УДК 517.952

©2010. **В.П. Бурский, А.А. Зарецкая**

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ

Настоящая работа посвящена нахождению условий однозначной разрешимости одной граничной задачи для общих систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: *системы дифференциальных уравнений первого порядка, краевые задачи.*

1. Введение. Долгое время теория граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных развивалась как теория конкретных граничных задач, и движение от частного к общему проходило внутри направлений, на которые сообразно типу уравнения была разбита теория. Основы общей теории граничных задач безотносительно к типу уравнения были заложены в известной работе М.Й.Вишика [3], в которой граничная задача проявляется в задании области определения некоторого расширения минимального оператора. Эффект нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для несобственно эллиптических уравнений второго порядка был впервые обнаружен А.В.Бицадзе, который указал пример уравнения, для которого однородная задача Дирихле в круге имеет нетривиальное решение.

Как известно, для разрешимости задачи Дирихле с эллиптическим уравнением второго порядка достаточно знать значение функции на границе. Если рассматривается уравнение или система уравнений, как задать "половину функции"? Мы рассматриваем граничную задачу, состоящую в задании мнимой части (векторного) решения. Отметим, что в работе [2] была рассмотрена граничная задача для общей системы первого порядка с постоянными коэффициентами и однородным символом, состоящая в задании на границе четной части решения. В настоящей работе найдены условия на коэффициенты уравнения, необходимые для единственности решения такой граничной задачи для общей (т.е. не обязательно эллиптической) системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и однородным символом.

2. Основной результат. Пусть нам дана система дифференциальных уравнений первого порядка в круге:

$$Lu \equiv A\frac{\partial u}{\partial x_1} + J\frac{\partial u}{\partial x_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \qquad \text{in } \Omega \quad (1)$$

с граничным условием

$$\operatorname{Im} u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где A и I – постоянные матрицы размера $n \times\ n$ с комплексной константой c, $\Omega = \{x : |x| \leq 1\}$– единичный круг в плоскости $\mathbb{R}^2$, а u – комплексная вектор-функция двух вещественных переменных. Ниже мы также будем использовать следующую задачу

$$Lu \equiv \overline{A}\frac{\partial u}{\partial x_1} + I\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$
$$\operatorname{Im}\, u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где черта $\overline{A}$ означает комплексное сопряжение элементов, которую будем называть комплексно-сопряженной к задаче (1), (2). Заметим, что, если задача (1), (2) имеет нетривиальное решение, то и комплексно-сопряженная задача к ней также имеет нетривиальное решение. Пусть $l(\xi) = A\xi_1 + I\xi_2$ – матричный символ оператора L. Очевидно, что уравнение $\det(l(\xi)) = 0$ имеет один корень кратности n. Введем блочные матрицы

$$D_m = \begin{pmatrix} A\cos ms_0 - I\sin ms_0 & A\sin ms_0 + I\cos ms_0 \\ \overline{A}\cos m\overline{s}_0 - I\sin m\overline{s}_0 & \overline{A}\sin m\overline{s}_0 + I\cos m\overline{s}_0 \end{pmatrix},$$

где s_0 такое число, что $\sin s_0 = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}, \cos s_0 = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$, и введем также числа Δ_m– определители этих матриц:

$$\Delta_m = \det\, D_m. \tag{3}$$

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для того, чтобы задача (1), (2) имела нетривиальное решение* u *из пространства* $C^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ *необходимо, чтобы в последовательности* $\{\Delta_m\}_{m=0}^{\infty}$ *определителей (3) нашелся хотя бы один нуль.*

Доказательство. Предположим, что задача (1), (2) имеет нетривиальное решение $u(x_1, x_2) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Пусть $\theta(x) = 1,\ x \in \Omega;\ \theta(x) = 0,\ x \notin \Omega$ – характеристическая функция круга Ω и пусть $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$– любое продолжение вектор-функции u на всю плоскость $\mathbb{R}^2$, т. е. $\theta v|_{\Omega} = u$. Применим оператор L к произведению θv:

$$L(\theta v) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} Av + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} Jv = -\delta_{\partial\Omega}\nu_1 Av - \delta_{\partial\Omega}\nu_2 Jv. \tag{4}$$

Здесь $\delta_{\partial\Omega}$ – мера, сосредоточенная на $\partial\Omega$: $\langle \delta_{\partial\Omega}, \overline{\varphi}\rangle = \int_{\partial\Omega} \varphi(s)ds$. И применим преобразование Фурье к равенству (4), получим (обозначая $\xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$):

$$l(\xi)\,\widehat{\theta v} = i\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\,\xi x}\delta_{\partial\Omega} l(\nu(x)) v dx = i\int\limits_{\partial\Omega} e^{-i\,\xi x(s)}\, l(\nu(x(s)))\, u(x(s)) ds. \tag{5}$$

