УДК 531.38

©2010. **М.В. Войтович**

ПРИМЕРЫ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСИЛЕННОЙ КОЭРЦИТИВНОСТЬЮ

В настоящей заметке приводятся примеры неограниченных обобщенных решений нелинейных уравнений четвертого порядка в дивергентной форме с условием усиленной коэрцитивности на коэффициенты. Построенные примеры демонстрируют точность полученных ранее результатов о повышении суммируемости обобщенных решений уравнений из указанного класса.

Ключевые слова: *нелинейные эллиптические уравнения четвертого порядка, усиленная коэрцитивность, неограниченные обобщенные решения.*

1. Введение. В настоящей заметке рассматриваются уравнения, принадлежащие классу нелинейных уравнений высокого порядка вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha \mathcal{A}_\alpha(x,u,\ldots,D^m u) = 0 \ \text{ в } \Omega, \ \ m>1, \tag{1}$$

с коэффициентами удовлетворяющими условию усиленной коэрцитивности в форме

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \mathcal{A}_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant C\left\{\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p\right\}. \tag{2}$$

Здесь Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $p\geqslant 2$, $mp<q<n$ и $C>0$. Также предполагается выполнение соответствующих условий роста коэффициентов A_α, которые позволяют определить обобщенное решение уравнения (1), как элемент пространства $W^{m,p}(\Omega)\cap W^{1,q}(\Omega)$.

Существенность условия (2) состоит в том, что оно, в отличии от более слабого и обычно предполагаемого условия эллиптичности (см., например, [1]), обеспечивает ограниченность и непрерывность по Гельдеру решений уравнения (1), если размерность области Ω достаточно велика. Этот факт установлен в работе [2] с помощью некоторой модификации метода Мозера. Основываясь на других идеях, а именно используя аналог метода Стампаккья [3–5], в работах [6] и [7] для нелинейных уравнений вида (1) с усиленной коэрцитивностью, установлено более слабое условие относительно интегрируемости данных, обеспечивающее ограниченность обобщенных решений, а также получены результаты, показывающие как повышается суммируемость этих решений в зависимости от изменения показателя интегрируемости данных.

В данной статье приводятся примеры неограниченных обобщенных решений нелинейных уравнений вида (1) с $m=2$, удовлетворяющих условию (2). Эти примеры показывают, что установленные в [6] и [7] достаточные условия повышенной суммируемости и ограниченности обобщенного решения задачи Дирихле для рассматриваемых уравнений являются точными.

2. О суммируемости решений нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью. В этом пункте приведем, установленную в [6], теорему о повышении суммируемости обобщенных решений нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной коэрцитивностью.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Через Λ обозначим множество всех n-мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$. Будем использовать еще такие обозначения: $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi : \Lambda \to \mathbb{R}$; если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u : \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Пусть $p \in (1, n/2)$ и $q \in (2p, n)$. Через $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Положим $q^* = nq/(n-q)$. Как известно (см., например, [8, гл.7]),

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega), \tag{3}$$

и существует положительная постоянная c, зависящая только от n и q, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leqslant c \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u|^q dx \right)^{1/q}. \tag{4}$$

Далее, пусть $c_1, c_2, c_3 > 0$, g_1, g_2, g_3 – неотрицательные суммируемые функции на Ω, и пусть для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \to \mathbb{R}$ – функция Каратеодори. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)} \leqslant c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \tag{5}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_2(x), \tag{6}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_3 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_3(x). \tag{7}$$

Пусть
$$f \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega). \tag{8}$$
Рассмотрим следующую задачу Дирихле:
$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{9}$$
$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{10}$$

Заметим, что в силу неравенств (5) и (6) для любых функций u, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$ функция $A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v$ суммируема на Ω. Кроме того, из (3) и (8) вытекает, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ функция fv суммируема на Ω.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (9), (10) называется функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$
$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u)\, D^\alpha v \right\} dx = \int_\Omega f\, v\, dx.$$

Заметим, что если дополнительно к сделанным предположениям относительно коэффициентов и правой части уравнения (9) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$ имеет место неравенство
$$\sum_{\alpha\in\Lambda} [A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\xi')]\, (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geqslant 0,$$
то обобщенное решение задачи (9), (10) существует. Это вытекает из известных результатов теории монотонных операторов (см., например, [9, гл.2]).

