УДК 517.958

 Е.А. Пронина

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАРОТРОПНОГО ГАЗА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассматриваются эволюционная и спектральная задачи, порождённые малыми движениями сжимаемого баротропного вязкого и невязкого газа в ограниченной области. Доказано, что начально–краевая задача о малых движениях идеального баротропного газа в замкнутом неподвижном сосуде имеет единственное сильное решение на любом отрезке времени. В соответствующей спектральной задаче установлено, что ее спектр состоит из бесконечнократного нулевого собственного значения (очевидное решение) и двух ветвей конечнократных собственных значений, локализованных в окрестности мнимой оси. Этим ветвям отвечает совокупность корневых элементов, образующая базис Абеля–Лидского в подпространстве, ортогональном к подпространству очевидных решений. Аналогичные вопросы рассмотрены и для случая вязкого газа.

Ключевые слова: *сжимаемый баротропный газ, ортогональный базис, базис Абеля-Лидского, задача Коши, сильное решение, генератор группы, равномерно аккретивный оператор.*

1. Общая постановка линейно начально-краевой задачи. Будем считать, что некоторый сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $S := \partial\Omega$ класса C^2 заполнен сжимаемым газом. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x), x \in \Omega$, поле скоростей движения газа, через $P = P(t,x)$ – поле давлений, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t,x)$ – поле плотности, а через $\vec{F} = \vec{F}(t,x)$ – поле внешних массовых сил.

Рассмотрим малые движения газа, близкие к состоянию покоя. Пусть

$$\vec{F}(t,x) = -g\vec{e}_3 + \vec{f}(t,x), \tag{1}$$

где $g > 0$ – ускорение силы тяжести, $\vec{e}_3$ – орт декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, выбранной так, что ось Ox_3 направлена против ускорения гравитационного поля, а $\vec{f}(t,x)$ – малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное.

Пусть

$$P(t,x) = P_0(x_3) + p(t,x), \quad \tilde{\rho}(t,x) = \rho_0(x_3) + \rho(t,x), \tag{2}$$

где $P_0(x_3)$ и $\rho_0(x_3)$ – давление и плотность газа в состоянии покоя. Считая, что вертикальный размер области Ω не является достаточно большим, будем иметь

$$\rho_0(x_3) \simeq \rho_0 = \mathrm{const} > 0, \quad P_0(x_3) = -\rho_0 g x_3 + c_1. \tag{3}$$

В этом приближении начально-краевая задача о малых движениях баротропного газа принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\mu\triangle\vec{u}-(\mu+\mu')\,\nabla\mathrm{div}\vec{u}+\rho g\vec{e}_3+\nabla p=\rho_0\vec{f},\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\,\mathrm{div}\vec{u}=0,\ p=c^2\rho\ (\text{в }\Omega),\\ u_n:=\vec{u}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на }S),\ \int\limits_\Omega\rho\,d\Omega=0,\\ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ \rho(0,x)=\rho^0(x),x\in\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Здесь $c^2=\mathrm{const}>0$ – скорость звука в газе, μ и μ' – первая и вторая динамические вязкости газа, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $S=\partial\Omega$. Отметим еще, что условие $\int\limits_\Omega\rho\,d\Omega=0$ следует из того, что в процессе движения газа его масса не изменяется. Кроме того, для вязкого газа на S вместо условия $u_n=0$ должно выполняться условие прилипания $\vec{u}=\vec{0}$ (на S).

2. Задача о малых движениях идеального баротропного газа. Рассмотрим задачу (4) при $\mu=\mu'=0$, учтем условие баротропности $p=c^2\rho$ и перепишем эту задачу в более симметричном виде, введя вместо $\rho(t,x)$ новую искомую функцию:

$$\eta(t,x)=c\,\rho_0^{-1}\rho(t,x).\tag{5}$$

Тогда задача (4) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+c\nabla\eta+gc^{-1}\vec{e}_3\eta=\vec{f}(t,x),\ \frac{\partial\eta}{\partial t}+c\,\mathrm{div}\vec{u}=0\ (\text{в }\Omega),\\ u_n=0\ (\text{на }S),\ \int\limits_\Omega\eta\,d\Omega=0,\ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ \eta(0,x)=\eta^0(x)\ (\text{в }\Omega).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Исследуем задачу (6) методами теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и теории дифференциально-операторных уравнений (см., например, [1]).

