УДК 517.5

©2010. **Н.В. Фещенко**

АНАЛОГИ ПРОБЛЕМЫ ЗАЛЬЦМАНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В работе рассматривается аналог проблемы Зальцмана для правильных треугольника и тетраэдра. Полностью разобран случай, когда функция имеет нулевой интеграл по всем правильным треугольникам (тетраэдрам), которые касаются данного внутренним образом. Получен некоторый аналог теоремы Томпсона и Шонбека для дискретного множества параметров α. С помощью доказанных результатов получен новый критерий голоморфности функций для правильного треугольника, доказан результат о полноте некоторой системы функций в L_p, доказан аналог теоремы В. К. Дзядыка, получен новый результат о гомеоморфизмах с N-свойством Лузина.

Ключевые слова: *проблема Зальцмана, функции интегрируемые по Лебегу, голоморфные функции, формула Грина, линейный функционал, теорема Хана-Банаха, теорема Рисса, теорема В. К. Дзядыка, гомеоморфизмы*

Введение. В данной работе рассматриваются аналоги и приложения следующей проблемы, поставленной Л. Зальцманом, которая в свою очередь является актуальной темой в современной интегральной геометрии.

Пусть S – замкнутый единичный квадрат, ∂S – его граница и $S^0 = S \backslash \partial S$. Обозначим через $S(z)$ наибольший замкнутый квадрат в S с центром в точке z из S^0. Для каждого $z \in S^0$ пусть $S_\alpha(z)$ – квадрат, гомотетичный $S(z)$ с центром гомотетии z и линейным коэффициентом α, где $0 < \alpha \leq 1$. Верно ли, что $f \equiv 0$, если f – непрерывная функция на S такая, что интеграл от f над $S_\alpha(z)$ равняется нулю для всех z из S^0?

Зальцман показал, что ответ на этот вопрос утвердительный, в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/3$. Berenstein в обзорной работе [1] о проблеме Помпейю интересовался случаем $\alpha = 1/2$, но не разобрал его. Thompson и Schonbek [2] ответили на этот вопрос положительным ответом для всех $\alpha = \frac{n}{n+2}$, где n – положительное целое число и, в частности, для $\alpha = 1/3$ и $\alpha = 1/2$. Позднее Thompson [3] обобщил этот результат для всех $\alpha \in \left[\frac{3}{4};\ 1\right)$.

В данной работе изучается аналог проблемы Зальцмана для множеств отличных от квадрата. В первом пункте рассматривается случай правильного треугольника на плоскости. Доказан аналог результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$, а также некоторый аналог теоремы Томпсона и Шонбека для дискретного множества параметров α. Во втором пункте рассматривается случай правильного тетраэдра в пространстве. Здесь также доказан аналог результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$.

Кроме того, рассматриваются приложения полученных результатов в комплексном анализе, теории приближений и теории отображений с сохранением меры.

1. Аналог проблемы Зальцмана для правильного треугольника. Введем

Автор выражает благодарность Волчкову В.В. за постановку проблемы и внимание к работе.

некоторые обозначения.

Пусть T – замкнутый правильный треугольник с вершинами A, B, C; ∂T – его граница и $T^0 = T \backslash \partial T$. Обозначим $T(z)$ – наибольший замкнутый правильный треугольник в T с центром в z из T^0. Для каждого $z \in T^0$ пусть $T_\alpha(z)$ – треугольник, гомотетичный $T(z)$ с центром гомотетии z и линейным коэффициентом α, где $-1 < \alpha \leq 1$.

Следующий результат является аналогом результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$.

Теорема 1.1. *Пусть $f \in L(T)$ такая, что интеграл от f над $T(z)$ равняется нулю для всех z из T^0. Тогда $f = 0$.*

Доказательство. Пусть O – центр треугольника T. Соединим точку O с вершинами треугольника T. Таким образом, T разбивается на три треугольника $T^1 = \Delta AOC$, $T^2 = \Delta BOC$ и $T^3 = \Delta AOB$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1.1 пусть $R \subset T^1$ – замкнутый ромб с центром в точке $z \in T^0$ и сторонами параллельными AB и BC. Тогда*

$$\iint_R f\,dx\,dy = 0.$$

Доказательство. Продлим стороны ромба R до пересечения со стороной AC. Получим треугольники $T(z_1)$, $T(z_2)$, $T(z_3)$, $T(z_4)$, для некоторых точек z_1, z_2, z_3, z_4 (см. рис. 1.2). По условию теоремы 1.1 выполнены равенства $\iint_{T(z_i)} f\,dxdy = 0$ при $i \in \{1,2,3,4\}$.

