УДК 519.7

©2010. **Є.С. Сілін**

НАБЛИЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ РІЗНИХ ЗСУВІВ ЗА АРГУМЕНТОМ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА[1]

Робота присвячена дослідженню питань наближення сум вигляду $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x+\delta_i)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу. Одержано асимптотичні закони поведінки верхніх граней відхилень вказаних сум у рівномірний метриці.

Ключевые слова: *$\overline{\psi}$-інтеграл, оператор Валле Пуссена, інтерференція функцій, лінійні комбінації.*

Нехай $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара функцій $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ таких, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, де $\mathfrak{A}$ — множина неперервних при $v \geq 0$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(v) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на $[0, 1)$; 2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; 3) похідна $\psi'(v) = \psi'(v + 0)$ має обмежену варіацію на $[0, \infty)$; $\mathfrak{A}'$ — це підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(v)}{v}\, dv < \infty$.

Нехай, далі, C — множина неперервних обмежених на дійсній осі $\mathbb{R}$ функцій, $\mathfrak{N}$ — одинична куля простору M істотно обмежених на $\mathbb{R}$ функцій — $S_\infty = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leq 1\}$ або клас $H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \forall t, t' \in \mathbb{R}\}$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Тоді, наслідуючи О.І. Степанця [1, 2], через $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначимо множину всіх неперервних функцій f, які для всіх x можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\, dt \stackrel{\mathrm{df}}{=} A_0 + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}\,(x), \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, функція $\varphi \in \mathfrak{N}$,

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} (\psi_{1+}(x) + i\psi_{2-}(x)) e^{-ixt}\, dx, \tag{2}$$

а ψ_{1+}, ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2, відповідно. Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [2], твердження 9.5.1). Функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\overline{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

[1]Робота виконана за часткової підтримки німецького фонду наукових досліджень (DFG) в рамках пректу UKR 113/103/0-1

Множина $\mathfrak{A}$ не однорідна відносно швидкості спадання до нуля її елементів. У зв'язку з цим при дослідженні апроксимативних властивостей класів $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ має сенс виділити із $\mathfrak{A}$ ряд підмножин (див., напр., [2, стор. 193–194]). Для цього кожній функції $\psi \in \mathfrak{A}$ $\forall t \geq 1$ співставимо пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2))$ та $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$. Тоді покладемо $\mathfrak{A}_C = \{\psi \in \mathfrak{A} : 0 < K_1 \leq \mu(t) \leq K_2 < \infty\}$, $\mathfrak{A}^+_\infty = \{\psi \in \mathfrak{A} : \mu(t) \uparrow \infty\}$, $\overline{F} = \{\psi \in \mathfrak{A} : \eta'(t) \leq K_3\}$, де K_j, $j = \overline{1,3}$ — деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$. Множина $\overline{F}$ складається з функцій, що не можуть спадати до нуля повільніше деякої від'ємної степені t і при цьому $\mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}^+_\infty \subset \overline{F} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$.

Функції $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ при кожних дійсних $\sigma > h \geq 1$ поставимо у відповідність оператор $V_{\sigma,h}(f;x)$, поклавши

$$V_{\sigma,h}(f;x) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}\ (x), \tag{3}$$

де $\widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,h}(t)\overline{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,h}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leq \sigma - h, \\ \frac{\sigma - |t|}{h}, & \sigma - h \leq |t| \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq |t|. \end{cases} \tag{4}$$

Такі оператори розглядалися О.І. Степанцем у роботах [1–4], де показано (наприклад, [2], твердження 9.3.4), що за умов, накладених на функції (ψ_1, ψ_2) і $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ $V_{\sigma,h}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, а у періодичному випадку, при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $h = p \in \mathbb{N}$, $p < n$, оператори $V_{\sigma,h}(f;x)$ співпадають з сумами Валле Пуссена. Тому $V_{\sigma,h}(f;x)$ одержали назву операторів Валле Пуссена.

