

УДК 539.3:534.1

©2010. М.В. Фоменко

## КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОТСУТСТВИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ТОРЦАХ И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ

Рассмотрена трехмерная задача об установившихся колебаниях упругих трехслойных изотропных пластин со свободными от усилий плоскими гранями. На границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Исследованы дисперсионные уравнения, возникающие при построении потенциального и вихревого состояний. Представлены диаграммы спектральных кривых, зависимости фазовых и групповых скоростей мод.

**Ключевые слова:** трехслойная пластина, установившиеся колебания, метод однородных решений, диаграммы спектральных кривых, фазовые и групповые скорости.

**Введение.** Среди многослойных конструкций трехслойные пластины занимают особое место [1–3]. Решение ряда прикладных и некоторых трехмерных задач теории упругости для неоднородных изотропных пластин приведены в монографиях [1, 4–6]. Многие проблемы равновесия и колебания слоистых пластин систематизированы в обзорных статьях [7, 8]. Для решения трехмерных краевых задач теории упругости одним из эффективных является метод однородных решений [2, 3, 6, 9–11]. Характеристики волнового поля в слоистых средах рассчитываются как правило в предположении идеального контакта всех слоев [12]. Однако в горной механике существует понятие поверхностей ослабленного механического контакта [13]. В частности, на границе слоев может иметь место условие полного проскальзывания при неразрывности нормальных компонент смещений и напряжений [14]. Ниже для такого условия решается задача об установившихся кососимметричных колебаниях трехслойной изотропной пластины, плоские грани которой свободны от усилий.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим пластину толщиной  $2h$ , составленную из трех изотропных слоев симметричного строения относительно ее срединной плоскости. Слои пластины находятся в скользящем контакте вдоль плоской границы, а торцы свободны от напряжений. Кососимметричные установившиеся колебания вызваны внешними усилиями, гармонически изменяющимися во времени и приложенными к боковой поверхности. Прямоугольную систему координат  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$  выберем так, чтобы срединная плоскость пластины совпала с координатной плоскостью  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ . Тогда  $|x_3| \leq (h_1 + h_2)$ , причем  $h_1$  – толщина внешних одинаковых слоев,  $2h_2$  – толщина внутреннего слоя. Величины, относящиеся к внешнему слою, будем обозначать индексом (1), а к внутреннему – индексом (2). Физико-механические характеристики материалов слоев обозначим через  $\tilde{G}_m, \nu_m, \rho_m$  ( $m = 1, 2$ ), где  $\tilde{G}_m$  – модуль сдвига, а  $\nu_m$  – коэффициент Пуассона,  $\rho_m$  – плотность материала.

Введем безразмерные координаты и величины соотношениями [11]:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \\ \lambda &= h/R, \quad h = h_1 + h_2, \quad \lambda_1 = h_1/h, \quad \lambda_2 = h_2/h, \\ u_{i(m)} &= \tilde{u}_{i(m)}/R, \quad \sigma_{ij(m)} = \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2) \quad (i, j = \overline{1, 3}; \quad m = 1, 2), \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, \quad G = G_1. \end{aligned}$$

Задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений [9]

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{j(m)} + \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом краевых условий

$$\begin{aligned} \sigma_{i3(1)}|_{x_3=1} &= 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \\ u_{3(1)}|_{x_3=\lambda_2} &= u_{3(2)}|_{x_3=\lambda_2}, \quad \sigma_{33(1)}|_{x_3=\lambda_2} = \sigma_{33(2)}|_{x_3=\lambda_2}, \\ \sigma_{31(1)}|_{x_3=\lambda_2} &= \sigma_{31(2)}|_{x_3=\lambda_2} = \sigma_{32(1)}|_{x_3=\lambda_2} = \sigma_{32(2)}|_{x_3=\lambda_2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Амплитудные значения векторов перемещений представим суммой вихревого и потенциального состояний [10]

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}; \quad m = 1, 2).$$

Потенциальное решение будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{j(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Из выражений (1), (2), (3) следует, что функция  $C(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций  $n_{(m)}(x_3)$ ,  $q_{(m)}(x_3)$  получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} n_{(m)}'' + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' &= 0, \\ q_{(m)}'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)} + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda(1 + \nu_{0(m)})} n_{(m)}' &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} q_{(1)}(1) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(1) &= 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(\lambda_2) = 0, \\ q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(2)}'(\lambda_2) &= 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2), \\ \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(1) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(1) &= 0, \\ G [\gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(\lambda_2)] &= \\ = \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q_{(2)}'(\lambda_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\gamma$  – параметр разделения переменных.