Поэтому,

$$\iint_R f\,dxdy = \iint_{T(z_4)} f\,dxdy - \iint_{T(z_1)} f\,dxdy - \iint_{T(z_2)} f\,dxdy + \iint_{T(z_3)} f\,dxdy = 0.$$

□

Пусть $(\xi_0, \eta_0) \in T^1/\partial T^1$. Рассмотрим функцию

$$F(x,y) = \int_x^{x+a} \int_y^{y+b} f(u,v)\,du\,dv = \iint_A f(x+u, y+v)\,du\,dv,$$

где a, b – фиксированные малые числа, и $A = [0,a] \times [0,b]$. При этом, функцию $F(x,y)$ мы будем рассматривать лишь в окрестности U точки (ξ_0, η_0), целиком лежащей в T^1.

По свойствам интеграла Лебега функция F – непрерывна.

Пусть R – произвольный замкнутый ромб со сторонами параллельными AB и BC, лежащий в U. Тогда по теореме Фубини и лемме 1

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy = \iint_R dx\,dy \iint_A f(x+u,y+v)\,du\,dv$$
$$= \iint_A du\,dv \iint_R f(x+u,y+v)\,dx\,dy = \iint_A du\,dv \iint_{R(\overrightarrow{z})} f(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

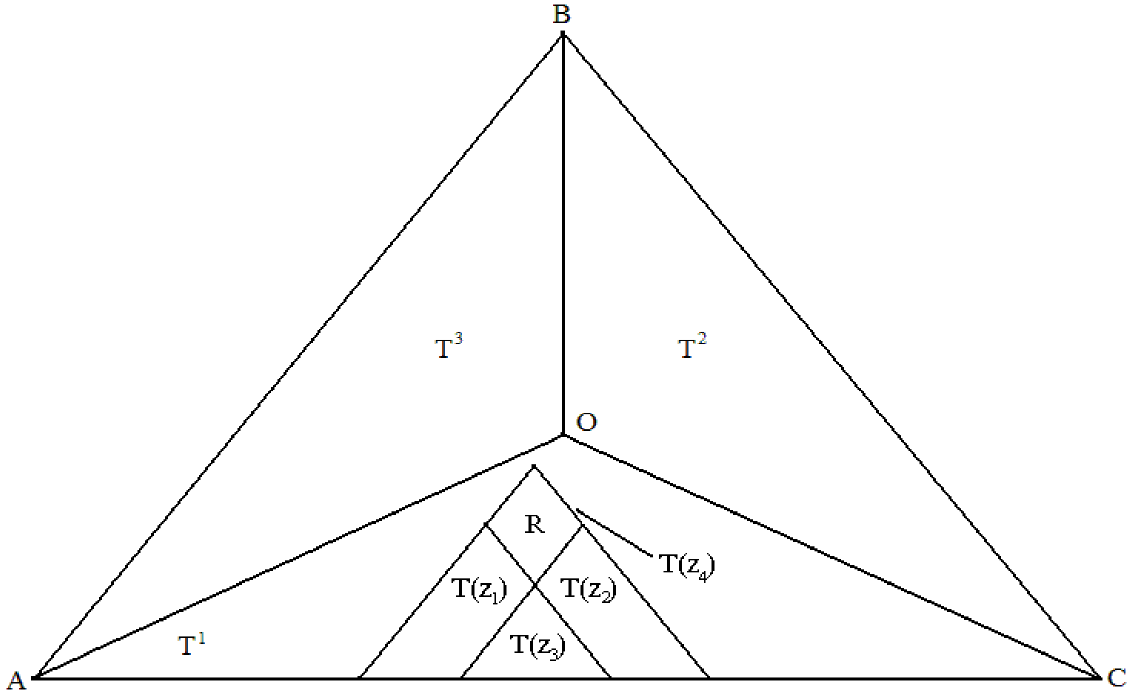

Рис. 1.2

где ромб $R(\overrightarrow{z})$ получается из R параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{z} = (u,v)$.