Предметом нашого дослідження будуть суми

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(f(x+\delta_i) - V_{\sigma,h}(f;x+\delta_i)), \tag{5}$$

де $\alpha_i = \alpha_i(\sigma)$, $\delta_i = \delta_i(\sigma)$ — величини, які рівномірно обмежені щодо σ. Метою даної роботи є знаходження асимптотичних формул при $\sigma \to \infty$ для величин

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup_{f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} ||\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)||_C. \tag{6}$$

Дана задача має багату історію. Вона бере початок з робіт С.Н. Бернштейна (див. [5], С. 446 – 467), який вивчаючи властивості цілих функцій скінченного степеня довів, що лінійні комбінації $f(x+x_0) \pm f(x-x_0)$ можуть бути обмеженими на дійсній осі для деяких необмежених функцій $f(x)$:

$$\frac{1}{2}\left|f(x - \frac{\pi}{2\sigma}) + f(x + \frac{\pi}{2\sigma})\right| \leq \frac{4}{\pi}\sup_k \left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Подібне явище було названо ним інтерференцією.

У подальшому ці питання досліджували О.П. Тіман [6], [7, стор. 201–208], R.P. Boas [8], В.В. Дрозд [9] та інші. Зокрема, О.П. Тіман встановив нерівність

$$\frac{1}{2}\left|f(x-\frac{m\pi}{2\sigma})+f(x+\frac{m\pi}{2\sigma})\right|\le\frac{4M}{\pi m}+\frac{8mM}{\pi}\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{1}{m^2-4i^2},$$

де m — довільне непарне число, $M=\sup\limits_k\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|$, $k\in\mathbb{Z}$.

Домовимося впродовж всієї роботи через K, K_1, $K_2,\ldots$, позначати додатні сталі, які можуть бути різними в різних співвідношеннях.

Основним результатом нашої роботи є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\psi_j\in\overline{F}$, $j=1,2$ — пара функцій, для яких можна вказати константи K_1 та K_2 такі, що,*

$$0<K_1\le\frac{\eta(\psi_1;t)-t}{\eta(\psi_2;t)-t}\le K_2<\infty,\quad t\ge1; \tag{7}$$

величини α_i, δ_i — рівномірно обмежені щодо σ. Тоді для дійсних чисел $\sigma>h\ge1$ при $\sigma\to\infty$ та $(\eta(\psi;\sigma)-\sigma)^{-1}>\frac{\pi}{h}$

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty})=\frac{4|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}R_m\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|+O(1)|\overline{\psi}(\sigma-h)|, \tag{8}$$

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega})=\frac{2\theta_\omega}{\pi^2}|\overline{\psi}(\sigma)|R_m\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt+$$

$$+O(1)|\overline{\psi}(\sigma-h)|\omega\left(1/(\sigma-h)\right), \tag{9}$$

де $R_m=\sqrt{A_m^2+B_m^2}$, $A_m=\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i\cos(\sigma\delta_i+\gamma)$, $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$,

$B_m=\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i\sin(\sigma\delta_i+\gamma)$, $\eta(\sigma)$ є $\eta(\psi_1;\sigma)$ або $\eta(\psi_2;\sigma)$, $\theta_\omega\in[2/3,1]$, причому $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно σ та h.

Якщо ж $(\eta(\psi;\sigma)-\sigma)^{-1}<\frac{\pi}{h}$, то формули (8) – (9) мають місце за умови, що $\delta_i=O((\eta(\psi;\sigma)-\sigma)^{-1})$, $i=\overline{1,m}$.

Зауваження 1. Дану теорему у випадку $h=1$, $\psi_1(\sigma)=\psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta\in\mathbb{R}$ та

$$\lambda^*_{\sigma,1}(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le\sigma-1,\\ 1-\frac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma-1\le t\le\sigma,\\ 0, & t\ge\sigma\end{cases}$$

доведено В.В. Дроздом в роботі [9].