Домножим равенство (5) слева на $\widetilde{l}(\xi)$, присоединенную матрицу к $l(\xi)$ и воспользуемся ее свойством $\widetilde{l}(\xi)l(\xi) = \det l(\xi)I$:

$$\det(l(\xi))\,\widehat{\theta v} = i\,\widetilde{l}(\xi)\int\limits_{\partial\Omega} e^{-i\,\xi x(s)}\, l(\nu(x(s)))\, u(x(s))\, dx. \tag{6}$$

Замечание. Заметим, что если к уравнению (1) и условию (2) добавить условие $\mathrm{Re}\, u|_{\partial\Omega} = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω. Действительно, если $u|_{\partial\Omega} = 0$, то из равенства (5) получаем $l(\xi)\,\widehat{\theta v} = 0$. Матрица $l(\xi)$ состоит из полиномов первой степени, и она почти для всех $\xi \in \mathbb{C}^2$ имеет обратную, поскольку $\det(l(\xi)) = 0$ на алгебраическом многообразии, имеющем нулевую меру. Отсюда получаем, что $\widehat{\theta v} = 0$ почти для всех $\xi \in \mathbb{C}^2$. Но в силу компактности носителя функции θv, преобразование Фурье $\widehat{\theta v}$ – целая функция, поэтому $\widehat{\theta v}(\xi) \equiv 0$. Берем обратное преобразование Фурье, получим, что $\theta v(x) \equiv 0$, поэтому $u \equiv 0$. По предположению решение – нетривиально, $u \neq 0$, поэтому в соответствии с замечанием 1 имеем $\psi := \mathrm{Re}\ \mathrm{u}|_{\partial\Omega} \neq 0$. Обозначим

$$G(\xi_1, \xi_2) := -\widetilde{l}(\xi_1, \xi_2)\int_{\partial\Omega} e^{-i\xi x}\, l(s)\psi(s)ds. \tag{7}$$

Теперь можно переписать полученное равенство (6) в таком виде:

$$(\xi_1 c + \xi_2)^n\widehat{\theta v} = iG(\xi_1, \xi_2),$$

Введем некоторые обозначения. Определим следующие вектора: $\vec{a} = (\bar{c}, 1), \vec{\tilde{a}} = (-1, c)$. Они ортогональны в $\mathbb{C}^2$. Имеем

$$(\xi, \vec{a})^n\,\widehat{\theta v}(\xi) = iG(\xi).$$

Видно, что при $\xi = \mu\vec{a} + t\vec{\tilde{a}}$ функция двух переменных $G(\xi) = G(\mu\vec{a} + t\vec{\tilde{a}})$ имеет в точке $\mu = (\xi, \vec{a})/(|c|^2 + 1) = 0$ ноль порядка n. Это можно записать так:

$$\begin{cases} G|_{\mu=0} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \mu}|_{\mu=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}|_{\mu=0} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial^{n-1} G}{\partial \mu^{n-1}}|_{\mu=0} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Подставим в систему (8) вместо функции G ее значение (7) и проделаем некоторые вычисления. Для упрощения системы (8) нужно вычислить производные функции G. В равенстве (7) внесем множитель $\widetilde{l}(\xi_1, \xi_2)$ под знак интеграла.

$$G(\xi_1, \xi_2) = \int_{\partial\Omega} -\widetilde{l}(\xi_1, \xi_2)e^{-ix\xi}l(s)\psi(s)ds. \tag{9}$$

Заметим, что только часть $\widetilde{l}(\xi_1, \xi_2)e^{-ix\xi}(= \widetilde{l}(\mu c - t, \mu + tc)e^{i\mu(c\cos s + \sin s)})$ зависит от переменной μ, по которой будет идти дифференцирование в системе (8). Для удобного дифференцирования функции G мы вычислим первые производные от выражения $\widetilde{l}(\xi_1,\xi_2)e^{-ix\xi}$. Воспользуемся простым соотношением

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^n),$$

считая $A = \mu(c^2+1)I, B = (t-\mu c)J$. Из вида матрицы J ясно $((t-\mu c)J)^n = 0$. Соберем все вместе и получим:

$$\mu^n(c^2+1)^n I = (\mu(c^2+1)I)^n - ((t-\mu c)J)^n =$$

$$= (\mu(c^2+1)I + (\mu c - t)J)((\mu(c^2+1)I)^{n-1} + \cdots + ((t-\mu c)J)^{n-1}). \tag{10}$$

