УДК 517.5

©2010. **Т.В. Ломако**

О КОМПАКТНОСТИ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ТИПА

В работе исследуются классы регулярных решений уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа на их комплексные характеристики. Приведены достаточные условия компактности таких классов.

Ключевые слова: *уравнения Бельтрами, компактность, регулярное решение, классы Соболева.*

1. Введение. Всюду далее D – область в $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\operatorname{dist}(E, F)$ – евклидово расстояние между множествами E и F в $\mathbb{C}$. Обозначим через h **сферическое (хордальное) расстояние** между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$: $h(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$, $h(z_1, z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$, $z_1, z_2 \neq \infty$. **Сферическим диаметром множества** E в $\overline{\mathbb{C}}$ называется величина $h(E) = \sup\limits_{z_1, z_2 \in E} h(z_1, z_2)$. В дальнейшем $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = \left(1 + |z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается **элемент сферической площади** в $\overline{\mathbb{C}}$, соответственно, через L_s^1 – класс всех функций $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади. Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ – произвольные множества. Через $\Delta(E, F, D)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Уравнениями Бельтрами называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z\,, \tag{1}$$

где $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется **комплексным коэффициентом** и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

– **максимальной дилатацией** или просто **дилатацией** уравнения (1).

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется **регулярным в точке** $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{loc}$ называется **регулярным**, если $J_f(z) \neq 0$ п.в. Наконец, **регулярным решением** уравнения Бельтрами (1) в области D будем называть регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) п.в. в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [1].

Приведем элементы теории инвариантно-выпуклых множеств, см. приложение А в [2].

Пусть $\mathcal{G}$ группа всех дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя. Множество M из $\mathbb{D}$ называется **инвариантно-выпуклым**, если все множества $g(M)$, $g \in \mathcal{G}$, являются выпуклыми. В частности, такие множества являются выпуклыми.

Инвариантно-выпуклой оболочкой inv co M множества M из $\mathbb{D}$, $\overline{M} \subseteq \mathbb{D}$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M. Согласно теореме A2 в [2]

$$\text{inv co } M = \bigcap_{|\eta|=1} K_M(\eta), \tag{3}$$

где через $K_M(\eta)$ обозначен **опорный круг**, касающийся $\partial\mathbb{D}$ в точке η. Здесь замкнутый круг K из $\overline{\mathbb{D}}$, касающийся $\partial\mathbb{D}$, называется опорным к множеству M, если $M \subseteq K$ и $\partial K \bigcap \partial M \neq 0$.

Инвариантно-выпуклые множества являются строго выпуклыми множествами, т.е. их границы не могут содержать отрезков прямых, см. предположение A1 в [2]. Таким образом, все граничные точки таких множеств являются крайними, т.е. не являются внутренними точками никакого отрезка с концами, принадлежащими этому множеству.

Граничную точку произвольного множества M, $\overline{M} \subseteq \mathbb{D}$, назовем **инвариантно-крайней**, если на некоторой опорной окружности $\partial K_M(\eta)$, $|\eta| = 1$, она является ближайшей из ∂M к η по или против часовой стрелки. Множество всех инвариантно-крайних точек M в дальнейшем обозначается через inv ext M.

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL, заданный в некоторой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, будем называть $Q(z)-$квазиконформным ($Q(z)-$к.к.) отображением, если его дилатация

$$K_{\mu_f}(z) \leq Q(z) \qquad \text{п.в.}, \tag{4}$$

где $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ – произвольная функция. Здесь $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$ и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$.

Отметим, что понятие $Q(z)-$к.к. отображения, по-видимому, впервые было введено в статье Шиффера М. – Шобера Г. [3] для случая, когда $Q(z) \in L^{\infty}$, т.е. фактически для $Q-$к.к. отображений, где $Q = ||Q(z)||_{\infty}$.

