УДК 517.5

©2010. **Е.С. Афанасьева**

К ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ, КВАЗИКОНФОРМНЫХ В СРЕДНЕМ, НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В данной статье изучаются отображения, квазиконформные в среднем, на римановых многообразиях с интегральным условием типа $\int\limits_D \Phi(Q(x))\,dv(x) < \infty$. Найденные интегральные условия на функцию Φ являются не только достаточными, но и необходимыми для непрерывного продолжения f на границу.

Ключевые слова: *римановы многообразия; отображения, квазиконформные в среднем; интегральные условия.*

1. Введение. Риманом был определен способ введения метрики через положительно определенную (невырожденную) квадратичную форму, которая в дальнейшем получила название римановой метрики. Однако, понятие "многообразие" было впервые четко введено позже Пуанкаре. В свою очередь, систематическое изучение гладких многообразий началось после 1912 года.

Параллельно этой теории длительное время развивалась и теория отображений в рамках конформных и квазиконформных отображений. Бельтрами, Каратеодори, Кристоффель, Гаусс, Риман и другие внесли свой вклад в развитие теории отображений. Отметим, что конформные отображения и их обобщения играют важную роль в развитии теории потенциала, математической физики, римановых поверхностей и топологии.

В работе [1] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии легло в основу определения так называемых Q-гомеоморфизмов. В последние годы на плоскости и в пространстве активно изучается более широкий класс кольцевых Q-гомеоморфизмов, см., напр., [7], [8], [11]-[13]. Это понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено и использовалось для изучения уравнений Бельтрами на плоскости в работе [12] и распространено в пространство в работе [11].

В теории отображений, квазиконформных в среднем, интегральные условия типа

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\,dm(x) < \infty \tag{1}$$

применяются к различным характеристикам Q этих отображений, см., напр., [3]-[5]. Здесь $dm(x)$ соответствует мере Лебега в области D из R^n, $n \geq 2$. Исследования классов отображений с интегральными условиями (1) также актуальны в связи с недавним развитием теории так называемых отображений с конечным искажением, см. соответствующие ссылки, напр., в монографии [8].

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые определения, которые можно найти, напр., в [9]. *n-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ - это хаусдорфово топологическое пространство со счетным базисом, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U, φ), где U – открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ – гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, каждой точке $p \in U$ ставится в соответствие взаимно однозначно набор из n чисел, ее *локальных координат. Дифференцируемое (гладкое) многообразие* – многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны дифференцируемым (гладким) образом. *Римановым многообразием* $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданным на нем метрическим тензором g. *Римановой метрикой на многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$ называется положительно определенное (невырожденное) симметричное тензорное поле:

$$g \;=\; g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

которое определяется только в координатных картах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(v) = g_{kl}(u(v)) \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^j} \quad . \tag{2}$$

Элемент длины на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{3}$$

где g_{ij} – метрический тензор, x^i – локальные координаты.

Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой

$$dv = \sqrt{|det g_{ij}|}\; dx^1 ... dx^n, \tag{4}$$

а *элемент площади* гладкой поверхности H на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой

$$d\mathcal{A} = \sqrt{|det\ g^*_{\alpha\beta}|}\; du_1 ... du_{n-1} \ , \tag{5}$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ – риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} по формуле: $g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u)) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$. Здесь $x(u)$ – гладкая параметризация поверхности H.

Здесь под *гиперповерхностью* на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ понимается непрерывное отображение $H : U \to \mathbb{M}^n$, где U – область в $(n-1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ или более общо U – $(n-1)$-мерное многообразие, например, $(n-1)$-мерная сфера. Если отображение H является гладким, то поверхность называют *гладкой*. Например, геодезическая сфера в нормальной окрестности любой точки риманового многообразия– гладкая поверхность, см. [6].

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ – семейство кривых на n–мерном римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{R}^+},\ n \geq 2$, называется *допустимой* для Γ, если условие

$$\int\limits_{\gamma} \rho\ ds \geq 1 \qquad (6)$$

выполнено для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$, где в соответствии с формулой (3)

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\ dt, \qquad (7)$$

если $x(t)$ – гладкая параметризация кривой γ в локальных координатах.

