УДК 517.5

©2011. **О.В. Котова**

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ СТЕЧКИНА

В статье дан отрицательный ответ на предположение об оценке снизу приближения периодических функций полиномами Стечкина. Тем самым доказано, что эти полиномы существенно отличаются от классических полиномов Джексона.

Ключевые слова: *тригонометрические полиномы Стечкина, формулы Кардано, модуль гладкости периодической функции, пространство* $\mathbb{C}^*$.

1. Введение. $f \in \mathbb{C}^*$, если она непрерывна на всей прямой и 2π-периодическая, $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Ряд Фурье f пишут в виде

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k, \qquad c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \qquad e_k = e_k(x) = e^{ikx}.$$

Гладкость функции измеряют модулями гладкости разных порядков

$$\omega_s(f,h) = \sup_{0<\delta\le h} \|\sum_{\nu=0}^{s}(-1)^\nu \binom{s}{\nu} f(\cdot+\nu\delta)\| \qquad (s\in\mathbb{N}).$$

По теореме Вейерштрасса для любой функции $f \in \mathbb{C}^*$ найдется последовательность тригонометрических полиномов

$$\tau_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_{k,n}e^{ikx}, \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

сходящихся равномерно к f, а по теореме Джексона

$$E_n^T(f) = \inf_{\tau_n}\|f-\tau_n\| \le 3\omega_1(f;\tfrac{1}{n})$$

Н.И. Ахиезер доказал, что

$$E_n^T(f) \le 10\omega_2(f;\tfrac{1}{n}),$$

а С.Б. Стечкин построил полиномы, для которых в подобном неравенстве вместо ω_2 стоит ω_s, где s – заранее выбранное любое натуральное число не менее двух.

Р.М. Тригуб нашел точный порядок приближения при $n\to\infty$ разными классическими методами суммирования рядов Фурье. Для полиномов Джексона – это $\omega_2(f;\frac{1}{n})$ (По поводу изложенного выше см.[1] п.п. 4.6 и 8.2)

Профессор В.И. Иванов в докладе на конференции, посвященной 90-летию С.Б. Стечкина (Москва, август 2010), сформулировал вопрос о справедливости подобных оценок приближения снизу полиномами Стечкина при четных $s \ge 2$ (Этот доклад есть в Интернете, см.[2])

В настоящей статье дается отрицательный ответ на этот вопрос при $s=2$.

При $s=2$ полиномы Стечкина имеют вид

$$\tau_{2,8n}(f,x)=\frac{1}{2\pi\alpha_{4,n}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2f(x+t)-f(x+2t))D_n^4(t)dt, \tag{1}$$

где $D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$, $\qquad \alpha_{4,n}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n^4(t)dt.$

2. Основной результат.

Теорема. *Неравенство*

$$\omega_2(f;\tfrac{1}{n})\leq c\|f-\tau_{2,8n}(f)\|$$

с константой c, не зависящей от f и n, не верно.

Доказательство. Доказательство проводим методом от противного.

Предположим, что указанное неравенство верно. Найдем коэффициенты полинома $\tau_{2,8n}(f)$. Для этого понадобится следующий частный случай леммы 1 из [3]:

$$D_n^4(t)=e^{-4int}\sum_{m=0}^{8n}\beta_m e^{imt}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{4,n}}{n^3}=\frac{16}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt,$$

где $\quad \beta_m=4\sum\limits_{\nu=0}^{\left[\frac{m}{2n+1}\right]}(-1)^\nu\frac{(m-\nu(2n+1)+3)!}{\nu!(4-\nu)!(m-\nu(2n+1))!}, \qquad \alpha_{4,n}=\beta_{4n}=\frac{(2n+1)(8n^2+8n+3)}{3}.$

Подставляя разложение (2) в (1), получаем

$$\tau_{2,8n}(f)=\sum_{k=0}^{8n}\mu_{k,n}c_ke_k,$$

где

$$\mu_{k,n}=\frac{1}{2\pi\alpha_{4,n}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2e^{ikt}-e^{2ikt})D_n^4(t)dt.$$

Так как $\beta_m=0$ при $|m-4n|>4n$, общая формула при всех k, имеет вид:

$$\mu_{k,n}=\frac{1}{2\pi\beta_{4n}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=0}^{8n}\beta_m(2e^{it(m+k-4n)}-e^{it(m+2k-4n)})dt=$$

$$=\begin{cases}\frac{2\beta_{4n-k}}{\beta_{4n}} & \text{при } |k|\in(2n,4n],\\ \frac{2\beta_{4n-k}-\beta_{4n-2k}}{\beta_{4n}} & \text{при } |k|\leq 2n\end{cases}=$$

$$= \begin{cases} \frac{-9k^3+6(2n+1)k^2+16n^3+24n^2+14n-3}{(2n+1)(8n^2+8n+3)} & \text{при } |k| \in [0,n), \\ \frac{7k^3-18(2n+1)k^2+8(6n^2+6n+1)k+3(2n+1)}{(2n+1)(8n^2+8n+3)} & \text{при } |k| \in [n,2n), \\ \frac{(4n-k+1)(4n-k+2)(4n-k+3)}{(2n+1)(8n^2+8n+3)} & \text{при } |k| \in [2n,4n]. \end{cases}$$

Представим $\mu_{k,n} = \mu_{|k|,n}$ в виде $\psi_n\left(\frac{|k|}{n}\right)$.