Пусть (x_0,y_0) точка из U, выберем последовательность ромбов $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ в U, содержащих точку (x_0,y_0), и такую, что $\mathrm{diam} R_n \to 0$ при $n \to \infty$. По доказанному

$$\iint_{R_n} F(x,y)\;dx\,dy = 0 \tag{1}$$

для любого n. Так как F – непрерывная функция, то по теореме о среднем для любого n существует точка $(x_n,y_n) \in R_n$ такая, что

$$\iint_{R_n} F(x,y)\;dx\,dy = F(x_n,y_n)\,\mathrm{meas} R_n.$$

Откуда в силу (1) следует, что $F(x_n,y_n) = 0$. Так как $\mathrm{diam} R_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$ при $n \to \infty$. Поэтому $F(x_0,y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n,y_n) = 0$.

Таким образом, доказано, что

$$\iint_B f(u,v)\,du\,dv = 0$$

для любого прямоугольника B со сторонами параллельными координатным осям, лежащего в U.

Отсюда из общих свойств меры и интеграла Лебега следует, что $f = 0$ п.в. в U. А так как (ξ_0, η_0) – произвольная точка из $T^1/\partial T^1$, то $f = 0$ п.в. в T^1.

Аналогично получаем, что $f = 0$ п.в. в T^2 и T^3, а, следовательно, и в T. $\square$

При $\alpha \neq 1$ пока не удалось получить подобного результата. Но если рассматривать треугольники $T_\alpha(z)$ для двух значений α одновременно, то при некоторых соотношениях между этими значениями результат остается в силе, как показывает следующая

Теорема 1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 = \frac{n}{n+3}$, $\alpha_2 = -\frac{2n}{2n+3}$ и $f \in L(T)$ такая, что интегралы от f над $T_{\alpha_1}(z)$ и $T_{\alpha_2}(z)$ одновременно равняются нулю для всех z из T^0. Тогда $f = 0$.*

Доказательство.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $z \in T^0$ таково, что $T(z) \subseteq T^1$. Тогда в условиях теоремы 1.2 интеграл от f над $T(z)$ равняется нулю.*

Доказательство. Пусть a – это сторона треугольника $T(z)$. Выберем точку $z_{0,1}$ так, чтобы верхняя вершина треугольника $T_{\alpha_1}(z_{0,1})$ совпадала с верней вершиной треугольника $T(z)$. Тогда сторона треугольника $T_{\alpha_1}(z_{0,1})$ равна $\frac{an}{n+1}$. Нижнюю сторону треугольника $T_{\alpha_1}(z_{0,1})$ разобьем на $n+1$ часть и пристроим к ней новые треугольники $T_{\alpha_1}(z_{1,i})$ и $T_{\alpha_2}(\tilde{z}_{1,j})$, где $i = \overline{1,\, n+2}$, $j = \overline{1,\, n+1}$ со сторонами равными $\frac{an}{(n+1)^2}$, как показано на рисунке 1.3.

Далее разбиваем каждую из нижних сторон треугольников $T_{\alpha_1}(z_{1,i})$ на $n+1$ часть и пристраиваем новые треугольники $T_{\alpha_1}(z_{2,i})$, $T_{\alpha_2}(\tilde{z}_{2,j})$, где $i = \overline{1, (n+1)\,(n+2)+1}$, $j = \overline{1,\, (n+1)\,(n+2)}$ со сторонами равными $\frac{an}{(n+1)^3}$ и т.д.

Так как сумма сторон треугольников $T_{\alpha_1}(z_{k,1})$ при $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{an}{(n+1)^{k+1}} = a,$$

то треугольники $T_{\alpha_1}(z_{k,i})$, $T_{\alpha_2}(\tilde{z}_{k,j})$ полностью покрывают треугольник $T(z)$ и, к тому же, попарно не пересекаются.