Конформным модулем семейства кривых Γ называем величину

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in adm\ \Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n dv\ , \qquad (8)$$

где нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям.

Напомним, что *геодезическое расстояние* $d(x, x_0)$ – инфимум длин кривых, соединяющих две точки x и x_0, см. [6], с.94.

Следующая концепция является естественным обобщением кольцевого определения квазиконформных отображений по Герингу.

Пусть D – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, D_* – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ $(n \geq 2)$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Положим $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$ – геодезическое кольцо, где d – геодезическое расстояние на $(\mathbb{M}^n, g)$. Далее $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех путей γ, соединяющих множества E и F в D. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D_*$ - *кольцевой Q-гомеоморфизм в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если

$$M\left(\Delta(f\mathrm{C}_0,\, f\mathrm{C}_1, D_*)\right)\ \leq \int\limits_{A\cap D} Q(x)\cdot \eta^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \qquad (9)$$

выполняется для любого геодезического кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $\mathrm{C}_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)}$ и $\mathrm{C}_1 \subset \mathbb{M}^n \setminus B(x_0, r_2)$ и любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq 1$. Будем также говорить, что f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в D, если (9) выполнено для всех точек $x_0 \in \overline{D}$.

Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что любая жорданова область D локально связна в любой своей граничной точке, см. [2] с.66.

Будем также говорить, что граница ∂D – *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq P \tag{10}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Будем говорить, что граница области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если, для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq \delta \tag{11}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Граница ∂D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы, см. [10].

Пусть $A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ определяет геодезическое кольцо на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$,

$$A = A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0) = \{x \in D : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}, \tag{12}$$

где D – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in \partial M^n} d(x, x_0)$.

Аналог следующей леммы был получен в [13] для кольцевых $Q-$гомеоморфизмов в метрических пространствах. Сформулируем следующее утверждение для римановых многообразий.

Лемма 1. *Пусть область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ – компакт, а $f : D \to D_*$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0 такой, что ∂D_* сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \{y \in \mathbb{M}^n_* : \ y = \lim_{k \to \infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in D\}, \tag{13}$$

$Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{D_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^n_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))\, dv(x) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{14}$$

для любого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$ при $\varepsilon \to 0$, где $d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$, $D_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$, и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ – семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) \colon = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt \ < \ \infty \qquad \forall \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \ \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)). \tag{15}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g')$.

Теорема 1. *Пусть область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ – компакт, а $f : D \to D_*$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0 такой, что ∂D_* сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \{y \in \mathbb{M}^n_* : \ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in D\}\,, \tag{16}$$

$Q : D \to [0, \infty]$ *– измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty, \tag{17}$$

для любого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$ при $\varepsilon \to 0$, где $d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, $q_{x_0}(t)$ - среднее значение по пересечению геодезической сферы $S(x_0, r)$ с областью D. Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g')$.

Теорема 1 получается из леммы 1 специальным выбором функционального параметра $\psi(t) = \frac{1}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}$.

Если неравенство $v(\Omega)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \le cA(\partial\Omega)$ выполняется для любого замкнутого гладкого подмногообразия Ω в $\mathbb{M}^n$ при некотором $\nu > 1$, то число ν называется *изопериметрической размерностью* $\mathbb{M}^n$. Известно, см. [14], что тогда

$$\liminf_{r\to\infty} v(B(x, r)) \cdot r^{-\nu} > 0. \tag{18}$$

3. Основные результаты. Напомним, что функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ называется *выпуклой*, если $\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2)$ для всех t_1, $t_2 \in [0, \infty]$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Лемма 2. *Пусть $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \ge 2$, - риманово многообразие изопериметрической размерности $\nu > 1$, $Q : \mathbb{M}^n \to [0, \infty]$ – измеримая функция и $\Phi : [0, \infty] \to (0, \infty]$ – возрастающая выпуклая функция такая, что*

$$M(\varepsilon) = ⨍_{A(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)} \Phi(Q(x))dv < \infty. \tag{19}$$

Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \ge \frac{1}{\nu} \int\limits_{e^{\frac{\nu}{\alpha}}M(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^\nu}} \frac{d\tau}{\tau[\Phi_p^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall\ p \in (0, \infty), \tag{20}$$

где $q(r)$ – среднее значение функции $Q(x)$ над геодезической сферой $S(r) = S(x_0, r) = \{x \in D : d(x, x_0) = r\}$ и постоянная α зависит от x_0 и ε_0.