С этой целью введем гильбертовы пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ векторных и скалярных функций со стандартными нормами

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}:=\int\limits_\Omega|\vec{u}|^2d\Omega,\ \ \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega|\eta|^2d\Omega,\tag{7}$$

и соответствующими скалярными произведениями. Далее, будем считать, что в (6) $\vec{u}=\vec{u}(t,x)$ – функция переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, а $\eta=\eta(t,x)$ – функция t со значениями в $L_2(\Omega)$. В связи с этим далее производные $\partial/\partial t$ заменяем на d/dt.

Интегральное условие в (6) показывает, что

$$\eta=\eta(t)\in L_{2,\Omega}:=L_2(\Omega)\ominus\{1_\Omega\}.\tag{8}$$

Введем еще пространство $H^1(\Omega)$ с нормой

$$\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2 d\Omega + \Big(\int\limits_\Omega \eta\, d\Omega\Big)^2,$$

эквивалентной стандартной норме, и его подпространство

$$H^1_\Omega := \{\rho \in H^1(\Omega) : \int\limits_\Omega \rho\, d\Omega = 0\}. \tag{9}$$

Тогда

$$\|\rho\|^2_{H^1_\Omega} = \int\limits_\Omega |\nabla\rho|^2 d\Omega.$$

Перепишем уравнения задачи (6) в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \end{pmatrix} + g\, c^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

и введем следующие обозначения:

$$\mathcal{H} := \vec{L}_2(\Omega) \oplus L_{2,\Omega}, \quad z(t) := (\vec{u};\eta)^t, \quad \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \eta \in L_{2,\Omega},$$

$$\|z\|^2_{\mathcal{H}} := \int\limits_\Omega |\vec{u}|^2 d\Omega + \int\limits_\Omega |\eta|^2 d\Omega, \quad f(t) := (\vec{f}(t);0)^t,$$

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(C) = \mathcal{H}, \tag{11}$$

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}) := \{z = (\vec{u};\eta)^t : \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega),\, u_n = 0 \text{ (на } S),\ \eta \in H^1_\Omega\}, \tag{12}$$

где $\vec{H}^1(\Omega)$ – пространство векторных полей $\vec{u} = \sum\limits_{k=1}^{3} u_k\, \vec{e}_k$ с проекциями на оси $u_k \in H^1(\Omega)$.

Лемма 1. *Оператор $\widetilde{\mathcal{B}}$, заданный на $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}})$, является кососамосопряженным неограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H}$: $\widetilde{\mathcal{B}}^* = -\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}^*) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$. При этом он имеет бесконечномерное ядро*

$$\mathrm{Ker}\widetilde{\mathcal{B}} = \{z = (\vec{u};0)^t : \forall\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)\}, \tag{13}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\textit{в}\ \Omega),\ u_n = 0\, (\textit{на}\ S)\}. \tag{14}$$

(Здесь операции $\mathrm{div}\vec{u}$ и $u_n = \vec{u}\cdot\vec{n}$ понимаются в смысле обобщенных функций (распределений).)

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в работах [2-3], где рассматривалась плоская (двумерная) задача для вращающегося тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости. □

С учетом введенных обозначений и леммы 1 задачу (6) можно переписать в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{dz}{dt} = i\,c\,\mathcal{B}z - g\,c^{-1}\,Cz + f(t), \quad z(0) = z^0 = (\vec{u}^{\,0};\eta^0)^t, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^* = i\,\widetilde{\mathcal{B}}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}). \tag{16}$$

