техніку для знаходження розв'язків автономної слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку у вигляді розкладання в узагальнений поліном Фур'є в околі породжувального розв'язку.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, ітераційна техніка, диференціальні рівняння.*

Славянский государственный педагогический ун-т
chujko-slav@inbox.ru

Получено 19.04.11