УДК 531.38

©2011. **А.В. Мазнев**

ОДИН КЛАСС ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрены условия существования прецессионно-изоконических движений неавтономного гиростата, характеризующихся равенством скоростей собственного вращения и прецессии гиростата. Найдены три новых решения уравнений движения класса Кирхгофа-Пуассона с переменным гиростатическим моментом.

Ключевые слова: *гиростат, гиростатический момент, прецессии, изоконические движения.*

1. Введение. С помощью различных геометрических методов [1], в частности, метода годографов [2], основанного на теореме Пуансо [3], накоплена обширная информация о свойствах движения твердого тела. Среди них можно отметить существование движений, для которых подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости. Такие движения называют изоконическими движениями [4].

Прецессионные движения имеют важное значение для приложений [5]. Эти движения характеризуются постоянством угла между двумя осями b_1, b_2 с общим началом в неподвижной точке O и которые неизменны соответственно в теле и в пространстве [6].

Если движения тела обладают и свойством изоконичности и свойством прецессионности, то они называются прецессионно-изоконическими [6]. К настоящему времени получено много результатов для случая, когда гиростатический момент постоянен [7]. Поэтому задача исследования условий существования прецессионно-изоконических движений неавтономного гиростата актуальна.

Отметим, что постановку задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом рассматривали Ж. Лиувилль [8], В. Вольтерра [9], Н. Е. Жуковский [10], П. В. Харламов [11].

Условия существования простейших классов прецессионных движений неавтономного гиростата изучены в работах [12-14]. В работе [15] предложен общий метод исследования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Особенность подхода [15] состоит в том, что его применение позволяет получить замкнутую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величины гиростатического момента и скоростей прецессии и собственного вращения. В данной работе исследован класс прецессионно-изоконических движений гиростата, который характеризуется равенством скоростей прецессии и собственного вращения. Получены новые решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом [11] под действием потенциальных и гироскопических сил [16]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha} - B\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\omega} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{2}$$

где введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, характеризующий гиростатический момент гиростата $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; L – проекция момента сил, действующих на носимое тело, относительно его оси вращения; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; A – тензор инерции гиростата; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, \lambda(t)$ обозначает производную по времени.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Пусть гиростат совершает прецессию относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$, то есть имеют место соотношения [7]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad (a_0 = \cos\theta_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{a} + \dot{\psi}(t)\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где θ_0 – постоянный угол между вектором $\boldsymbol{a}$, неизменно связанный с телом-носителем, и вектором вертикали $\boldsymbol{\nu}$. Если систему координат связать с вектором $\boldsymbol{a}$ так, чтобы $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, то уравнению $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})$, полученному из (2), (3), первому соотношению из системы (3) и первому соотношению из (4) удовлетворим функциями

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad (a_0' = \sin\theta_0). \tag{5}$$

Кроме выше изложенных предположений положим, что гиростат совершает изоконическое движение, то есть подвижный и неподвижный годографы конгруэнтны [4]. Тогда имеет место инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{c}) = 0. \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{c}$ – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом. Если внести выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из системы (4) в равенство (6), то в случае $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ получим $\psi = \varphi$. То есть рассматриваемый в данной статье класс прецессионно-изоконических движений можно охарактеризовать соотношениями (5) и векторным равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\nu}). \tag{7}$$

Поскольку уравнение Пуассона из (2) при наличии соотношений (4), (5) обращается в тождество, то обратимся к уравнению (1). Подставив в него выражение (7), соотношения (5), рассмотрим три уравнения, которые являются результатом проектирования преобразованного уравнения (1) на независимые векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}$. Подвижную систему координат выберем так, чтобы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$. Учитывая то обстоятельство, что второе уравнение интегрируется и, принимая во внимание обозначения произвольной постоянной в интеграле моментов из (3), получим

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) - a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) + \big(\beta_1\cos\varphi(t) + \beta_1'\sin\varphi(t) + \beta_0\big)\ddot{\varphi}(t) +$$
$$+ f_2(\varphi(t))\dot{\varphi}^2 + g_2(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) + h_2(\varphi(t)) = 0, \tag{8}$$
$$\lambda(t)\big(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t) + a_0\alpha_3\big) = k + G_2(\varphi(t)) - F_2(\varphi(t))\dot{\varphi}(t), \tag{9}$$
$$a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos\varphi(t) + a_0'\lambda(t)\dot{\varphi}(t)\big[a_0'\alpha_3 - \alpha_1(1+a_0)\sin\varphi(t)\big] +$$
$$+ L_2(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) - M_2(\varphi(t))\dot{\varphi}^2 + H_2(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) + N_2(\varphi(t)) = 0, \tag{10}$$