В работах Андриян-Казаку К., Волковыского Л.И., Иоффе М.С., Крушкаля С.Л., Кюнау Р., Летинена М., Ренельта Г., Тейхмюллера О., Шиффера М., Шобера Г. и других авторов исследовались классы $Q(z)$-к.к. отображений, для которых

$$\mu(z) \in \Delta_{q(z)} \quad \text{п.в.}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_{q(z)} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leq q(z)\}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

$$q(z) = (Q(z) - 1) \,/\, (Q(z) + 1)\,, \tag{7}$$

а также классы с дополнительными ограничениями вида:

$$\mathcal{F}(\mu(z), z) \leq 0 \quad \text{п.в.}, \tag{8}$$

где $\mathcal{F}(\mu, z) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Наконец, последняя из постановок Шиффера М. – Шобера Г. привела к рассмотрению классов с ограничениями общего теоретико-множественного вида:

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \quad \text{п.в.}. \tag{9}$$

Однако все это развитие происходило, фактически, в рамках $Q-$к.к. отображений, поскольку предполагалось, что

$$ess\sup Q(z) = Q < \infty. \tag{10}$$

Теорема существования и единственности Давида [4] позволила продвинуться много дальше в указанном направлении. Именно, обозначим $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих условию (9), но где, вообще говоря, не выполнено (10). Через H_M $(\widetilde{H_M})$ обозначим совокупность всех гомеоморфизмов плоскости $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса ACL (соответственно $W^{1,1}_{loc}$) с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$.

В работе [2] была доказана компактность класса H_M с $Q(z)$, экспоненциально ограниченной по мере. В настоящей статье ставится задача доказать компактность класса регулярных гомеоморфизмов $\widetilde{H_M}$ с более общими условиями на $Q(z)$.

2. Вспомогательные утверждения. Для формулировки некоторых утверждений нам потребуется понятие кольцевого Q-гомеоморфизма, которое мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и тесно связано с решением вырожденных уравнений Бельтрами на плоскости, см., напр., работу [5].

Напомним, что борелева функция $\rho : \overline{\mathbb{C}} \to [0, \infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых Γ в $\overline{\mathbb{C}}$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz| \ \geq\ 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. **Модуль** семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{D} \rho^2(z)\,dxdy\,.$$

Пусть $Q : D \to [0,\, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке** $z_0 \in D$, если соотношение

$$M(\Delta(fS_1,\, fS_2,\, fD)) \leq \int\limits_{A} Q(z)\,\eta^2(|z - z_0|)\,dxdy$$

выполнено для любого кольца $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, окружностей $S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1$.

Следующее утверждение можно найти используя лемму 20.9.1 в [6] через теорему 2.1 в [7], ср. следствие 3.1 в [8]:

Предложение 1. Любой регулярный гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является кольцевым Q–гомеоморфизмом с $Q(z) = K_\mu(z)$, $\mu = \mu_f$ во всех точках области D.

Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Обозначим через $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ класс всех кольцевых $Q-$гомеоморфизмов f в области $D \subseteq \mathbb{C}$, таких что $h\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)\right) \geq \Delta > 0$. Напомним лемму 3.2 из статьи [7]:

Предложение 2. Если для некоторых $0 < \varepsilon_0 < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ и $p < 2$

$$\int\limits_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} Q(z) \cdot \psi^2(|z - z_0|) dm(z) \leq c \cdot I^p(\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \tag{11}$$

где $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, $0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$ $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то

$$h(f(z),\, f(z_0)) \leq \frac{32}{\Delta} \exp\left\{-\left(\frac{2\pi}{c}\right) I^{2-p}(|z - z_0|)\right\}$$

для любых $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ и $z \in B(z_0, \varepsilon_0)$.

Приведем также формулировку предложения 3.1 из работы [9]:

Предложение 3. Пусть D – область в $\overline{\mathbb{C}}$ и пусть $f_n : D \to \overline{\mathbb{C}}$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность гомеоморфизмов таких, что $f_n \to f$ равномерно на компактах в D относительно сферической метрики. Если предельное отображение f является дискретным, то f – гомеоморфизм.

Кроме того, отметим следующий важный факт, см. теорему 1.3 в [10]:

Предложение 4. Если f – регулярный гомеоморфизм с $K_\mu \in L^1_{loc}$, то $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}$ и $f^{-1}_w = 0$ п.в., где $J_{f^{-1}}(w) = 0$.