Заметим, что в (10) равенство левой и правых частей есть определение присоединенной матрицы, значит $\widetilde{l}(\mu c - t, \mu + tc)$ можно вычислить по формуле:

$$\widetilde{l}(\mu c - t, \mu + tc) = (A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^n).$$

$$\widetilde{l}(\mu c - t, \mu + tc) = \sum_{j=0}^{n-1}(\mu(c^2+1))^{n-1-j}(t-\mu c)^j J^j,$$

$$\widetilde{l}(\mu c - t, \mu + tc)e^{i\mu(c\cos s + \sin s)} = \left[\sum_{j=0}^{n-1}(\mu(c^2+1))^{n-1-j}(t-\mu c)^j J^j\right] e^{i\mu(c\cos s+\sin s)}.$$

Следовательно, можем подсчитать искомые производные произвольных порядков:

$$\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\widetilde{l}(\mu c - t, \mu + tc)e^{i\mu(c\cos s+\sin s)} =$$

$$= \sum_{p=o}^{k} C_p^k \left[\sum_{j=0}^{n-1}(\mu(c^2+1))^{n-1-j}(t-\mu c)^j J^j\right]^{(k-p)} (ic\cos s + i\sin s)^p e^{i\mu(c\cos s+\sin s)} =$$

$$= \sum_{p=o}^{k}\sum_{j=n-1-k+p}^{n-1}(c^2+1)^n - 1 - jJ^j\frac{k!}{p!}C^j_{p-k+n-1}t^{p-k+n-1}(-c)^{k-p-n+1+j}(ic\cos s + i\sin s)^p.$$

Обозначим для простоты записи:

$$W_{p,k} \equiv \sum_{j=n-1-k+p}^{n-1}(c^2+1)^n - 1 - jJ^j\frac{k!}{p!}C^j_{p-k+n-1}t^{p-k+n-1}(-c)^{k-p-n+1+j},$$

Тогда система (8) равносильна следующей системе уравнений.

$$\left\{\begin{array}{c} \int_{\partial\Omega}\sum_{p=0}^{0} W_{p,0}t^{p-o}(ic\cos s + i\sin s)^p e^{-it(c\cos s+\sin s)}l(s)\psi(s)ds = 0,\\ \int_{\partial\Omega}\sum_{p=0}^{1} W_{p,1}t^{p-1}(ic\cos s + i\sin s)^p e^{-it(c\cos s+\sin s)}l(s)\psi(s)ds = 0,\\ \int_{\partial\Omega}\sum_{p=0}^{2} W_{p,2}t^{p-2}(ic\cos s + i\sin s)^p e^{-it(c\cos s+\sin s)}l(s)\psi(s)ds = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int_{\partial\Omega}\sum_{p=0}^{n-1} W_{p,n-1}t^{p-n+1}(ic\cos s + i\sin s)^p e^{-it(c\cos s+\sin s)}l(s)\psi(s)ds = 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

Возьмем m-тую производную по t k-той строчки, $\forall m \in \mathbf{N}$:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{p=0}^{k} W_{p,k} (ic\cos s + i\sin s)^p l(s)\psi(s) e^{-it(c\cos s + \sin s)} \cdot$$
$$\cdot \sum_{r=0}^{\min\{p-k,m\}} C_r^m \frac{(p-k)!}{(p-k-r)!} t^{p-k-r} (ic\cos s + i\sin s)^{m-r} ds = 0, \quad (12)$$

Упрощая и учитывая, что это равенство выполняется для всех t, получим:

$$\sum_{p=0}^{k} \sum_{r=0}^{\min\{p-k,m\}} W_{p,k,m,r} \int_{\partial\Omega} (c\cos s + \sin s)^{m-r+p} l(s)\psi(s) ds = 0,$$

здесь

$$W_{p,k,m,r} = \sum_{j=n-1-k+p}^{n-1} (c^2+1)^n - 1 - j J^j \frac{k!}{p!} C_{p-k+n-1}^{j} t^{p-k+n-1} (-c)^{k-p-n+1+j} C_r^m \frac{(p-k)!}{(p-k-r)!}.$$

Число $m - r + p$ пробегает весь натуральный ряд, поэтому, если переобозначить $m := m - r + p$, то $\forall m \in \mathbf{N}$ верно такое равенство:

$$\int_0^{2\pi} (c\cos s + \sin s)^m l(s)\psi(s) = 0. \quad (13)$$

Так как m произвольно, то вместо выражения в скобках можно подставить произвольный многочлен от аргумента $(c\cos s + \sin s) = \cos(s - s_0)$. Мы будем использовать полином Чебышева $T_m : \ T_m(\cos\alpha) = \cos m\alpha$.