Дослідимо можливість виконання рівності $R_m = 0$. Нехай спочатку $m = 2$. Тоді

$$R_m = R_m(\alpha, \delta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \cos(\sigma\delta_1 + \gamma) + \alpha_2 \cos(\sigma\delta_2 + \gamma) = 0, \\ \alpha_1 \sin(\sigma\delta_1 + \gamma) + \alpha_2 \sin(\sigma\delta_2 + \gamma) = 0, \end{array} \right.$$

що еквівалентно системі

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 + \delta_2 = (\pi k)/\sigma, \\ \alpha_1 = (-1)^{k+1}\alpha_2, \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Таким чином, у випадку $m = 2$ справджується нерівність

$$||f(x) + (-1)^{k+1} f(x + \pi k/\sigma) - V_{\sigma,h}\left(f(x) + (-1)^{k+1} f(x + \pi k/\sigma)\right)||_C \leq$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{K}|\overline{\psi}(\sigma - h)|\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right), & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega; \\ \mathcal{K}|\overline{\psi}(\sigma - h)| & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty. \end{array} \right.$$

Зауваження 2. Якщо $\psi_j \in \overline{F} \setminus (\mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}^+_\infty)$, $j = 1, 2$, то (10) не має місця, оскільки в цьому випадку не виконується умова $\pi k/\sigma = O((\eta(\psi; \sigma) - \sigma)^{-1})$.

Враховуючи це та розмірковуючи за аналогією до п. IV.4.4 монографії [13] для випадку $m \geq 3$, одержимо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\psi_j \in \mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}^+_\infty$, $j = 1, 2$ і такі, що виконана умова (7). Тоді при $\sigma > h \geq 1$ й $\sigma \to \infty$, $m = 2$ та числах α_1, α_2 й δ_1, δ_2, обраних згідно до співвідношення (10)*

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty) = O(1)|\overline{\psi}(\sigma - h)|, \tag{11}$$

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega) = O(1)|\overline{\psi}(\sigma - h)|\omega\left(1/(\sigma - h)\right), \tag{12}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.

Якщо при $m \geq 3$ координати α_i довільного вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ задовольняють одній з умов:

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^{k_i}\alpha_i = 0$, якщо сума $\delta_s + \delta_l = \frac{\pi n}{\sigma}$, $n \in \mathbb{N}$, для всіх $l, s \leq m$, при цьому k_i — ціле число, яке визначається з рівності $\delta_i = \delta_0 + \pi k_i/\sigma$, де δ_0 — деяке фіксоване число;

2) $\alpha_l = \sin^{-1}(\delta_s + \delta_l)\sigma \sum\limits_{i \neq l,s} \alpha_i \sin(\delta_i + \delta_s)\sigma$,

$\alpha_s = \sin^{-1}(\delta_s + \delta_l)\sigma \sum\limits_{i \neq l,s} \alpha_i \sin(\delta_i + \delta_l)\sigma$, якщо при деяких l та s $\delta_s + \delta_l \neq \pi n/\sigma$, $n \in \mathbb{N}$, то при $\sigma \to \infty$ мають місце формули (11) та (12).

Зауваження 3. Нехай $\psi_j \in \overline{F}$, $j = 1, 2$ і числа $h = h(\sigma)$ обираються так, що $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_j; \sigma), \sigma]$, $j = 1, 2$. Оскільки, як показано в [10, стор. 183] (оцінки (3.2.84) й (3.2.85), при їх встановленні, факт того, що $p, n \in \mathbb{N}$ не використовувався), в цьому випадку $\omega\left(1/(\sigma - h)\right) = O(1)\omega\left(1/\sigma\right)$ і $\psi(\sigma - h) = O(1)\psi(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$, то залишкові члени формул (8) – (9) й (11) – (12) набувають вигляду $O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|$ та $O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(1/\sigma\right)$.

Доведення теореми 1.

Використовуючи результати роботи [11, стор. 232 – 237], згідно зі співвідношеннями (3) – (4), неважко переконатися, що має місце таке твердження.