Наконец, нам будет полезна следующая теорема, см. теорему 3 в [2], а также замечание 3.1 в [9]:

Предложение 5. Пусть $f_m : D \to \mathbb{C}$ – последовательность сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов класса $W^{1,1}_{loc}$, сходящаяся локально равномерно к f в D, такая что $K_{\mu_{f_m}} \leq Q(z) \in L^1_{loc}$. Если f – гомеоморфизм в D, то $f \in W^{1,1}_{loc}$, $K_{\mu_f} \leq Q(z)$ и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо L^1_{loc}. Кроме того, для почти всех $z \in E'$

$$\mu(z) \in \mathrm{inv\ co}\ M(z) \tag{12}$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на $E_0 = \{z \in E' : \mu(z) \in \mathrm{inv\ ext}\ M(z)\}$, где E'– множество всех регулярных точек отображения f и $M(z) = \mathrm{Lim}_{n\to\infty}\{\mu_n(z)\}$.

Здесь, как обычно, через $\mathrm{Lim}\{\mu_n(z)\}$ обозначен верхний топологический предел одноточечных множеств $M_n(z) = \{\mu_n(z)\}$, т.е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, при каждом фиксированном z (см. [11], с. 334).

Замечание 1. В дальнейшем мы также воспользуемся равенством, которое легко проверить непосредственным вычислением,

$$|\partial f|^2 + |\overline{\partial} f|^2 = \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) \tag{13}$$

где как и выше $f = u + iv$.

3. Основные результаты.

Лемма 1. *Пусть* $f_n : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *– последовательность регулярных гомеоморфизмов,* $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(\infty) = \infty$, *сходящаяся локально равномерно в* $\overline{\mathbb{C}}$ *относительно сферической метрики к некоторому отображению* f, *причем* $K_{\mu_{f_n}}(z) \le Q(z) \in L^1_S$. *Тогда* f *– регулярный гомеоморфизм на* $\overline{\mathbb{C}}$ *с нормировками* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Доказательство леммы. Полагая $g_n = f_n^{-1}$ и $u_n = \mathrm{Re}\, g_n$, $v_n = \mathrm{Im}\, g_n$, имеем, ввиду равенства (13), что

$$\begin{aligned} I &:= \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2}{(1+|u_n|^2+|v_n|^2)^2}\, dm(\zeta) = 2\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|\partial g_n|^2 + |\overline{\partial} g_n|^2}{(1+|g_n|^2)^2}\, dm(\zeta) \le \\ &\le 4\int\limits_{\mathbb{C}} |\partial g_n|^2 \frac{dm(\zeta)}{(1+|g_n|^2)^2} = 4\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{1}{1-|\nu_n(\zeta)|^2} J_n(\zeta)\, \frac{dm(\zeta)}{(1+|g_n|^2)^2}\,, \end{aligned} \tag{14}$$

где J_n обозначает якобиан отображения g_n, а ν_n – его комплексную дилатацию. По предложению 4 имеем, что $g_n \in W^{1,2}_{loc}$. Следовательно, g_n локально абсолютно непрерывны и после замены переменных получаем, что

$$I \le 4\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{1}{1-|\mu(z)|^2}\, \frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^2} \le 4\int\limits_{\mathbb{C}} Q(z)\, dS(z) < \infty\,, \tag{15}$$

см. леммы III.2.1 и III.3.2, а также теоремы III.3.1 и III.6.1 в [12] и I.C(3) в [13]. Последняя оценка позволяет нам установить, что предельное отображение f является локально гомеоморфным, а потому и просто гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

Действительно, по теореме I.13.3 в [11] f – непрерывное отображение как равномерный предел непрерывных отображений и, таким образом, последовательность f_n образует равностепенно непрерывное семейство отображений, см., напр., предложение 7.1 в [14]. Пусть

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right).$$

Тогда согласно теореме 9 в [15], с. 62, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$h\left(f_n(z_1),\, f_n(z_2)\right) > \varphi^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{4\pi I}{h^2(z_1,\, z_2)}\right\}\right)$$

как только $h(z_1,\, z_2) < \delta$. Таким образом, при $n \to \infty$ получаем, что

$$h\left(f(z_1),\, f(z_2)\right) > \varphi^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{4\pi I}{h^2(z_1,\, z_2)}\right\}\right) > 0 \tag{16}$$

как только $h(z_1,\, z_2) < \delta$.