В силу (3) любое обобщенное решение задачи (9), (10) принадлежит пространству $L^{q^*}(\Omega)$. Однако, если функции g_2, g_3 и f обладают повышенной суммируемостью, то обобщенные решения рассматриваемой задачи имеют более высокую суммируемость, чем та, которая характеризуется показателем q^*. Соответствующую зависимость выражает следующий результат [6].

Теорема 1. *Пусть $r > q^*/(q^*-1)$, функции g_2, g_3, f принадлежат $L^r(\Omega)$ и M – мажоранта для $\|g_2\|_{L^r(\Omega)}$, $\|g_3\|_{L^r(\Omega)}$ и $\|f\|_{L^r(\Omega)}$. Пусть u – обобщенное решение задачи* (9), (10)*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $r < n/q$ и $q^* < \lambda < nr(q-1)/(n-qr)$, то $u \in L^\lambda(\Omega)$ и $\|u\|_{L^\lambda(\Omega)} \leqslant C_1$, где C_1 – положительное число, зависящее только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3, r, M и λ;*

(ii) *если $r = n/q$, то $\int_\Omega \exp{(b\,|u|^{1/\sigma})}\, dx \leqslant C_2$, где $\sigma = 2 + 2np/(q-2p)$, а b и C_2 – положительные числа, зависящие только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3 и M;*

(iii) *если $r > n/q$, то $u \in L^\infty(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u| \leqslant C_3$, где C_3 – положительное число, зависящее только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3, r и M.*

Замечание 1. Утверждения (i), (iii) и, в определенной степени, утверждение (ii) теоремы 1 согласуются с соответствующими свойствами обобщенных решений уравнений второго порядка. В связи с этим см., например, [10, гл. 1, 4].

Замечание 2. Если $p \geqslant 2$, $t > n/q$, $r > n^2/(nq - n + q)$, g_1, g_2, $g_3 \in L^t(\Omega)$ и $f \in L^r(\Omega)$, то ограниченность обобщенных решений задачи (9), (10) следует из [2]. Поскольку $n^2/(nq - n + q) > n/q$, утверждение (iii) теоремы 1 дает более слабое по сравнению с [2] условие относительно суммируемости правой части уравнения (9), при котором обобщенные решения задачи (9), (10) ограничены. Кроме того, это условие ($r > n/q$) совпадает с условием ограниченности обобщенных решений уравнений второго порядка [10].

3. Примеры неограниченных обобщенных решений. Покажем вначале, что утверждение (iii) теоремы 1 не верно, если заменить неравенство $r > n/q$ равенством $r = n/q$. В приводимом ниже примере уравнение вида (9) при $r = n/q$ имеет неограниченное обобщенное решение u_1 такое, что $\int_\Omega \exp(|u_1|)\,dx < \infty$.

Пример 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, $q \in (4, n)$, Ω – шар радиуса $R < 1$ с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем функцию $\eta \in C^\infty([0, R])$, такую что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ на $[0, R]$, $\eta = 1$ на $[0, R/2]$ и $\eta = 0$ на $[3R/4, R]$.

Положим $u_1(x) = \eta(|x|) \ln|\ln|x||$, $f_1 = \Delta^2 u_1 + \Delta_q u_1$, где

$$\Delta^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}, \quad \Delta_q u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{q-2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}.$$

Проверяется, что функция u_1 принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,2}(\Omega)$, а $f_1 \in L^{n/q}(\Omega)$ и $f_1 \notin L^\lambda(\Omega)$ $\forall \lambda > n/q$. При этом функция u_1 является обобщенным решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta^2 u + \Delta_q u = f_1, \tag{11}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

т. е. для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,2}(\Omega)$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{q-2}{2}} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega f_1 v\,dx.$$

Уравнение (11) можно привести к виду (9), причем соответствующие коэффициенты A_α удовлетворяют условиям (5)–(7) с $p = 2$.

Следующий пример показывает, что утверждение (i) теоремы 1 становится неверным, если в этом утверждении $\lambda \geqslant nr(q-1)/(n - qr)$.