Лема 1. *Нехай $\psi_j \in \overline{F}$, $j = 1, 2$ і можна вказати константи K_1 та K_2 такі, що виконується умова (7). Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, то для дійсних чисел $\sigma > h \geq 1$, довільних $x \in \mathbb{R}$*

$$\rho_{\sigma,h}(f;x) = \nu \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{m_a \leq |t| \leq M_a} \varphi(x;t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma)}{t}\, dt + b(f;x), \tag{13}$$

де $\rho_{\sigma,h}(f;x) = f(x) - V_{\sigma,h}(f;x)$, $\nu = \operatorname{sign}\left(a(\sigma) - \frac{\pi}{h}\right)$,
$a(\sigma) = (\eta(\psi;\sigma) - \sigma)^{-1}$ (в якості $\psi(\cdot)$ може бути обрана як функція $\psi_1(\cdot)$, так і $\psi_2(\cdot)$), $\overline{\psi}(\sigma) = \psi_{1+}(\sigma) + i\psi_{2-}(\sigma)$, $m_a = \min\{a(\sigma); \pi/h\}$, $M_a = \max\{a(\sigma); \pi/h\}$, $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$,

$$\varphi(x;t) = \begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x) - f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega, \\ f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; \end{cases}$$

$$b(f;x) = \begin{cases} O(1)|\overline{\psi}(\sigma - h)|\omega\left(1/(\sigma - h)\right), & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega, \\ O(1)|\overline{\psi}(\sigma - h)|, & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; \end{cases}$$

O(1) — величини, рівномірно обмежені відносно x та σ, h.

Продовжимо доведення теореми. Спочатку розглянемо випадок

а) $a(\sigma) > \frac{\pi}{h}$. Користуючись рівностями (5) й (13) $\forall f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ маємо

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int\limits_{e} \varphi(x + \delta_i;t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma)}{t} dt + b(f;x) =$$

$$= \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int\limits_{e^{(i)}_\sigma} \varphi(x;t) \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i} dt + b(f;x), \tag{14}$$

де $e = \{t : \pi/h \leq |t| \leq a(\sigma)\}$, $e^{(i)}_\sigma = \{t : \pi/h \leq |t - \delta_i| \leq a(\sigma)\}$.

В силу того, що зсув за аргументом не змінює величину $\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N})$, а числа δ_i рівномірно обмежені щодо σ, то далі вважатимемо $0 = \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_m <$ $< a(\sigma) - \frac{\pi}{h}$. Нехай $\delta_m < 2$. Тоді (14) можна записати у вигляді

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \left(\int\limits_{\beta_k} \varphi(x;t) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i} dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\tau_k} \varphi(x;t) \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i} dt \right) + b(f;x), \tag{15}$$

де $\beta_k = \{t : \pi/h + \delta_k \leq t \leq \pi/h + \delta_{k+1}\} \cup \{t : -a(\sigma) + \delta_k \leq t \leq -a(\sigma) + \delta_{k+1}\}$, $k = \overline{1, m-1}$;

$\beta_m = \{t : -a(\sigma) + \delta_m \le t \le -\pi/h\} \cup \{t : \pi/h + \delta_m \le t \le a(\sigma)\}$;
$\tau_k = \{t : a(\sigma)+\delta_k \le t \le a(\sigma)+\delta_{k+1}\} \cup \{t : -\pi/h+\delta_k \le t \le -\pi/h+\delta_{k+1}\}$, $k = \overline{1, m-1}$.

Покажемо, що в першому доданку правої частини рівності (15) всі доданки, за винятком того, який має номер $k = m$, входять у залишковий член. Для цього розглянемо, наприклад, функцію

$$I_{k,i}(x) = \int\limits_{a(\sigma)+\delta_k}^{a(\sigma)+\delta_{k+1}} \varphi(x;t) \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i}\, dt, \quad i = \overline{k+1, m}.$$

Якщо $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$, то, враховуючи обмеженість δ_m, одержимо

$$|I_{k,i}(x)| \le 2 \int\limits_{a(\sigma)+\delta_k}^{a(\sigma)+\delta_{k+1}} \frac{dt}{t - \delta_i} < 2 \ln \frac{a(\sigma) + \delta_m}{a(\sigma) - \delta_m} \le$$

$$\le 2 \ln \left(1 + \frac{2\delta_m}{a(\sigma) - \delta_m} \right) < \frac{4\delta_m}{a(\sigma) - \delta_m} < K. \tag{16}$$