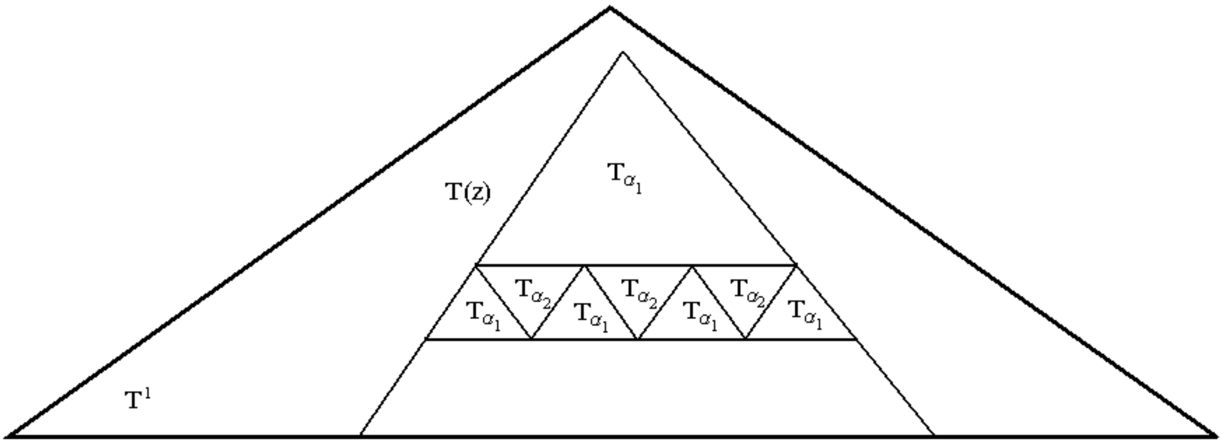

Рис. 1.3

Поэтому,

$$\iint_{T(z)} f\,dxdy = \iint_{T_{\alpha_1}(z_{0,1})} f\,dxdy +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_i \iint_{T_{\alpha_1}\left(z_{k,i}\right)} f\,dxdy + \sum_j \iint_{T_{\alpha_2}\left(\tilde{z}_{k,j}\right)} f\,dxdy\right) = 0.$$

Здесь использовалось то, что интеграл от f над $T_{\alpha_1}(z_{k,i})$, $T_{\alpha_2}(\tilde{z}_{k,j})$ для всех k, i, j равен нулю по условиям теоремы 1.2. □

Теперь теорема 1.2 очевидно следует из леммы 2 и доказательства теоремы 1.1. □

2. Аналог проблемы Зальцмана для правильного тетраэдра.

Теорема 2.2. *Пусть P – замкнутый правильный тетраэдр $ABCS$. Для каждого z из $P^0 = P \backslash \partial P$ обозначим через $P(z)$ – наибольший замкнутый правильный тетраэдр в P с центром в z. Если $f \in L(P)$ такая, что интеграл от f над $P(z)$ равняется нулю для всех z из P^0, то $f = 0$.*

Доказательство.

Пусть O – центр тетраэдра P. Соединим точку O с вершинами тетраэдра P. Таким образом, P разбивается на четыре треугольных пирамиды $P^1 = \Delta ABCO$, $P^2 = \Delta ABSO$, $P^3 = \Delta BCSO$ и $P^4 = \Delta ACSO$.

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *В условиях теоремы 2.2 пусть $R \subset P^1$ – замкнутый параллелепипед с центром в точке $z \in P^0$ и гранями параллельными ABS,BCS и ACS. Тогда*

$$\iint_R f\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Доказательство. Продлим грани параллелепипеда R до пересечения с гранью ABC. Получим тетраэдры $P\left(z_i\right)$ для некоторых точек z_i (см. рис. 2.2). По условию теоремы 2.2

$$\iint_{P(z_i)} f\,dxdydz = 0,$$

при $i \in \{1, \ldots, 8\}$.