Пример 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $q \in (4, n)$, $r \in (\frac{q^*}{q^*-1}, \frac{n}{q})$ и $\theta = \frac{rq-n}{r(q-1)}$. Далее, пусть

$$\sigma_2 = \frac{[(n+\theta-2)\sigma_1 + \theta - 1][n + \theta - 3 + \sigma_1(\theta - 2)]}{(2-\theta)(n+\theta-2)}$$

и σ_1 выбрано так, что $\sigma_2 > 0$. Зафиксируем функцию $\psi \in C^\infty([0,1])$, такую что $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ на $[0,1]$, $\psi = 1$ на $[0,1/2]$ и $\psi = 0$ на $[3/4,1]$.

Рассмотрим в Ω уравнение

$$\mathcal{L}_4 u + \Delta_q u = f_2, \tag{12}$$

где

$$\mathcal{L}_4 u = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left\{\left(\frac{x_k x_l}{|x|^2} + \sigma_1\delta_{kl}\right)\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \sigma_1\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\right\},$$

δ_{ij} – символ Кронекера, $f_2 = \mathcal{L}_4 u_2 + \Delta_q u_2$ и $u_2(x) = |x|^\theta \psi(|x|)$ $\forall x \neq 0$.

Уравнение (12) можно привести к виду (9) так, что соответствующие коэффициенты A_α удовлетворяют условиям (5)–(7).

Непосредственное вычисление функции f_2 показывает, что при $x \neq 0$

$$f_2(x) = \frac{|\theta|^{q-1} n(r-1)}{r|x|^{n/r}} \cdot \chi(x) + Q(x),$$

где χ – характеристическая функция множества $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1/2\}$ и Q ограниченная функция в Ω. Ясно, что $f_2 \in L^\lambda(\Omega) \iff \lambda < r$ и $u_2 \in L^\lambda(\Omega) \iff \lambda < nr(q-1)/(n-rq)$.

Далее, проверяется, что функция u_2 принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,2}(\Omega)$ и является обобщенным решением задачи (12), (10), т. е. для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,2}(\Omega)$ имеем

$$\sum_{k,l=1}^{n}\int_\Omega \left\{\left(\frac{x_k x_l}{|x|^2} + \sigma_1\delta_{kl}\right)\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \sigma_1\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} + \sigma_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_l}\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}\,dx +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{q-2}{2}} \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega f_2 v\,dx.$$

Отметим ещё, что функция $|x|^\gamma$, $2 - n/2 < \gamma < 2$ является обобщенным решением в Ω уравнения $\mathcal{L}_4 u = 0$. Этот факт установлен в [1, гл. 1] и был использован при построении примера 2.

1. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев: Наук. думка, 1973. – 220 с.
2. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравн. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1118.
3. *Stampacchia G.* Regularisation des solutions de problemes aux limites elliptiques a donnees discontinues // Proc. Int. Symp. Linear Spaces, Jerusalem 1960. – 1961. – P. 399–408.
4. *Stampacchia G.* Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // Seminaire de mathematiques superieures n. 16 (ete 1965). – Montreal: Les Presses de l'Universite de Montreal, 1966. – 326 p.
5. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – Москва: Мир. – 1983. – 256 с.

6. *Ковалевский А.А., Войтович М.В.* О повышении суммируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1511–1524.
7. *Войтович М.В.* О свойствах интегрируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью // Труды ИПММ НАН Украины. – Донецк, 2007. – **15**. – С. 3–14.
8. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 513 p.
9. *Lions J.L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.
10. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.

M.V. Voitovich

Examples of unbounded generalized solutions of nonlinear fourth-order equations with strengthened coercivity.

In this note examples of unbounded generalized solutions of nonlinear fourth-order equations in divergence form with strengthened coercivity condition on coefficients are given. These examples demonstrate exactness of previous results on the improvement of summability of generalized solutions of equations from the class under consideration.

Keywords: *nonlinear elliptic fourth-order equations, strengthened coercivity, unbounded generalized solutions.*

М.В. Войтович

Приклади необмежених узагальнених розв'язків нелінійних рівнянь четвертого порядку з підсиленою коерцитивністю.

У цій замітці наводяться приклади необмежених узагальнених розв'язків нелінійних дивергентних рівнянь четвертого порядку, що характеризуються умовою підсиленої коерцитивності на коефіцієнти. Побудовані приклади демонструють точність отриманих раніше результатів про підвищення сумовності узагальнених розв'язків рівнянь із зазначеного класу.

Ключові слова: *нелінійні еліптичні рівняння четвертого порядку, підсилена коерцитивність, необмежені узагальнені розв'язки.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`voytovich@bk.ru`

Получено 19.11.10