Якщо ж $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega$, то скористаємося лемою V.1.3 з монографії [12]. Функція $\Phi(x) = \int\limits_{a(\sigma)+\delta_k}^{x} \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i}\, dt$ на кожному проміжку (t_n, t_{n+1}), де $t_n = \delta_i + \frac{\pi n}{\sigma} + \frac{\gamma}{\sigma}$, $n \in \mathbb{N}$, обертається на нуль в деякій точці x_n. Нехай $x_{n'}$ — найближчий справа від точки $t = a(\sigma) + \delta_k$, а $x_{n''}$ — найближчий зліва від точки $t = a(\sigma) + \delta_{k+1}$, такі нулі. Застосовуючи згадану лему V.1.3, одержимо

$$|I_{k,i}(x)| \le K_1 \int\limits_{a(\sigma)+\delta_k}^{x_{n'}} \frac{dt}{t - \delta_i} + \omega(\Delta) \int\limits_{x_{n''}}^{x_{n'}} \frac{dt}{t - \delta_i} + K_2 \int\limits_{x_{n''}}^{a(\sigma)+\delta_{k+1}} \frac{dt}{t - \delta_i},$$

де $\Delta = \max(x_{n+1} - x_n) < t_{n+2} - t_n = \frac{2\pi}{\sigma}$ і $x_{n'} - (a(\sigma) + \delta_k) < \frac{2\pi}{\sigma}$, $a(\sigma) + \delta_{k+1} - x_{n''} < < \frac{2\pi}{\sigma}$. А тому

$$|I_{k,i}(x)| \le K_1 \ln \left(1 + \frac{2\pi/\sigma}{a(\sigma) + \delta_k - \delta_i} \right) +$$

$$+\omega(\frac{2\pi}{\sigma}) \ln \frac{a(\sigma) + \delta_{k+1} - \delta_i}{a(\sigma) + \delta_k - \delta_i} + K_2 \ln \left(1 + \frac{2\pi/\sigma}{a(\sigma) + \delta_{k+1} - \delta_i - \frac{2\pi}{\sigma}} \right).$$

Враховуючи обмеженість чисел δ_m для всіх $\sigma \ge 2\pi$ (а, якщо $\delta_m < a(\sigma) - 2\pi$, то і для всіх $\sigma \ge 1$), остаточно маємо

$$|I_{k,i}(x)| \le K\omega(\frac{1}{\sigma}) + \omega(\frac{2\pi}{\sigma}) \ln \left(1 + \frac{2\delta_m}{a(\sigma) - \delta_m} \right) < K\omega(\frac{1}{\sigma}).$$

Оцінивши аналогічним чином інші доданки, одержимо

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)=\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\beta_m}\varphi(x;t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)}{t-\delta_i}\,dt+r(f;x), \qquad (17)$$

де

$$r(f;x)=\begin{cases} O(1)(|\overline{\psi}(\sigma-h)|+|\overline{\psi}(\sigma)|), & f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty};\\ O(1)(|\overline{\psi}(\sigma-h)|\omega(\frac{1}{\sigma-h})+|\overline{\psi}(\sigma)|\omega(\frac{1}{\sigma})), & f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}.\end{cases}$$

Відмітимо, що припущення $\delta_m<2$ несуттєве. Дійсно, якщо $2<\delta_m<a(\sigma)-$ $-\pi/h$, то в правій частині рівності (15) в інтегралах, які обчислюються по множинах β_k, $k=\overline{1,m-1}$, з'являться додаткові доданки, які також мають порядок величини $r(f;x)$.

Далі, $\forall f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$

$$j_1(x)\overset{df}{=}\left|\int\limits_{\beta_m}\varphi(x;t)\frac{\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)}{t-\delta_i}dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\beta_m}\varphi(x;t)\frac{\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)}{t}dt\right|\le 2\delta_i\int\limits_{\beta_m}\frac{dt}{t(t-\delta_i)}<K.$$

Скориставшись лемою V.1.3 для випадку $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$, легко перевірити оцінку $j_1(x)\le K\omega(1/\sigma)$.