Системы (4) имеют следующие характеристические уравнения:

$$s_{(m)}^4 + s_{(m)}^2 \left( \gamma_{1(m)}^2 + \gamma_{2(m)}^2 \right) + \gamma_{1(m)}^2 \gamma_{2(m)}^2 = 0,$$

в которых  $\gamma_{1(m)}^2 = \Omega_m^2 / (1 + \nu_{0(m)}) + \gamma^2$ ,  $\gamma_{2(m)}^2 = \Omega_m^2 + \gamma^2$ .

Следовательно, общим решением системы (4) являются функции

$$\begin{aligned} n_1(x_3) &= H_1 \cos \gamma_{1(1)} x_3 + H_2 \sin \gamma_{1(1)} x_3 + H_3 \cos \gamma_{2(1)} x_3 + H_4 \sin \gamma_{2(1)} x_3, \\ q_1(x_3) &= Q_1 \sin \gamma_{1(1)} x_3 + Q_2 \cos \gamma_{1(1)} x_3 + Q_3 \sin \gamma_{2(1)} x_3 + Q_4 \cos \gamma_{2(1)} x_3, \\ n_2(x_3) &= H_5 \sin \gamma_{1(2)} x_3 + H_6 \sin \gamma_{2(2)} x_3, \\ q_2(x_3) &= Q_5 \cos \gamma_{1(2)} x_3 + Q_6 \cos \gamma_{2(2)} x_3. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом

$$\begin{aligned} Q_i &= \lambda^{-1} a_i H_i \quad (\overline{1, 6}), \\ a_1 &= -\gamma_{1(1)}, \quad a_2 = \gamma_{1(1)}, \quad a_3 = -\gamma^2 / \gamma_{2(1)}, \\ a_4 &= \gamma^2 / \gamma_{2(1)}, \quad a_5 = \gamma_{1(2)}, \quad a_6 = \gamma^2 / \gamma_{2(2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) в граничные условия (5) с учетом соотношений (7), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка относительно  $H_i$ , аналогичную случаю жесткого сцепления слоев [9]:

$$\begin{aligned} 2\gamma_{1(1)} \sin(\gamma_{1(1)}) H_1 - 2\gamma_{1(1)} \cos(\gamma_{1(1)}) H_2 + \alpha_{2(1)} \sin(\gamma_{2(1)}) H_3 - \\ - \alpha_{2(1)} \cos(\gamma_{2(1)}) H_4 = 0, \\ \kappa_{2(1)}^2 \cos(\gamma_{1(1)}) H_1 + \kappa_{2(1)}^2 \sin(\gamma_{1(1)}) H_2 + 2\gamma^2 \cos(\gamma_{2(1)}) H_3 + 2\gamma^2 \sin(\gamma_{2(1)}) H_4 = 0, \\ \gamma_{1(1)} \sin(\gamma_{1(1)} \lambda_2) H_1 - \gamma_{1(1)} \cos(\gamma_{1(1)} \lambda_2) H_2 + \beta_{2(1)} \sin(\gamma_{2(1)} \lambda_2) H_3 - \\ - \beta_{2(1)} \cos(\gamma_{2(1)} \lambda_2) H_4 + \gamma_{1(2)} \cos(\gamma_{1(2)} \lambda_2) H_5 + \beta_{2(2)} \cos(\gamma_{2(2)} \lambda_2) H_6 = 0, \\ G \kappa_{2(1)}^2 \cos(\gamma_{1(1)} \lambda_2) H_1 + G \kappa_{2(1)}^2 \sin(\gamma_{1(1)} \lambda_2) H_2 + 2G\gamma^2 \cos(\gamma_{2(1)} \lambda_2) H_3 + \\ + 2G\gamma^2 \sin(\gamma_{2(1)} \lambda_2) H_4 - \kappa_{2(2)}^2 \sin(\gamma_{1(2)} \lambda_2) H_5 - 2\gamma^2 \sin(\gamma_{2(2)} \lambda_2) H_6 = 0, \\ 2\gamma_{1(1)} \sin(\gamma_{1(1)} \lambda_2) H_1 - 2\gamma_{1(1)} \cos(\gamma_{1(1)} \lambda_2) H_2 + \alpha_{2(1)} \sin(\gamma_{2(1)} \lambda_2) H_3 - \\ - \alpha_{2(1)} \cos(\gamma_{2(1)} \lambda_2) H_4 = 0, \\ 2\gamma_{1(2)} \cos(\gamma_{1(2)} \lambda_2) H_5 + \alpha_{2(2)} \cos(\gamma_{2(2)} \lambda_2) H_6 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha_{2(m)} = \kappa_{2(m)}^2 / \gamma_{2(m)}$ ,  $\kappa_{2(m)}^2 = \gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2$ ,  $\beta_{2(m)} = \gamma^2 / \gamma_{2(m)}$  ( $m = \overline{1, 2}$ ).