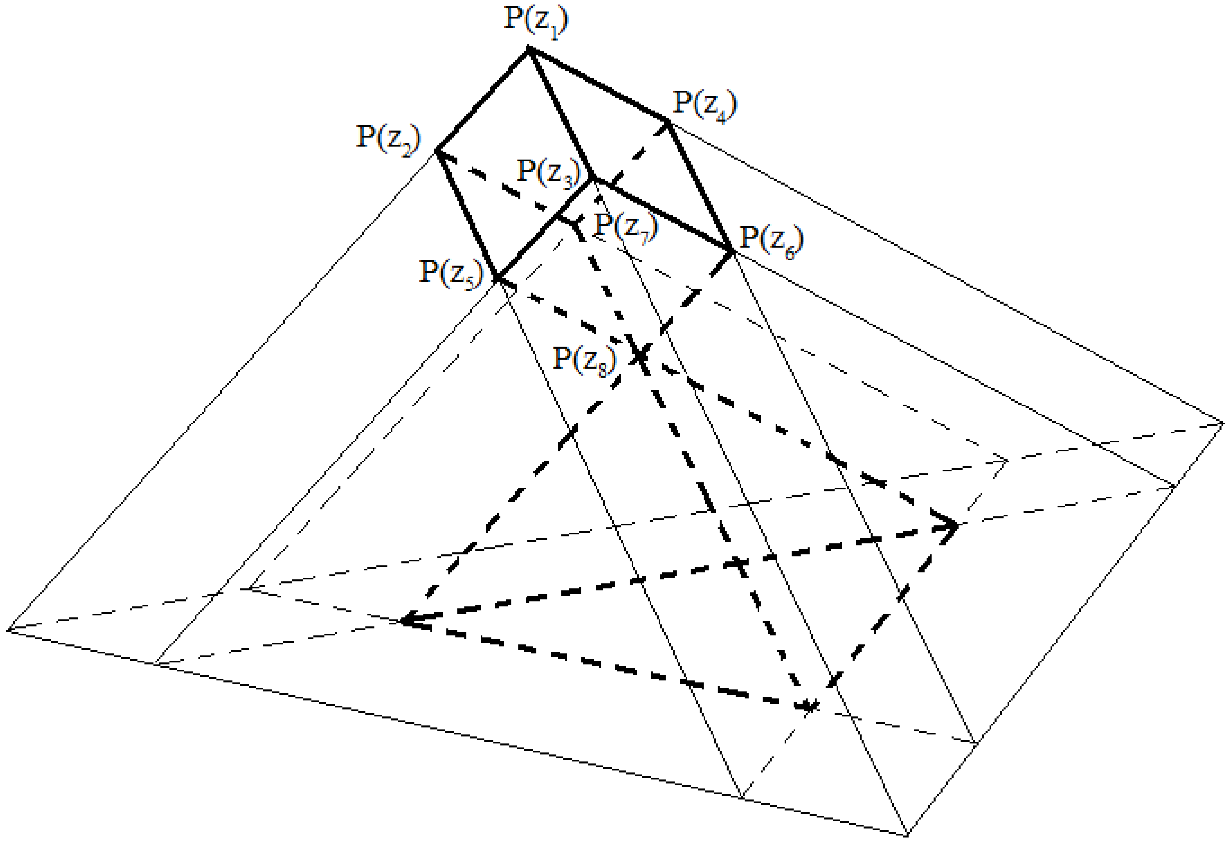

Рис. 2.2

Очевидно, что

$$\iint_{R} f\,dxdydz$$

$$= \iint_{P(z_1)} f\,dxdydz - \left(\iint_{P(z_2)} f\,dxdydz + \iint_{P(z_3)} f\,dxdydz + \iint_{P(z_4)} f\,dxdydz \right) +$$

$$+ \left(\iint_{P(z_5)} f\,dxdydz + \iint_{P(z_6)} f\,dxdydz + \iint_{P(z_7)} f\,dxdydz \right) - \iint_{P(z_8)} f\,dxdydz = 0.$$

□

Пусть $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in P^1/\partial P^1$. Рассмотрим функцию

$$F(x, y, z) = \int_x^{x+a} \int_y^{y+b} \int_z^{z+c} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$
$$= \iiint_A f(x+u, y+v, z+w)\, du\, dv\, dw,$$

где a, b, c – фиксированные числа, и $A = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. При этом, функцию $F(x, y, z)$ мы будем рассматривать лишь в окрестности U точки (ξ_0, η_0, ζ_0), целиком лежащей в P^1.

По свойствам интеграла Лебега функция F – непрерывна.

Пусть R – произвольный замкнутый правильный параллелепипед с гранями параллельными ABS,BCS и ACS, лежащий в U. Тогда по теореме Фубини и лемме 3

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_R dx\, dy\, dz \iiint_A f(x+u, y+v, z+w)\, du\, dv\, dw$$
$$= \iiint_A du\, dv\, dw \iiint_R f(x+u, y+v, z+w)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint_A du\, dv\, dw \iiint_{R(\overrightarrow{z})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

где параллелепипед $R(\overrightarrow{z})$ получается из R параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{z} = (u, v, w)$.