Заметим, что здесь $M(\varepsilon) \to M(0)$ при $\varepsilon \to 0$, где $M(0)$ - среднее значение функции $\Phi \circ Q$ по шару $B(x_0, \varepsilon_0)$.

Доказательство. Пусть

$$H_p(t) := \log \Phi_p(t), \tag{21}$$

где $\Phi_p(t) = \Phi(t^p),\ p \in (0, \infty)$, Видим, что

$$H_p^{-1}(\eta) := \Phi_p^{-1}(e^\eta), \quad \Phi_p^{-1}(\tau) = H_p^{-1}(\log \tau). \tag{22}$$

Таким образом, получаем следующее равенство

$$q^{\frac{1}{p}}(r) = H_p^{-1}\left(\log \frac{h(r)}{r^\nu}\right) = H_p^{-1}\left(\nu \log \frac{1}{r} + \log h(r)\right) \qquad \forall\ r \in R_*, \tag{23}$$

где $h(r) = r^\nu \Phi(q(r)) = r^\nu \Phi_p(q^{\frac{1}{p}}(r))$ и $R_* = \{r \in (\varepsilon, \varepsilon_0) : q^{\frac{1}{p}}(r) > 0\}$. Тогда также

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) = H_p^{-1}(\nu s + \log h(e^{-s})) \qquad \forall\ s \in S_*, \tag{24}$$

где $S_* = \{s \in (\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}) : q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) > 0\}$. Далее, по неравенству Йенсена и выпуклости Φ, см. также (18), имеем, что

$$\int\limits_{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} h(e^{-s}) ds = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} h(r)\ \frac{dr}{r} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \Phi(q(r)) r^{\nu-1} dr \leq \tag{25}$$

$$\leq \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\fint\limits_{S(r)} \Phi(Q(x)) d\mathcal{A} \right) r^{\nu-1} dr \leq \frac{M(\varepsilon)}{\alpha},$$

где постоянная α зависит от x_0 и ε_0.

Рассуждая от противного, получаем из (25), что

$$|T| = \int\limits_T ds \leq \frac{1}{M(\varepsilon)} \int\limits_{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} h(e^{-s}) ds \leq \frac{1}{\alpha}, \tag{26}$$

где $T = \{s \in (\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}) : h(e^{-s}) > M(\varepsilon)\}$. Далее будет показано, что

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) \leq H_p^{-1}(\nu s + \log M(\varepsilon)) \qquad \forall\ s \in \left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_*, \tag{27}$$

где $T_* = T \cap S_*$. Заметим, что $\left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_* = [\left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*] \cup [(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus T] = [\left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*] \cup [S_* \setminus T]$. Неравенство (27) выполнено для $s \in S_* \setminus T$ по (24), так как H_p^{-1} является неубывающей выпуклой функцией. Заметим также, что

$$e^{\nu s} M(\varepsilon) > \Phi(0) \qquad \forall\ s \in \left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{28}$$

и тогда по (22)

$$0 < \Phi_p^{-1}(e^{\nu s} M(\varepsilon)) = H_p^{-1}(\nu s + \log M(\varepsilon)) \qquad \forall\ s \in \left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{29}$$

Следовательно, (27) выполнено также для $s \in \left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon} \setminus S_*\right)$. Таким образом, (27) – верно.