Вычисляя значение определителя системы (8) и приравнявая его к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} F(\gamma, \Omega) &= \frac{\eta}{G^2} \gamma_{1(1)} [\xi_1 C_{11} S_{21} - \tau_1 S_{11} C_{21}] [\xi_2 S_{12} C_{22} - \tau_2 C_{12} S_{22}] + \\ &+ \gamma_{1(2)} [2\xi_1 \tau_1 (C_{11} C_{21} - 1) + (\xi_1^2 + \tau_1^2) S_{11} S_{21}] C_{12} C_{22} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\eta = \rho_1/\rho_2, \quad \xi_m = \left(\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2\right)^2, \quad \tau_m = 4\gamma^2\gamma_{1(m)}\gamma_{2(m)},$$

$$S_{jm} = \sin \gamma_{j(m)}\lambda_m, \quad C_{jm} = \cos \gamma_{j(m)}\lambda_m \quad (j, m = 1, 2).$$

Вихревое решение имеет вид

$$u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2),$$

$$u_{2(m)B} = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{3(m)B} = 0.$$

Здесь  $B(x_1, x_2)$  – метагармоническая функция, являющаяся решением уравнения

$$D^2 B(x_1, x_2) - (\delta/\lambda)^2 B(x_1, x_2) = 0,$$

собственные функции  $p_{(m)k}(x_3)$  находятся из спектральной задачи

$$p_{(m)}''(x_3) + l_{(m)}^2 p_{(m)}(x_3) = 0,$$

$$p'_{(1)}(1) = 0, \quad p'_{(1)}(\lambda_2) = 0, \quad p'_{(2)}(\lambda_2) = 0$$

и получаются такими

$$p_{(1)k}(x_3) = \cos l_{(1)}(1 - x_3), \quad p_{(2)k}(x_3) = \frac{1}{l_{(2)k}} \sin l_{(2)k} x_3, \quad l_{(m)}^2 = \Omega_m^2 + \delta^2.$$

Счетное множество собственных значений  $\delta_k$  определяется в явном виде из дисперсионного уравнения

$$\sin l_{(1)}\lambda_1 \cos l_{(2)}\lambda_2 = 0. \quad (10)$$

Важной характеристикой распространения волн являются частоты запираания [15]. Для их определения полагаем в уравнении (9)  $\gamma = 0$

$$(k_1\Omega_1 c_{11} s_{12} + \eta k_2 \Omega_2 s_{11} c_{12}) s_{21} c_{22} = 0, \quad (11)$$

где

$$s_{1m} = \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m),$$

$$c_{1m} = \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m),$$

$$k_m = \sqrt{(1 - 2\nu_m)/(2 - 2\nu_m)}.$$

Уравнение (11) определяет три независимые серии частот запираания:

$$\Omega_{q(1)}^* = \pi q/\lambda_1, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\Omega_{t(2)}^* = \pi(t - 0,5)/\lambda_2, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$k_1\Omega_1 c_{11} s_{12} + \eta k_2 \Omega_2 s_{11} c_{12} = 0. \quad (14)$$

Частоты (12), (13) получены в явном виде и не зависят от значений коэффициентов Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  в отличие от корней уравнения (14), образующих третье семейство. При некоторых сочетаниях физико-механических характеристик материалов слоев частоты разных серий могут совпадать. Частоты запираения дисперсионного уравнения (10) совпадают с (12), (13).