где

$$f_2(\varphi(t)) = A_2\sin 2\varphi(t) - A_2'\cos 2\varphi(t) + a_0\beta_1\sin\varphi(t) - a_0'\beta_1'\cos\varphi(t),$$
$$g_2(\varphi(t)) = B_2'\cos 2\varphi(t) - B_2\sin 2\varphi(t) + a_0\gamma_1'\cos\varphi(t) - a_0\gamma_1\sin\varphi(t),$$
$$h_2(\varphi(t)) = C_2'\cos 2\varphi(t) - C_2\sin 2\varphi(t) + \kappa_1'\cos\varphi(t) - \kappa_1\sin\varphi(t),$$
$$F_2(\varphi(t)) = A_2\cos 2\varphi(t) + A_2'\sin 2\varphi(t) + (2a_0+1)\beta_1\cos\varphi(t) +$$
$$+ (2a_0+1)\beta_1'\sin\varphi(t) + A_0,$$
$$G_2(\varphi(t)) = \frac{1}{2}\big(B_2\cos 2\varphi(t) + B_2'\sin 2\varphi(t) + 2a_0\gamma_1\cos\varphi(t) + 2a_0\gamma_1'\sin\varphi(t) + B_0\big),$$
$$L_2(\varphi(t)) = A_2'\cos 2\varphi(t) - A_2\sin 2\varphi(t) + (a_0+1)\beta_1'\cos\varphi(t) - (a_0+1)\beta_1\sin\varphi(t),$$
$$M_2(\varphi(t)) = (a_0+2)A_2\cos 2\varphi(t) + (a_0+2)A_2'\sin 2\varphi(t) +$$
$$+ 2a_0(a_0+1)\beta_1\cos\varphi(t) + 2a_0(a_0+1)\beta_1'\sin\varphi(t) + A^{(0)}, \tag{11}$$
$$H_2(\varphi(t)) = (a_0+1)B_2\cos 2\varphi(t) + (a_0+1)B_2'\sin 2\varphi(t) + (2a_0^2 + a_0 - 1)\gamma_1\cos\varphi(t) +$$
$$+ (2a_0^2 + a_0 - 1)\gamma_1'\sin\varphi(t) + B^{(0)},$$
$$N_2(\varphi(t)) = a_0C_2\cos 2\varphi(t) + a_0C_2'\sin 2\varphi(t) + \big[(2a_0^2 - 1)\varepsilon_1 - a_0a_0's_2\big]\cos\varphi(t) +$$
$$+ \big[(2a_0^2 - 1)\varepsilon_1' - a_0a_0's_1\big]\sin\varphi(t) + \frac{a_0'^2}{2}\left[a_0(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) + s_3\right].$$

В формулах (11) введены обозначения

$$A_2 = \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad A_2' = a_0'^2A_{12}, \quad \beta_1 = a_0'A_{23}, \quad \beta_1' = a_0'A_{13},$$

$$\beta_0 = (a_0+1)A_{33}, \quad A_0 = \frac{(a_0+1)}{2}\left[(1-a_0)(A_{22} + A_{11}) + 2a_0A_{33}\right],$$

$$B_2 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22} - B_{11}), \quad B_2' = a_0'^2B_{12}, \quad \gamma_1 = a_0'B_{23}, \quad \gamma_1' = a_0'B_{13},$$

$$B_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(B_{22}+B_{11}\right)+2a_0^2B_{33}\right], \tag{12}$$

$$A^{(0)}=\frac{a_0'^2}{2}\left[a_0\left(A_{22}+A_{11}\right)-2(a_0+1)A_{33}\right],$$

$$B^{(0)}=\frac{a_0'^2}{2}\left[(a_0+1)\left(B_{22}+B_{11}\right)-2a_0B_{33}\right],$$

$$C_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(C_{22}-C_{11}\right),\quad C_2'=a_0'^2C_{12},$$

$$\varepsilon_1=a_0'C_{23},\quad \varepsilon_1'=a_0'C_{13},\quad \kappa_1=a_0\varepsilon_1-a_0's_2,\quad \kappa_1'=a_0\varepsilon_1'-a_0's_1.$$

Основной задачей данной статьи является интегрирование уравнений (8)-(10), то есть нахождение функций $\lambda(t),\ \varphi(t)$.