Условие (16) влечет, что отображение является дискретным, поскольку расширенная комплексная плоскость – компактное пространство. Поэтому f является гомеоморфизмом по предложению 3.

Покажем, что f – регулярный гомеоморфизм в $D \subset \mathbb{C}$. Заметим, что из локально равномерной сходимости $f_n \to f$ последовательности f_n следует, что $f_n^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно (см., напр., лемму 3.3 в [16]). Таким образом, по теореме 1 в [15], см. (15), получаем, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(D)$. Условие $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(D)$ влечет (N^{-1})–свойство f, см., напр., теорему III.6.1 в [12] и, следовательно, $J_f(z) \neq 0$ п.в. по теореме 1 в [17]. Наконец, $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$ и $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$ п.в. по предложению 5.

В случае $z_0 = \infty$ применяем отображение $\psi(z) = \frac{1}{z}$. $\square$

Применяя предложения 1, 2 и 5, а также теорему Арцела-Асколи, см., напр., [18], с. 68, в качестве следствия леммы 1 получаем следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, такое что*

$$Q_M(z) := \frac{1 + q_M(z)}{1 - q_M(z)} \in L^1_S, \tag{18}$$

где

$$q_M(z) = \max_{\nu \in M(z)} |\nu| \,. \tag{19}$$

Предположим, что $Q(z) = Q_M(z)$ удовлетворяет одному из условий вида (11). Тогда класс $\widetilde{H_M}$ компактен.

Следствие 1. Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство замкнутых инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, такое что выполняется (18). Предположим, что $Q(z) = Q_M(z) \in FMO$, тогда класс $\widetilde{H_M}$ компактен.

1. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, no.10. – P.935–950.
2. *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. – Донецк, 1993. – 281с.
3. *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1976. – **2**. – P.501–531.
4. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1988. – **13**. – P.25–70.
5. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukrainian Math. Bull. – 2007. – **4**, № 1. – P.79–115.
6. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane. – Princeton University Press, 2009. – 677p.
7. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q–гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, №6. – С.1361–1376.

8. *Salimov R.* On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P.285–289.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – **5,** no.4. – 2008. – P.524–535.
10. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. – **180**, no.1. – 2006. – P.75–95.
11. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966. Т.1. – 594с.
12. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane, New York etc.: Springer, 1973. – 258p.
13. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 132с.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, New York: Springer, 2009.
15. *Суворов Г.Д.* Семейство плоских топологических отображений. – Новосибирск: Наука, 1965. – 264с.
16. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the Beltrami equations// Ukr. Math. Bull. – 2010. – **7**, no.4. – P.467–515.
17. *Пономарев С.П.* N^{-1}–свойство отображений и условие (N) Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**, №3. – С.411–418.
18. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math. 299, Berlin etc., Springer–Verl., 1971. – 144p.

T.V. Lomako

Compactness of the classes of solutions for Beltrami equations with restrictions of set-theoretic type.

This paper is devoted to the study of the classes of solutions for Beltrami equations with restrictions of set-theoretic type on the complex characteristics. Sufficient conditions for compactness of such classes are obtained.

Keywords: *Beltrami equations, compactness, regular solution, Sobolev classes.*

Т.В. Ломако

Про компактність класів розв'язків рівнянь Бельтрамі з обмеженнями теоретико-множинного типу.

У роботі досліджуються класи регулярних розв'язків рівнянь Бельтрамі з обмеженнями теоретико-множинного типу на їх комплексні характеристики. Наведено достатні умови компактності таких класів.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, компактність, регулярний розв'язок, класи Соболева.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`tlomako@yandex.ru, tlomako@rambler.ru`

Получено 10.12.10