Для исследования процесса переноса энергии основное значение имеют распространяющиеся моды, соответствующие мнимым участкам дисперсионных ветвей. Важнейшие характеристики распространяющихся мод – фазовая и групповая скорости [15]. В каждой точке ветви кривой безразмерные фазовая и групповая скорости представляются, соответственно, равенствами:

$$v_f = I \Omega / \gamma, \quad v_g = I d\Omega / d\gamma, \quad I = \sqrt{-1}.$$

Безразмерные фазовые и групповые скорости поперечных волн, соответствующих дисперсионному уравнению (10), находятся в явном виде

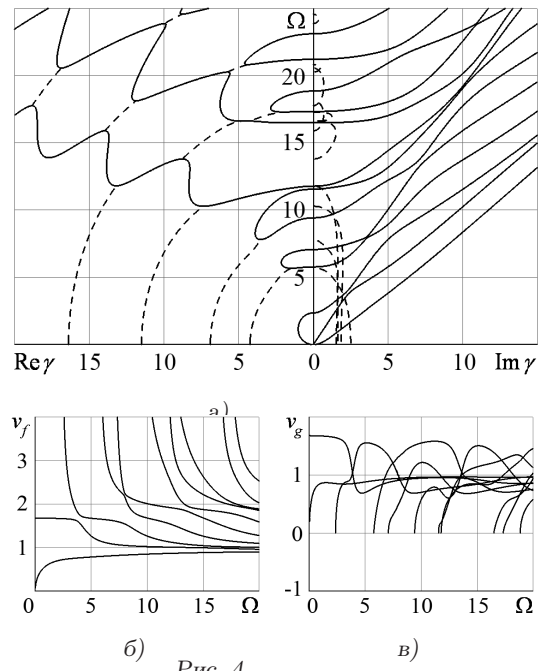
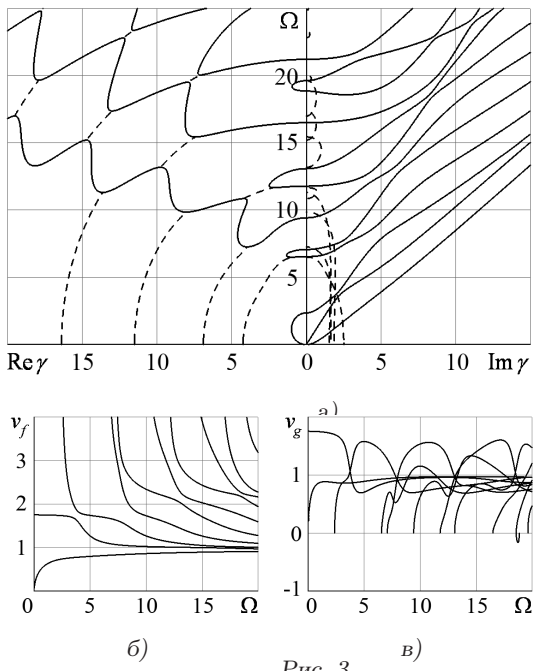
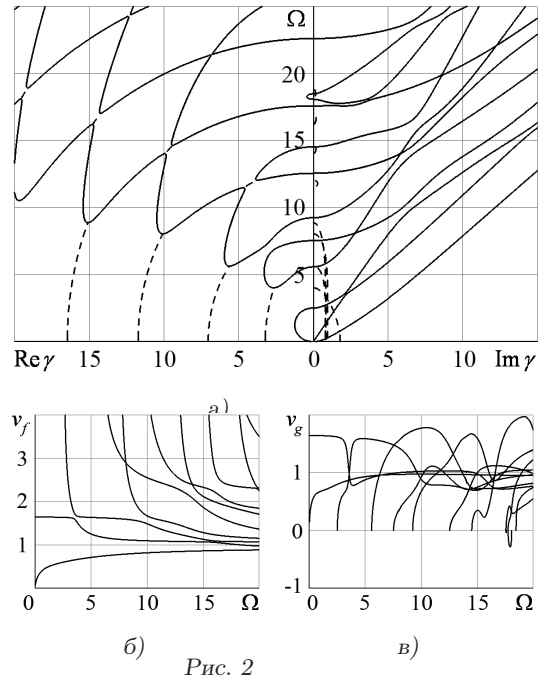
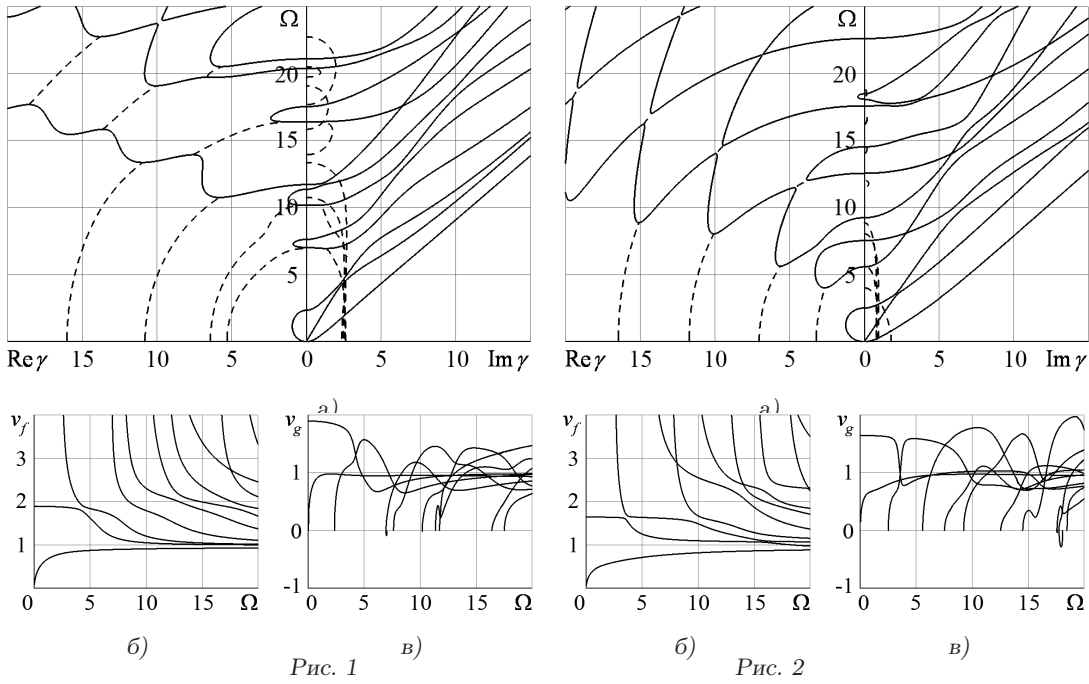
$$v_f = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega_1^2 - (\pi k / \lambda_1)^2}}, \quad v_g = \Omega \frac{\sqrt{\Omega_1^2 - (\pi k / \lambda_1)^2}}{\Omega_1^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v_f = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega_2^2 - (\pi (k - 1/2) / \lambda_2)^2}}, \quad v_g = \Omega \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - (\pi (k - 1/2) / \lambda_2)^2}}{\Omega_2^2}.$$