Отже, (17) можна зобразити в наступному вигляді:

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)=\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\beta_m}\frac{\varphi(x;t)}{t}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)dt+r(f;x).$$

Суму, яка входить до останньої рівності, запишемо так:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)=A_m\sin\sigma t+B_m\cos\sigma t=R_m\sin(\sigma t-\Omega_m),$$

де $A_m=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\cos(\sigma\delta_i+\gamma)$, $B_m=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\sin(\sigma\delta_i+\gamma)$, $R_m=\sqrt{A_m^2+B_m^2}$,

$$\Omega_m=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{B_m}{A_m}, & R_m>0;\\ 0, & R_m=0.\end{cases}$$

Тоді, $\forall f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)=\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}R_m\int\limits_{\beta_m}\frac{\varphi(x;t)}{t}\sin(\sigma t-\Omega_m)dt+r(f;x). \qquad (18)$$

Нарешті, замінивши множину β_m в (18) на множину $\beta = \{t :\ \pi/h \le |t| \le a(\sigma)\}$ $\forall f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, остаточно одержимо

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} R_m \int\limits_{\beta} \frac{\varphi(x;t)}{t} \sin(\sigma t - \Omega_m) dt + r(f;x). \tag{19}$$

Неважко показати (див., наприклад, [2, стор. 224]), що

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup_{f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} ||\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;0)||_C. \tag{20}$$

В [10, стор. 339] одержані рівності (4.5.28) і (4.5.29):

$$\sup_{\varphi \in S_\infty} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \frac{\varphi(t)}{t} \sin(\sigma t - \Omega_m)\, dt \right| = \frac{4}{\pi} \left| \ln \frac{\pi}{a(\sigma)h} \right| + O(1); \tag{21}$$

$$\sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \sin(\sigma t - \Omega_m)\, dt \right| =$$

$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi} \left| \ln \frac{\pi}{a(\sigma)h} \right| \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t\, dt + O(1), \tag{22}$$

де $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності.

Отже, об'єднавши співвідношення (19) – (22), одержимо формули (8) і (9) у випадку $a(\sigma) > \pi/h$.

б) Нехай далі $a(\sigma) < \pi/h$. Тоді величина (5) набуде вигляду

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = -\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int\limits_{a(\sigma) \le |t| \le \frac{\pi}{h}} \varphi(x+\delta_i;t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma)}{t}\, dt + b(f;x) =$$

$$= -\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int\limits_{d_\sigma^{(i)}} \varphi(x;t) \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i}\, dt + b(f;x), \tag{23}$$

де $d_\sigma^{(i)} = \{t :\ a(\sigma) \le |t - \delta_i| \le \pi/h\}$.

Як і раніше, будемо вважати, що $0 = \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_m$.

Перепишемо (23) у вигляді

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = -\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int\limits_{\nu_i} \varphi(x;t) \frac{\sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t - \delta_i} dt + \right.$$

$$+\int\limits_{\varrho}\varphi(x;t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)}{t-\delta_i}dt\Bigg)+b(f;x),$$

де $\nu_i=\{t:-\pi/h+\delta_k\le t\le-\pi/h+\delta_m\}\cup\{t:-a(\sigma)\le t\le-a(\sigma)+\delta_i\}\cup$
$\cup\{t:a(\sigma)+\delta_i\le t\le a(\sigma)+\delta_m\}\cup\{t:\pi/h\le t\le\pi/h+\delta_i\}$, $i=\overline{1,m}$.
$\varrho=\{t:-\pi/h+\delta_m\le t\le-a(\sigma)\}\cup\{t:a(\sigma)+\delta_m\le t\le\pi/h.\}$