Пусть (x_0, y_0, z_0) точка из U выберем последовательность параллелепипедов $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ в U,содержащих точку (x_0, y_0, z_0), и такую, что $\mathrm{diam} R_n \to 0$ при $n \to \infty$. По доказанному

$$\iiint_{R_n} F(x, y, z)\; dx\, dy\, dz = 0 \tag{2}$$

для любого n. Так как F – непрерывная функция, то по теореме о среднем для любого n существует точка $(x_n, y_n, z_n) \in R_n$ такая, что

$$\iiint_{R_n} F(x, y, z)\; dx\, dy\, dz = F(x_n, y_n, z_n)\, \mathrm{meas} R_n.$$

Откуда в силу (2) следует, что $F(x_n, y_n, z_n) = 0$. Так как $\mathrm{diam} R_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0)$ при $n \to \infty$. Поэтому,

$$F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Таким образом, доказано, что

$$\iiint_B f(u, v, w)\, du\, dv\, dw = 0$$

для любого параллелепипеда B со сторонами параллельными координатным осям, лежащим в U.

Отсюда из общих свойств меры и интеграла Лебега следует, что $f = 0$ п.в. в U. А так как (ξ_0, η_0, ζ_0) – произвольная точка из $P^1/\partial P^1$, то $f = 0$ п.в. в P^1.

Аналогично получаем, что $f = 0$ п.в. в P^2, P^3 и P^4, а, следовательно, и в P. □

3. Применение полученных результатов. Здесь всюду используются обозначения первого пункта.

Следующая теорема представляет собой некоторый критерий голоморфности функций, определенных на правильном треугольнике.

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in C^1(T)$ *и* $\int_{\partial T(z)} f(w)\,dw = 0, \ \forall z \in T^0$. *Тогда* f *голоморфна в* T^0.

Доказательство. По формуле Грина и условию теоремы для любого $z \in T^0$ имеем

$$2i \iint_{T(z)} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\,dxdy = \int_{\partial T(z)} f(w)\,dw = 0.$$

Применяя теорему 1.1, получим $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. А это и значит, что f голоморфна в T^0. □

Теперь мы докажем полноту некоторой системы функций в L_p.

Теорема 3.2. *Множество функций вида* $\chi_{T(z)}$, $z \in T^0$, *где*

$$\chi_{T(z)}(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } w \in T(z), \\ 0, & \text{если } w \notin T(z), \end{cases}$$

является замкнутым в $L_p(T)$ *при* $1 \le p < \infty$.

Доказательство. По следствию из теоремы Хана-Банаха утверждение теоремы 3.2 эквивалентно следующему: для любой функции ϕ линейной и непрерывной на $L^p(T)$ из условия $\langle \phi, \chi_{T(z)} \rangle = 0, \ z \in T$ следует, что $\phi = 0$.

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала

$$\langle \phi, g \rangle = \int_T g(x, y)\ h(x, y)\,dx\,dy,$$

где $h \in L^q(T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p < \infty, \ \ 1 < q \le \infty$.

Так как $\langle \phi, \chi_{T(z)} \rangle = \int_T \chi_{T(z)}(x, y)\ h(x, y)\ dxdy = \int_{T(z)} h(x, y)\ dxdy$ и $\langle \phi, \chi_{T(z)} \rangle = 0$ то $\int_{T(z)} h(x, y)\ dxdy = 0, \ z \in T$. Поскольку $h \in L^q \subset L^1 = L$, то по теореме 1.1 $h = 0$. А значит и $\phi = 0$. □

С помощью полученных результатов можно также получить аналог теоремы В. К. Дзядыка.

Теорема 3.3. *Пусть* $f \in C^1(T)$ *и* $f = u + iv \ \ (u = \mathrm{Re} f, \ v = \mathrm{Im} f)$. *Тогда одна из функций* f *или* $\overline{f}$ *голоморфна в* T^0 *тогда и только тогда, когда площади поверхностей функций* $u, \ v, \ \sqrt{u^2 + v^2}$, *расположенных над любым* $T(z)$, *равны.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы В. К. Дзядыка (см. [4]). Докажем достаточность. Из условия равенства площадей поверхностей функций u, v, $\sqrt{u^2+v^2}$ следует, что

$$\iint_{T(z)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_{T(z)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}dxdy =$$

$$= \iint_{T(z)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial y}\right)^2}dxdy. \qquad (3)$$

Рассмотрим функции

$$g = \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$$

и

$$h = \sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial y}\right)^2}.$$

В силу равенства (3) функции g и h удовлетворяют условию теоремы 1.1. Поэтому, $g \equiv 0$ и $h \equiv 0$. Следовательно,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \equiv \sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} \equiv$$

$$\equiv \sqrt{1+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial y}\right)^2}.$$

А значит,

$$\iint_{E} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_{E} \sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}dxdy =$$

$$= \iint_{E} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

для любого измеримого множества $E \subseteq T$. Поэтому по теореме В. К. Дзядыка одна из функций f или $\overline{f}$ голоморфна в T^0. $\square$

Следующий результат касается гомеоморфизмов с N-свойством Лузина.