В случае идеального контакта слоев в работе [9] для нахождения фазовых и групповых скоростей используются приближенные методы.

**Анализ результатов численных исследований.** Расчеты были проведены для пластин из алюминия, для которого  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\tilde{G} = 2,61 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,35$ , и вольфрама, с характеристиками  $\rho = 18,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\tilde{G} = 15,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,29$ . Считалось, что  $\lambda_1 / \lambda_2 = 1/2$ . Рассмотрены четыре варианта: вариант I – внешний слой из алюминия, внутренний из вольфрама; вариант II – внешний слой из вольфрама, внутренний из алюминия; вариант III – все слои из алюминия; вариант IV – слои из вольфрама.

Для дисперсионного уравнения потенциального состояния (9) на рис. 1–4 соответственно для вариантов I–IV приведены спектральные кривые зависимостей параметра  $\gamma$  от частоты  $\Omega$  при заданных параметрах  $G, \eta, \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2$  (рис. 1, а, 2, а, 3, а, 4, а) и частотная зависимость безразмерных фазовых (рис. 1, б, 2, б, 3, б, 4, б) и групповых (рис. 1, в, 2, в, 3, в, 4, в) скоростей распространяющихся мод. На диаграммах дисперсионные кривые, соответствующие действительным и чисто мнимым корням, изображены сплошными линиями. Проекция дисперсионных кривых, отвечающих комплексным корням, на действительную ( $\text{Re}\gamma, \Omega$ ) и мнимую ( $\text{Im}\gamma, \Omega$ ) плоскости – штриховыми линиями. В таблице приведены первые десять ненулевых частот запираения уравнения (9): столбец 1 соответствует данным рис. 1, а; столбец 2 – рис. 2, а; столбец 3 – рис. 3, а; столбец 4 – рис. 4, а. Ячейки таблицы



содержат два значения: в числителе – значения частот записания при неидеальном контакте слоев, а в знаменателе – при идеальном контакте [9].