3. Преобразование уравнений (8)-(10). Будем предполагать, что выполняются условия $\alpha_1\neq 0,\ a_0\neq 0$. Тогда из уравнения (9) определим

$$\lambda(t)=\frac{1}{a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3}\left[k+G_2\left(\varphi(t)\right)-F_2\left(\varphi(t)\right)\dot\varphi(t)\right]. \tag{13}$$

Подставим выражение (13) в уравнения (8), (10)

$$\begin{gathered}Q_3\left(\varphi(t)\right)\ddot\varphi(t)+R_4\left(\varphi(t)\right)\dot\varphi^2(t)+M_4\left(\varphi(t)\right)\dot\varphi(t)+Q_4\left(\varphi(t)\right)=0,\\ L_4\left(\varphi(t)\right)\ddot\varphi(t)+N_4\left(\varphi(t)\right)\dot\varphi^2(t)+P_4\left(\varphi(t)\right)\dot\varphi(t)+K_4\left(\varphi(t)\right)=0,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}Q_3\left(\varphi(t)\right)=\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\left[\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\left(\beta_1\cos\varphi(t)+\right.\right.\\ \left.\left.+\beta_1'\sin\varphi(t)+\beta_0\right)-\alpha_3F_2\left(\varphi(t)\right)\right],\\ R_4\left(\varphi(t)\right)=\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\left[a_0'\alpha_1\cos\varphi(t)F_2\left(\varphi(t)\right)-\alpha_3F_2'\left(\varphi(t)\right)+\right.\\ \left.+f_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\right]+a_0'\alpha_1\alpha_3F_2\left(\varphi(t)\right)\cos\varphi(t),\\ M_4\left(\varphi(t)\right)=\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\left[\alpha_3G_2'\left(\varphi(t)\right)-\right.\\ \left.-a_0'\alpha_1\left(k+G_2\left(\varphi(t)\right)\right)\cos\varphi(t)+g_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\right]-\\ -a_0'\alpha_1\alpha_3\left(k+G_2\left(\varphi(t)\right)\right)\cos\varphi(t),\\ Q_4\left(\varphi(t)\right)=h_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)^2,\\ L_4\left(\varphi(t)\right)=\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\left[L_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)-\right.\\ \left.-a_0'\alpha_1F_2\left(\varphi(t)\right)\cos\varphi(t)\right],\\ N_4\left(\varphi(t)\right)=a_0'^2\alpha_1^2F_2\left(\varphi(t)\right)\cos^2\varphi(t)-\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\times\\ \times\left[a_0'\alpha_1F_2'\left(\varphi(t)\right)\cos\varphi(t)+a_0'F_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_3-\alpha_1(a_0+1)\sin\varphi(t)\right)\right],\\ P_4\left(\varphi(t)\right)=\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\left[a_0'\alpha_1G_2\left(\varphi(t)\right)\cos\varphi(t)+\right.\\ +a_0'\left(k+G_2\left(\varphi(t)\right)\right)\left(a_0'\alpha_3-\alpha_1(a_0+1)\sin\varphi(t)\right)+\end{gathered} \tag{15}$$

$$+H_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)\right]-a_0'^2\alpha_1^2G_2\left(\varphi(t)\right)\cos^2\varphi(t),$$

$$K_4\left(\varphi(t)\right)=N_2\left(\varphi(t)\right)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0\alpha_3\right)^2.$$

В равенствах (15) в выражениях $F_2'(\varphi(t)), G_2'(\varphi(t))$ штрих обозначает дифференцирование по переменной φ.

4. Первый пример решения системы (13), (14). Вид соотношения (13) указывает на то, что весьма интересен случай, когда $B=0$, $k=0$. То есть в уравнении (1) отсутствует матрица B, а постоянная интеграла момента количества движения из (3) равна нулю. На основании уравнений (13), (14) можно показать существование у них следующего решения:

$$\dot\varphi(\varphi)=\sqrt{c_0+c_1\sin\varphi},\quad \lambda(\varphi)=(p+q\sin\varphi)\sqrt{c_0+c_1\sin\varphi}. \tag{16}$$

При этом параметры задачи (1), (2) и решение (16) удовлетворяют равенствам:

$$C_{12}=C_{23}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad s_2=0,\quad C_{13}=a_0s_1,$$

$$\alpha_1=\frac{(A_{22}-A_{11})}{\sigma_0},\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=-\frac{A_{13}}{\sigma_0},\quad \sigma_0=\sqrt{A_{13}^2+(A_{22}-A_{11})^2}, \tag{17}$$

$$a_0=\frac{A_{22}\left(A_{11}-A_{22}\right)}{A_{13}^2+\left(A_{22}-A_{11}\right)\left(A_{33}-A_{22}\right)},$$

$$c_1=-\frac{2a_0a_0's_1}{A_{22}},\quad c_0=\frac{a_0}{A_{22}}\left[a_0\left(C_{22}-C_{33}\right)+s_3\right], \tag{18}$$

$$p=-\frac{(a_0+1)}{a_0\alpha_3}\left[a_0\left(A_{33}-A_{22}\right)+A_{22}\right],\quad q=\frac{a_0'}{\alpha_1}\left(A_{22}-A_{11}\right).$$