$$\int_0^{2\pi} T_m(\cos(s - s_0)) l(s)\psi(s) = \int_0^{2\pi} \cos m(s - s_0) l(s)\psi(s) = 0, \quad (14)$$

Распишем более подробно множители, входящие в интеграл. А функцию $\psi(s)$ разложим в ряд Фурье.

$$l(s) = A\cos s + I\sin s, \quad \psi(s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \psi_{1,\alpha} \cos\alpha s + \psi_{2,\alpha} \sin\alpha s,$$

$$\cos m(s - s_0) = \cos ms \, \cos ms_0 + \sin ms \, \sin ms_0.$$

Теперь подставим эти разложения в интеграл (14) и вычислим его.

$$(A\cos ms_0 + I\sin ms_0)\psi_{1,m-1} + (A\cos ms_0 - I\sin ms_0)\psi_{1,m+1} +$$
$$+ (A\sin ms_0 - I\cos ms_0)\psi_{2,m-1} + (A\sin ms_0 + I\cos ms_0)\psi_{2,m+1} = 0. \quad (15)$$

Пусть, в силу произвольности, $m = 0$, тогда равенство (15) превращается в такое:

$$A\psi_{1,1} + I\psi_{2,1} = 0. \quad (16)$$

Если записать комплексно-сопряженную задачу к рассматриваемой и проделать те же вычисления, можно получить:

$$\overline{A}\psi_{1,1} + I\psi_{2,1} = 0. \tag{17}$$

В системе линейных уравнений (16), (17) относительно $\psi_{1,1}, \psi_{2,1}$ имеется $2n$ строк и $2n$ неизвестных. Решение нетривиально, если определитель этой системы равен нулю. Вычислим его:

$$\begin{pmatrix} c & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \overline{c} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{c} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{c} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Из вторых n строчек вычтем первые n строчек, затем из первых n столбцов вычтем вторые n столбцов, умноженных на c, и, наконец, вычтем из столбцов $2, ..., n-1$ столбцы $n+1, n+2, ..., 2n-1$, получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ kI & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где через k мы обозначаем $2\mathrm{Im} c$.

Если $k = 0$, то есть c вещественно, то определитель равен нулю, и значит, необходимость доказана. Предположим, что c имеет мнимую часть, тогда набор $\psi_{1,1}, \psi_{2,1}$ тривиален, мы его подставляем в систему для $m = 2$ и продолжим в таком же духе. Для произвольного m имеем:

$$\begin{cases} (A\cos ms_0 - I\sin ms_0)\psi_{1,m+1} + (A\sin ms_0 + I\cos ms_0)\psi_{2,m+1} = 0, \\ (\overline{A}\cos m\overline{s}_0 - I\sin m\overline{s}_0)\psi_{1,m+1} + (\overline{A}\sin m\overline{s}_0 + I\cos m\overline{s}_0)\psi_{2,m+1} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Матрицу этой системы мы и обозначили как D_m, а определитель Δ_m выглядит так:

$$\begin{pmatrix} A\cos ms_0 - I\sin ms_0 & A\sin ms_0 + I\cos ms_0 \\ \overline{A}\cos m\overline{s}_0 - I\sin m\overline{s}_0 & \overline{A}\sin m\overline{s}_0 + I\cos m\overline{s}_0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Если в последовательности определителей (21) найдется нулевой элемент, то, по теореме Крамера, существует нетривиальный набор $\psi_{1,m}, \psi_{2,m}$, значит ψ_1, ψ_2 тоже ненулевой, т. е. исходная задача разрешима неоднозначно. Доказательство завершено. $\square$

1. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка, 2002. – 315с.
2. *Бурский В.П.* О краевых задачах для систем однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в круге // Рук. деп. в ВИНИТИ 15 июля 1982 г., 3795-82 Деп., 8 с., реф. РЖМат 1982, 11Б878 Деп.
3. *Вишик М.Й.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат, о-ва. – 1952. – Вып. 1. – С.187-246.

V.P.Burskii, A.A.Zaretskaja

On uniqueness in a boundary value problem for system of equations of the first order.

Present paper is devoted to finding conditions for the unique solvability of a boundary problem for general systems first order differential equations.

Keywords: *system of partial differential equations of first order, boundary value problem.*

В.П.Бурський, А.О. Зарецька

Однозначна розв'язність однієї граничної задачі для загальних систем дифференціальних рівнянь першого порядку в колі.

Цю роботу присвячено знаходженню умов однозначної розв'язності однієї граничної задачі для загальних систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Ключові слова: *системи диференціальних рівнянь першого порядку, крайові задачі.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`seerall@mail.ru`

Получено 05.11.10