Из представленных рисунков и таблицы следует, что в трехслойной пластине при скользящем контакте по сравнению с идеальным контактом слоев изменяется характер установившихся колебаний, в частности, изменяются значения и количество частот записания на интервале  $0 \leq \Omega \leq 25$ . В то же время трехслойный изотропный

## Частоты запираания

Номер частоты	Значения частот запираания			
	1	2	3	4
1	2,3419294	2,5105527	2,3561945	2,3561945
	2,1589543	0,8100952	1,5707963	1,5707963
2	7,0257881	5,5784731	6,5397466	5,7765615
	4,9865047	4,9893849	4,7123890	4,7123890
3	7,6247137	7,5316583	7,0685835	7,0685835
	7,3091345	5,5784731	6,5397466	5,7765615
4	10,182332	9,2388068	9,4247780	9,4247780
	7,6247137	8,7831420	7,8539816	7,8539816
5	11,360456	12,552764	11,780972	11,553123
	11,360456	10,549492	10,995574	10,995574
6	11,709647	14,522052	13,079493	11,780972
	11,600395	14,522052	13,079493	11,553123
7	16,393506	17,573869	16,493361	16,493361
	14,933196	14,964377	14,137167	14,137167
8	17,518940	18,070611	18,849556	17,329684
	16,829846	18,070611	17,278760	17,278760
9	20,364664	18,477613	19,619240	18,849556
	17,518940	18,264971	19,619240	17,329684
10	21,077365	22,594975	21,205750	21,205750
	21,028757	20,406053	20,420352	20,420352

волновод, аналогично однослойному, при фиксированной частоте имеет конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней. Фазовая скорость на ненулевых частотах запираания стремится к бесконечности, а групповая скорость равна нулю. Этот факт объясняется тем, что в стоячей волне при  $\gamma = 0$  энергия не переносится. На нулевой частоте запираания групповая и фазовая скорости второй бегущей моды равны между собой и отличны от нуля, а первой моды равны нулю. Поведение групповых скоростей носит более сложный характер, чем фазовых. В частности, четко выражены локальные экстремумы. С ростом номера мнимой ветви количество таких максимумов и минимумов увеличивается. В высокочастотном диапазоне все моды трехслойной пластины становятся бездисперсными. Характерной особенностью исследуемого дисперсионного спектра, в отличие от всех ранее рассмотренных задач [9, 15], является наличие двух ветвей мнимых корней и одной ветви действительных корней с нулевой частотой запираания.

1. Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. Расчет трехслойных конструкций: Справочник. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
2. Алтухов Е. В., Кулиш И. Е. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природ. науки. – 2001. – № 1. – С. 314-321.
3. Ворович И. И., Кадомцев И. Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870-876.
4. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. – Л.: Наука, 1984. – 201 с. .

5. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с.
6. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
7. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
8. Шульга Н. А. Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15-56.
9. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями // Вісник Донецького нац. ун-ту, Сер. А: Природн. науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 117-124.
10. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 230-241.
11. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
12. Бреховских А. М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
13. Крауклис П. В., Крауклис Л. А. Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Математические вопросы теории распространения волн. – 1988. – Вып. 18. – С. 113-122.
14. Заславский Ю. М., Митякова О. И. Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругий слой и полупространство в скользящем контакте // Акустический журнал. – 1992. – Т. 38, вып. 2. – С. 296-303.
15. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.

**M.V. Fomenko**

**Antisymmetric vibrations of three-layer plates under absence of stresses on faces and layers slip.**

The three-dimensional problems of the steady-state vibrations of a three-layer isotropic plates with stress-free plane sides are considered. Conditions of sliding contact are fulfilled on interface of layers. The homogeneous solutions of equations system of motion in the displacements are got. The dispersive equations appearing at construction of potential and whirlwind conditions are researched. Diagrams of spectral curve, dependences of phase and group velocities of modes are presented.

**Keywords:** three-layer plate, steady-state vibrations, method of homogeneous solutions, diagrams of spectral curves, phase and group velocities.

**М.В. Фоменко**

**Кососимметричні коливання тришарових пластин при відсутності напружень на торцях і проковзуванні шарів**

Розглянуто тривимірну задачу про усталені коливання пружних тришарових ізотропних пластин з вільними від зусиль плоскими гранями. На межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту. Отримано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Досліджено дисперсійні рівняння, що виникають при побудові потенційного та вихрового станів. Наведено діаграми спектральних кривих, залежності фазових і групових швидкостей мод.

**Ключові слова:** тришарова пластинка, усталені коливання, метод однорідних розв'язків, діаграми спектральних кривих, фазові та групові швидкості.