Як і у випадку а), можна показати, що всі інтеграли, які обираються по множинах ν_i, $i=\overline{1,m}$, мають відповідно порядок $O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|$ та $O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega(\frac{1}{\sigma})$ при $\sigma\to\infty$, якщо $\delta_m=\delta_m(\sigma)$ задовольняє умову

$$\delta_m=O(a(\sigma)). \tag{24}$$

Розглянемо один із них, наприклад,

$$J_i(x)=\int\limits_{a(\sigma)+\delta_i}^{a(\sigma)+\delta_m}\varphi(x;t)\frac{\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)}{t-\delta_i}dt,\quad i=\overline{1,m}.$$

В силу (24) $\forall\sigma\ge1$ $\delta_m(\sigma)\le Ma(\sigma)$, де M — абсолютна стала. Припустимо, що $a(\sigma)\ge\pi/\sigma$. Тоді, користуючись лемою V.1.3 роботи [12], $\forall f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega$, отримаємо

$$|J_i(x)|\le\omega\left(a(\sigma)+\delta_i+\frac{2\pi}{\sigma}\right)\ln\left(1+\frac{2\pi}{a(\sigma)\sigma}\right)+$$

$$+\omega(\frac{2\pi}{\sigma})\ln\left(1+\frac{\delta_m}{a(\sigma)}\right)+\omega(a(\sigma)+\delta_m)\ln\frac{a(\sigma)+\delta_m-\delta_i}{a(\sigma)+\delta_m-\delta_i-\frac{2\pi}{\sigma}}\le$$

$$\le\omega(3a(\sigma))\frac{2\pi}{a(\sigma)\sigma}+K\omega(\frac{1}{\sigma})+\omega((M+1)a(\sigma))\ln\left(1+\frac{2\pi}{a(\sigma)\sigma}\right)\le$$

$$\le\left(2\pi\frac{3a(\sigma)+1}{a(\sigma)}+K+2\pi\frac{(M+1)a(\sigma)\sigma+1}{a(\sigma)\sigma}\right)\omega(\frac{1}{\sigma})\le K\omega(\frac{1}{\sigma}).$$

Якщо ж $a(\sigma)<\pi/\sigma$, то, згідно до нерівності (24), $\delta_m<M\frac{\pi}{\sigma}$ і тому

$$|J_i(x)|\le\omega(a(\sigma)+\delta_m)\ln\frac{a(\sigma)+\delta_m}{a(\sigma)}\le K\omega((M+1)\frac{\pi}{\sigma})\le K\omega(\frac{1}{\sigma}).$$

Зрозуміло, що для $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$ $\quad|J_i(x)|\le K$.

Встановивши аналогічні оцінки для інтегралів, які беруться по інших множинах ν_i, $i=\overline{1,m}$, прийдемо до такого:

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)=\frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\varrho}\varphi(x;t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\sin(\sigma t-\sigma\delta_i-\gamma)}{t-\delta_i}\,dt+r(f;x),$$

де $r(f;x)$ має той самий сенс, що і у співвідношенні (17).

Аналогічно до випадку а), покажемо, що при $\sigma \to \infty$

$$j_2(x) = \int\limits_{a(\sigma)+\delta_m}^{\pi/h} \varphi(x;t)\frac{\delta_i \sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)}{t(t-\delta_i)}dt \le \left\{ \begin{array}{ll} K, & f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}; \\ K\omega(\frac{1}{\sigma}) & f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega \end{array} \right\}$$

для функцій з класів та відповідно. Дійсно, $\forall f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$

$$j_2(x) \le 2\ln\frac{(a(\sigma)+\delta_m)(\pi/h-\delta_i)}{a(\sigma)+\delta_m-\delta_i} \le K.$$

Нехай тепер $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega$. Припустимо, що $a(\sigma) \ge \pi/\sigma$. Тоді

$$|j_2(x)| \le \omega(a(\sigma)+\delta_m+\frac{2\pi}{\sigma})\ln\frac{(a(\sigma)+\delta_m-\delta_i+\frac{2\pi}{\sigma})(a(\sigma)+\delta_m)}{(a(\sigma)+\delta_m+\frac{2\pi}{\sigma})(a(\sigma)+\delta_m-\delta_i)}+$$