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{-9x^3+6\frac{2n+1}{n}x^2+16+\frac{24}{n}+\frac{14}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{16+\frac{24}{n}+\frac{14}{n^2}+\frac{3}{n^3}} & \text{при } |x| \in [0,1), \\ \frac{7x^3-18\frac{2n+1}{n}x^2+8\frac{6n^2+6n+1}{n^2}x+3\frac{2n+1}{n^3}}{16+\frac{24}{n}+\frac{14}{n^2}+\frac{3}{n^3}} & \text{при } |x| \in [1,2), \\ \frac{(4-x+\frac{1}{n})(4-x+\frac{2}{n})(4-x+\frac{3}{n})}{16+\frac{24}{n}+\frac{14}{n^2}+\frac{3}{n^3}} & \text{при } |x| \in [2,4]. \end{cases}$$

Найдем $x \neq 0$, при котором $\psi_n(x) = 1$. Для этого решаем кубическое уравнение по формулам Тартальи-Кардано (см., например, [4], стр. 195-199).

$$7x^3 - 18\frac{2n+1}{n}x^2 + 8\frac{6n^2+6n+1}{n^2}x - 8\frac{2n^2+3n+1}{n^2} = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

где $A = 7$, $B = -18\frac{2n+1}{n}$, $C = 8\frac{6n^2+6n+1}{n^2}$, $D = -8\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$.

Дискриминант S этого уравнения равен

$$\frac{4(3AC-B^2)^3+(2B^3-9ABC+27A^2D)^2}{2916A^6} = \frac{-16(756n^6+2268n^5+3321n^4+2862n^3+1557n^2+504n+100)}{64827n^6} < 0,$$

тогда все корни уравнения имеют вид

$$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\tfrac{\varphi+l\pi}{3}) - \frac{B}{3A}, \qquad l = 0,1,2;$$

где $p = \frac{3AC-B^2}{3A^2}$, $q = \frac{2B^3-9ABC+27A^2D}{27A^3}$, $\varphi = \arctan(-\frac{2}{q}\sqrt{-S})$.

Окончательно корень уравнения, лежащий в интервале $[1,2)$, запишется в виде:

$$x = x_n = -\frac{4\sqrt{3}\sqrt{24n^2+24n+13}}{21n}\cos(\tfrac{\varphi+\pi}{3}) + \frac{6(2n+1)}{7n},$$

$$\varphi = \arctan(\tfrac{7\sqrt{3}\sqrt{756n^6+2268n^5+3321n^4+2862n^3+1557n^2+504n+100}}{9(26n^3+39n^2+37n+12)}),$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = -\frac{4\sqrt{2}}{7}\cos(\tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{7\sqrt{7}}{13}) + \frac{4\sqrt{6}}{7}\sin(\tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{7\sqrt{7}}{13}) + \frac{12}{7} \approx 1.387.$$

Так как $x_n \in [1,2)$ не является рациональным, то выберем последовательность натуральных чисел $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такую, что $\frac{k_n}{n} < x_n < \frac{k_n+1}{n}$.

Поскольку

$$\sup_{|x|\in[0,4],n\in\mathbb{N}} |\psi_n(x)| + |\psi_n'(x)| < \infty,$$

(функция $\psi_n(x)$ ограничена как полином третьей степени с ограниченными коэффициентами),
то по теореме Лагранжа о среднем

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n\left(\frac{k_n}{n}\right) = 1.$$

В силу предположения для последовательности функций $f_n(x) = e^{ik_n x} = e_{k_n}$, $(n \in \mathbb{N})$ получаем

$$\omega_2\left(f_n; \frac{1}{n}\right) \le c\|f_n - \tau_{2,8n}(f_n)\| = c\|e_{k_n} - \psi_n\left(\frac{k_n}{n}\right) e_{k_n}\| = c|1 - \psi_n\left(\frac{k_n}{n}\right)| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

а левая часть

$$\omega_2\left(f_n; \frac{1}{n}\right) \ge \max_x |e^{ik_n x} - 2e^{ik_n\left(x+\frac{1}{n}\right)} + e^{ik_n\left(x+\frac{2}{n}\right)}| =$$
$$= \max_x |e^{ik_n\left(x+\frac{1}{n}\right)}\left(e^{-i\frac{k_n}{n}} - 2 + e^{i\frac{k_n}{n}}\right)| = 2\left(1 - \cos\frac{k_n}{n}\right) \to 2(1-\cos x_0) = 1.63 \ne 0.$$

Противоречие доказывает теорему. □

Предположительно, при $s > 2$ ответ будет тоже отрицательный.

1. *R.M. Trigub, E.S. Belinsky* Fourier Analysis and Approximation of functions, Kluwer-Springer, Berlin – 2004. – MR2098384. ISBN:1-4020-2341-342-02 (41-02).
2. *Доклад В.И. Иванова* О работах С.Б. Стечкина по теории приближения функций. – URL: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=449.
3. *R.M. Trigub* Exact order of approximation of periodic functions by linear positive operators // East journal on approximations – 2009. – volume 15, number 1. – P. 31-56.
4. *Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра).– М.: Физматгиз, 1962. – 300 с.

O.V. Kotova

The approximation of periodic functions by Stechkin's polynomials.

In the paper we give a negative answer to the assumption of an estimate from below of approximation for periodic functions by Stechkin's polynomials. Thus proved that these polinomials are different significantly from the classical Jackson's polynomials.

Keywords: *Stechkin's trigonometric polinomials, Cardano's formulas, modulus of smoothness of periodic functions, space* $\mathbb{C}^*$.

О.В. Котова

Про наближення періодичних функцій поліномами Стечкіна.

У статті дано негативну відповідь на припущення про оцінку знизу наближення періодичних функцій поліномами Стечкіна. Тим самим доведено, що ці поліноми істотно відрізняються від класичних поліномів Джексона.

Ключові слова: *тригонометричні поліноми Стечкіна, формули Кардано, модуль гладкості періодичної функції, простір* $\mathbb{C}^*$.

Донецкий национальный ун-т
butkot83@mail.ru

Получено 19.03.11