Примечательными свойствами условий (17) являются: они не содержат условий на моменты инерции A_{ij}; угол θ_0 и величины α_i зависят только от моментов инерции. Действительность угла θ_0 может быть обоснована на примере: $A_{11}=1,5\kappa_0,\ A_{22}=\kappa_0,\ A_{33}=2,4\kappa_0,\ A_{13}=1,5\kappa_0$, где κ_0 – параметр.

Соотношения (16) показывают, что в общем случае $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$ – эллиптические функции времени. Если сделать предположения $c_0>0,\ c_1>0,\ c_0>c_1$, то из уравнений (16) получим

$$\begin{aligned}&\varphi(t)=\arcsin\left(2cn\frac{\mu_0}{2}t-1\right),\quad \dot\varphi=\mu_0dn\frac{\mu_0}{2}t,\\&\lambda(t)=\mu_0dn\frac{\mu_0}{2}t\left[(p-q)+2qcn\frac{\mu_0}{2}t\right],\quad \left(\mu_0=\sqrt{c_0+c_1}\right),\end{aligned} \tag{19}$$

где $cn\frac{\mu_0}{2}t$, $dn\frac{\mu_0}{2}t$ – эллиптические функции времени с модулем $k^2=\dfrac{2c_1}{c_0+c_1}$.

Отметим, что функция $\lambda(\varphi)$ является линейной функцией относительно $\sin\varphi$ с коэффициентами p и q из системы (18).

В силу свойства прецессионно-изоконичности движения зависимость $\psi(t)$ совпадает с зависимостью $\varphi(t)$ из системы (19).

5. Второй пример. Случай $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$. При указанном предположении вектор гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ собственного вращения гиростата. Будем предполагать, что функции $\lambda(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ линейно зависимы. Тогда можно показать, что система уравнений (8)–(10) имеет решение, которое характеризуется тем, что функция $\varphi(t)$ находится путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{d_1 \cos\varphi + d_2 \sin\varphi + d_0}} = t - t_0, \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2a_0 a_0' C_{23}}{(a_0+2)A_{11}}, \quad d_2 = \frac{2a_0 a_0' C_{13}}{(a_0+2)A_{11}}, \\ d_0 &= \frac{a_0 a_0'(a_0-2)}{(a_0+2)A_{11}} \left[a_0(C_{11}-C_{33}) + s_3\right], \end{aligned} \tag{21}$$

а функция $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \dot{\varphi}(t). \tag{22}$$

Здесь

$$\varepsilon_0 = a_0\left(B_{33} - B_{11}\right) - B_{11}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{(a_0+1)}{a_0}\left[a_0\left(A_{33} - A_{11}\right) + A_{11}\right]. \tag{23}$$

Решение (20), (22), в котором приняты обозначения (21), (23), имеет место при выполнении равенств

$$\begin{aligned} &A_{ij} = 0 \ \left(\forall\, i \neq j\right), \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{ij} = 0 \ \left(\forall\, i \neq j\right), \quad B_{22} = B_{11}, \\ &C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad s_1 = \xi_0 C_{13}, \quad s_2 = \xi_0 C_{23}, \\ &\xi_0 = \frac{1 + 2a_0 - 2a_0^2}{2 - a_0}, \quad k = \frac{1}{2}\left[a_0^2 B_{33} - (a_0+1)^2 B_{11}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Из условий (24) следует, что ось собственного вращения с единичным вектором $\boldsymbol{a}$ ортогональна круговым сечениям трех эллипсоидов: $A_{11}(x^2+y^2) + A_{33}z^2 = c_1^2$, $B_{11}(x^2+y^2) + B_{33}z^2 = c_2^2$, $C_{11}(x^2+y^2) + C_{33}z^2 + 2C_{13}xz + 2C_{23}yz = c_3^2$. Конец вектора $\boldsymbol{s}$ занимает положение, которое не совпадает с точками оси собственного вращения и с точками, лежащими в ортогональной к этой оси плоскости.

Из формул (20), (22) вытекает, что в общем случае функции $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$ – эллиптические функции времени. Их получение достаточно тривиально. В частном случае эти функции могут быть и элементарными функциями времени. На основании постановки задачи считаем, что величина ε_1 из системы (23) отлична от нуля.