$$+K_1\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)+K_2\omega\left(\frac{\pi}{h}\right)\ln\frac{(\frac{\pi}{h}-\delta_i)(\frac{\pi}{h}-\frac{2\pi}{\sigma})}{(\frac{\pi}{h}-\frac{2\pi}{\sigma}-\delta_i)\frac{\pi}{h}} \le$$

$$\le ((3+M)\sigma a(\sigma)+1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)\ln\frac{(a(\sigma)+\delta_m-\delta_i+\frac{2\pi}{\sigma})(a(\sigma)+\delta_m)}{(a(\sigma)+\delta_m+\frac{2\pi}{\sigma})a(\sigma)}+$$

$$+K_1\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)+K_2\omega\left(\frac{\pi}{h}\right)\ln\left(1+\frac{\delta_i}{\frac{\pi}{h}-\frac{2\pi}{\sigma}-\delta_i}\cdot\frac{2h}{\sigma}\right) \le$$

$$\le ((3+M)\sigma a(\sigma)+1)\omega(\frac{1}{\sigma})\ln\left(1+\frac{2\pi}{\sigma a(\sigma)}\right)+K_1\omega(\frac{1}{\sigma})+$$

$$+K_3\omega(1/h)(h/\sigma) \le K\omega(1/\sigma). \qquad (25)$$

При встановленні оцінки (25) ми скористалися нерівністю $\frac{p}{n}\omega(\frac{1}{p}) \le 2\omega(\frac{1}{n})$, $p, n \in \mathbb{N}$, $p \le n$ з монографії [10, стор. 130]. Розглянувши доведення цієї нерівності, неважко переконатися, що вона має місце і для дійсних чисел σ та h.

Якщо ж $a(\sigma) < \frac{\pi}{\sigma}$, то $\delta_m < M\frac{\pi}{\sigma}$ і з урахуванням (25) маємо: $j_2(x) \le K\omega(1/\sigma)$. Встановивши аналогічну оцінку й для інтеграла, взятого по відрізку $[-\pi/h+\delta_m, -a(\sigma)]$, одержимо

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x) = -\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\varrho}\frac{\varphi(x;t)}{t}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \sin(\sigma t - \sigma\delta_i - \gamma)\ dt + r(f;x).$$

Всі подальші міркування випадку а) повністю повторюються. Отже, теорему остаточно доведено.

1. *Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. — 1999. — **51,** №11. — С. 1549–1561.

2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.2. — 468 с.
3. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1988. — **40,** №2. – С. 198 – 209.
4. *Степанец А.И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. — 1994. — **46,** №5. — С. 597 – 625.
5. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений: В 3 т. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — Т.2. — 626 с.
6. *Тиман А.Ф.* О явлении интерференции в поведении целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. — 1953. — 89. — С. 17 – 21.
7. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.
8. *R.P. Boas*, Jr., Interference phenomena for entire functions // Michigan Math J. — 1955. — 3. — P. 17 – 34.
9. *Дрозд В.В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — С. 46 – 58. — (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 89.17).
10. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т.68. — 368 с.
11. *Рукасов В.И., Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, №2, — С. 230 - 239.
12. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.1. — 426 с.
13. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

E.S. Silin

Approximation of linear combinations of different shifts the argument of functions defined on the real axis by Valle Poussin's operators.

Work is devoted research of questions of approximation of sums of the form $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x+\delta_i)$ with the help of entire functions of exponential type. Obtain the asymptotic laws of behavior of the upper bounds of deviations of the sums in the uniform metric.

Keywords: *$\overline{\psi}$-integral, Valle Poussin's operators, interference of functions, linear combinations.*

Е.С. Силин

Приближение линейных комбинаций различных сдвигов по аргументу функций, определенных на действительной оси операторами Валле Пуссена.

Работа посвящена исследованию вопросов приближения сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x+\delta_i)$ с помощью целых функций экспоненциального типа. Получены асимптотические законы поведения верхних граней уклонений указанных сумм в равномерной метрике.

Ключевые слова: *$\overline{\psi}$-интеграл, оператор Валле Пуссена, интерференция функций, линейные комбинации.*

Слов'янський державний педагогічний університет Получено 05.05.10