Так как H_p^{-1} – возрастающая выпуклая функция, получаем по (26) и (27), что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r^{\frac{1}{p}} q(r)} = \int\limits_{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{q^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \geq \int\limits_{\left(\log \frac{1}{\varepsilon_0}, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(\nu s + \Delta)} \geq \tag{30}$$

$$\geq \int\limits_{|T_*|}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(\nu s + \Delta)} \geq \int\limits_{\frac{1}{\alpha}}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(\nu s + \Delta)} = \frac{1}{\nu} \int\limits_{\frac{\nu}{\alpha} + \Delta}^{\log \frac{1}{\varepsilon^\nu} + \Delta} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}\ ,$$

где $\Delta = \log M(\varepsilon)$. Заметим, что $\frac{\nu}{\alpha} + \Delta = \log e^{\frac{\nu}{\alpha}} M(\varepsilon)$, а $\log \frac{1}{\varepsilon^\nu} + \Delta = \log \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^\nu}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r^{\frac{1}{p}} q(r)} \geq \frac{1}{\nu} \int\limits_{\log e^{\frac{\nu}{\alpha}} M(\varepsilon)}^{\log \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^\nu}} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} \tag{31}$$

и после замены $\eta = \log \tau$, получено неравенство (20) при $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$.

$\Box$

Замечание. Из леммы 2 следует, что если правая часть (20) расходится, то левая часть (20) тоже расходится.

Комбинируя теорему 1 и лемму 2 при $p = n-1$, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть D и D_* области на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно, где $(\mathbb{M}^n, g)$ имеет изопериметрическую размерность $\nu > 1$. D локально связна на ∂D и D_* имеет сильно достижимую границу. Предположим, что $f : D \to D_*$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с*

$$\int\limits_{D} \Phi(Q(x)) dv < \infty \tag{32}$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$. Если

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{33}$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$, то f имеет непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space. – Int. J. Math. and Math. Sci., 2003, V.22. – p. 1397-1420.
2. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – AMS, New York, 1949. – p. 404.
3. *Golberg A.* Homeomorphisms with finite mean dilatations. – Contemporary Math., 2005. N 382 . – p. 177–186
4. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем. – Матем. сб., 1986. Т. 2, N 130. – p. 185–206.
5. *Крушкаль С. Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем. – Докл. АН СССР, 1964. Т. 3, N 157. – p. 517–519.
6. *John M. Lee* Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. – New York: Springer, 1997.
7. *Ломако Т.В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу. – Укр. мат. журн., 2009. - Т. 6, N 10. – с. 1329–1337.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – Springer, New York, 2009.
9. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Изд-во. МГУ, 1990.
10. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory. – Ukrainian Math. Bull., 2007. V. 4 , N 2. – P. 199–234.
11. *Рязанов В. И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q-$гомеоморфизмов. – Сиб. мат. журн., 2007.
12. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equations. – J. d'Anal. Math., 2005. V.96. – P. 117-150.
13. *Смоловая Е.С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах. – Укр. мат. журн., 2010. Т. 62, N 5. – С. 682-689.
14. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. –New York: Springer, 2001.

O.S. Afanas'eva

To the theory of quasiconformal mappings in the mean on Riemannian manifolds.

In this article quasiconformal mappings in the mean on Riemannian manifolds with integral conditions of the type $\int\limits_D \Phi(Q(x))\,dv(x) < \infty$ are studied. The found integral conditions on the function Φ are not only sufficient but also necessary for continuous extension f to the boundary.

Keywords: *Riemannian manifolds, quasiconformal mappings in the mean, integral conditions.*

О.С. Афанасьєва

До теорії відображень, квазіконформних у середньому, на ріманових многовидах.

У даній статті вивчаються відображення, квазіконформні у середньому, на ріманових многовидах з наступною інтегральною умовою $\int\limits_D \Phi(Q(x))\,dv(x) < \infty$. Знайдені інтегральні умови на функцію Φ є не тільки достатніми, а також необхідними для неперервного продовження f на межу.

Ключові слова: *ріманові многовиди; відображення, квазіконформні у середньому; інтегральні умови.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`es.afanasjeva@yandex.ru`
Получено 10.12.10