6. Третье решение. Случай $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$. Представляет большой интерес пример, когда векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{a}$ ортогональны. Положим в уравнениях (8)–(10) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Будем считать, что параметры задачи (1), (2) удовлетворяют условиям, при выполнении которых в системе (14) $M_4(\varphi) \equiv 0$, $P_4(\varphi) \equiv 0$. Тогда система уравнений (13), (14) допускает решение

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{l_0 + l_1 \sin\varphi}, \\ &\lambda(\varphi) = a_0'(A_{22} - A_{11}) \sin\varphi \cdot \sqrt{l_0 + l_1 \sin\varphi}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$l_0 = \frac{a_0\,(C_{22} - C_{33}) + s_3}{A_{22} - A_{33}}, \quad l_1 = \frac{2a_0'\,(s_1 - a_0 C_{13})}{(a_0 + 1)A_{33}}. \tag{26}$$

Решение (25) с обозначениями (26) существует при следующих условиях:

$$\begin{aligned} &A_{ij} = 0 \ (\forall\, i \neq j)\,, \quad B_{ij} = 0 \ (\forall\, i \neq j)\,, \quad B_{22} = B_{11}, \\ &C_{22} = C_{11}, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \quad s_1 = \xi_0 C_{13}, \quad s_2 = 0, \\ &\xi_0 = \frac{1 + 2a_0 - 2a_0^2}{a_0 - 2}, \quad B_{11}\,(2A_{22} - A_{33}) = A_{22} B_{33}, \\ &a_0 = \frac{A_{22}}{A_{22} - A_{33}}, \quad k = -\frac{a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}}{2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Из условий (27) можно сделать следующие выводы: вектор $\boldsymbol{a}$ направлен по главной оси эллипсоида инерции; вектор $\boldsymbol{s}$ лежит в главной плоскости этого эллипсоида; угол θ_0 в силу значения a_0 зависит от моментов инерции гиростата (пример действительности его можно показать с помощью равенств $A_{11} = 1,5\kappa_0,\ A_{22} = 0,5\kappa_0,\ A_{33} = 1,6\kappa_0,\ \kappa_0$ – параметр); вектор $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит главной оси, ортогональной вектору $\boldsymbol{a}$.

В силу первой формулы из системы (25) сведение задачи к квадратурам можно получить по аналогии с методом нахождения функции (19). В общем случае решение $\varphi(t),\ \lambda(t)$, определяемое системой (25), приводит к эллиптическим функциям времени.

7. Заключение. Таким образом, в статье получено три решения уравнений прецессионно-изоконических движений неавтономного гиростата, записанных в системе (8)-(10). При этом в общем случае функции $\varphi(t),\ \lambda(t)$ являются эллиптическими функциями времени, а решение уравнений (1), (2) имеет вид (5) и (7). Примечательным кинематическим свойством движения гиростата служит совпадение скоростей прецессии и собственного вращения. Аналогов полученных решений для уравнений движения тяжелого неавтономного гиростата нет.

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Київ: Наук. думка, 1978. – 296 с.
2. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 703-707.
3. *Poinsot L.* Thèorie nounelle de la rotation des corps // J. math. pures et appl. – 1851. – **16.** – P. 9-130; P. 289-336.
4. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 285 с.
5. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
6. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 573-587.

7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
8. *Liouville J.* Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1-25.
9. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201-358.
10. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч: – М.; Л.: Гостехиздат. – 1949. – **2**. – С. 152-309.
11. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972, вып. 4. – С. 52-73.
12. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008, вып. 38. – С. 80-86.
13. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – **19**. – С. 30-35.
14. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – вып. 39. – С. 42-49.
15. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010, вып. 40. – С. 91-104.
16. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, № 5. – P. 747-754.

A.V. Maznev

Precession-izoconic movements class of nonautonomic gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces.

General view precession of gyrostat with a variable gyrostatic moment which characterized by the constancy of increases speeds precession and own rotation is examined in this article. The new decisions of gyrostat motion equalizations under the action of gravity and gyrostat motion equalizations under the action of potential and gyroscopic forces are got.

Keywords: *gyrostat, gyrostatic moment, precessions, izoconic movements.*

О.В. Мазнєв

Один клас прецесійно-ізоконічних рухів неавтономного гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил.

У статті розглянуто прецесію загального вигляду гіростата зі змінним гіростатичним моментом, яка характеризується постійністю добутку швидкостей прецесії та власного обертання. Отримано нові розв'язки рівнянь руху гіростата під дією сили тяжіння та рівнянь руху гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил.

Ключові слова: *гіростат, гіростатичний момент, прецесії, ізоконічні рухи.*

Донецький національний ун-т
`maznev_av@rambler.ru`

Получено 30.03.11