Теорема. *Пусть* $f : T \to \mathbb{R}^2$ *гомеоморфизм с* N*-свойством Лузина и* $\mu(f(T(z))) = \mu(T(z))$, $\forall z \in T^0$, *где* μ *– мера Лебега на плоскости. Тогда* $\mu(f(E)) = \mu(E)$ *для любого измеримого множества* $E \subseteq T$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию множеств $\nu(E) = \mu(f(E))$. Так как f – гомеоморфизм, то f – инъективное отображение. Поэтому ν является мерой. По N-свойству [5, с. 231] мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ. Значит, по теореме Радона-Никодима найдется такая функция $w \in L(T)$, что для любого измеримого множества E

$$\mu(f(E)) = \int_E w(x, y)\, dxdy.$$

Так как $\mu(E) = \int_E 1\, dxdy$, то $\forall z \in T$ по условию теоремы

$$0 = \mu(f(T(z))) - \mu(T(z)) = \int_{T(z)} (w(x, y) - 1)\, dxdy.$$

Следовательно, по теореме 1.1 $w(x, y) = 1$ п.в. А значит, $\mu(f(E)) = \mu(E)$ для любого измеримого множества E. $\square$

1. *Berenstein C. A.* El problema de Pompeiu // Atas do Novo Coloquio Brasileiro de Matematica, Pocos de Caldas. - 1973.
2. *Thompson K. W. and Schonbek T.* A Problem of Pompeiu Type // American Mathematical Monthly. - 1980. - №87. – P. 32-36.
3. *Thompson K. W.* Additional results of Zalcman's Pompeiu problem // Aequationes Mathematicae. – 1992. - №44. - P. 42-47.
4. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // *УМН.* – 1960. - 15:1 (91). P.191–194.
5. *Натансон И. П.* Теория функций действительного переменного. - М.: Наука, 1974. – 480с.

N.V. Feshchenko

Analogues of Zalcman's problem and their applications

We consider the analogue of Zalcman's problem for regular triangle and tetrahedron. The case, when function has zero integral over all regular triangles (tetrahedrons), which is tangent to given one by inner way, is fully analyzed. We also obtain some analogue of theorem of Thompson and Shconbek for discrete set of parameters α. With the help of proved results the new criterion of holomorphy of functions for regular triangle is obtained, the result about completeness of some system of functions in L_p and the analogue of Dzyadyk's theorem are proved, the new result about homeomorphisms with Lusin's N-property is obtained.

Keywords: *Zalcman's problem, Lebesgue integrable functions, holomorphic functions, Green formula, linear functional, Hahn-Banach theorem, Riesz theorem, Dzyadyk's theorem, homeomorphisms.*

Н.В. Фещенко

Аналоги проблеми Зальцмана та їх застосування

У роботі розглядається аналог проблеми Зальцмана для правильних трикутника і тетраедра. Повністю розібрано випадок, коли функція має нульовий інтеграл по всіх правильних трикутниках (тетраедрах), які дотикаються даного внутрішнім чином. Отримано деякий аналог теореми

Томпсона і Шонбека для дискретної множини параметрів α. За допомогою доведених результатів отримано новий критерій голоморфності функцій для правильного трикутника, доведено результат про повноту деякої системи функцій в L_p, доведено аналог теореми В. К. Дзядика, отримано новий результат про гомеоморфізми з N-властивістю Лузіна.

Ключові слова: *Проблема Зальцмана, функції інтегровані за Лебегом, голоморфні функції, формула Гріна, лінійний функціонал, теорема Хана-Банаха, теорема Рісса, теорема В. К. Дзядика, гомеоморфізми.*

Донецкий национальный университет
natalyafeschenko@mail.ru

Получено 03.06.10