Так как оператор $\mathcal{B}$ самосопряжен, то оператор $ic\mathcal{B}$ является генератором сильно непрерывной группы унитарных операторов. В силу очевидной ограниченности оператора C (см. (11)) оператор $i\,c\mathcal{B} - g\,c^{-1}\,C$ также является генератором C_0-группы, и через нее можно выразить сильное решение задачи Коши (15)–(16), если выполнены условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad f(t) \in C^{\,1}([0,T];\,\mathcal{H}). \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^{\,0} \in \vec{H}^1(\Omega),\ u_n = 0\,(\textit{на}\,S),\ \eta^0 \in H^1_\Omega,\ \vec{f}(t) \in C^{\,1}([0,T];\,\mathcal{H}). \tag{18}$$

Тогда задача (15), а вместе с ней и исходная задача (6) имеют единственное сильное решение на отрезке [0,T]. Это означает, что существует единственная функция $z(t)$ такая, что для любого $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (15), причем все слагаемые в нем являются непрерывными функциями t, а также выполнено начальное условие (15). Соответственно в задаче (6) выполнены уравнения движения и неразрывности, причем в первом уравнении все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, а во втором уравнении - непрерывными функциями t со значениями в $L_{2,\Omega}$. При этом выполнены также начальные условия (6).

3. Задача о собственных колебаниях идеального баротропного газа. Рассмотрим решения однородного уравнения (15), зависящие от t по закону $\exp(i\omega ct)$, где ωc – комплексная частота колебаний. Имеем $z(t) = e^{i\omega ct}z,\ z \in \mathcal{H}$, и для амплитудных элементов z приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{B}z + igc^{-2}Cz = \omega z,\ z \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \tag{19}$$

относительно спектрального параметра $\omega \in \mathbb{C}$.

Лемма 2. *Число $\omega = 0$ является бесконечнократным собственным значением задачи (19) и*

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{B} + igc^{-2}C) = \mathrm{Ker}\mathcal{B} = \{z = (\vec{u};0)^t : \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)\} =: \mathcal{H}_0. \tag{20}$$

Доказательство. При $\omega = 0$ с учетом обозначений (16), (11) приходим к уравнениям:

$$\nabla\eta + gc^{-2}\vec{e}_3\eta = 0,\ \int\limits_\Omega \eta\,d\Omega = 0; \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0,\ u_n = 0\ (\text{на } S). \tag{21}$$

Тогда
$$\eta = \eta(x_3) = \eta_0 e^{-gc^{-2}x_3}, \quad \eta_0 \int_\Omega e^{-gc^{-2}x_3} d\Omega = 0 \Rightarrow \eta_0 = 0.$$
Отсюда и из (14) следует (20). □

Воспользуемся далее ортогональным разложением
$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{22}$$
где $\vec{G}(\Omega)$ – подпространство потенциальных полей:
$$\vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \vec{v} = \nabla\varphi, \ \int_\Omega \varphi \, d\Omega = 0\}. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что между элементами из $\vec{G}(\Omega)$ и H^1_Ω (см.(9)) имеется изометрический изоморфизм:
$$\|\nabla\varphi\|_{\vec{L}_2(\Omega)} = \|\varphi\|_{H^1_\Omega}, \ \forall\varphi \in H^1_\Omega. \tag{24}$$

Введем ортогональное разложение
$$\vec{L}_2(\Omega) \oplus L_{2,\Omega} =: \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,$$

$$\mathcal{H}_1 := \{z = (\vec{u}; \eta)^t \in \mathcal{H} : \ \forall\vec{u} = \nabla\varphi \in \vec{G}(\Omega), \ \forall\eta \in L_{2,\Omega}\}.$$

Лемма 3. *Пусть P_1 – ортопроектор из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_1$. Оператор*
$$\mathcal{B}_1 := P_1\mathcal{B}|_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{B}_1^* \tag{25}$$
имеет дискретный спектр, состоящий из положительной и отрицательной ветвей собственных значений $\lambda_k^\pm(\mathcal{B})$ с предельными точками $\lambda = \pm\infty$, соответственно, и асимптотическим поведением
$$\lambda_k^\pm(\mathcal{B}) = \pm\Big(|\Omega|/6\pi^2\Big)^{-1/3} k^{1/3}[1 + o(1)] \ (k \to \infty). \tag{26}$$
Система собственных элементов $z_k^\pm = (\nabla\varphi_k^\pm; \ \eta_k^\pm)^t$, $k = 1, 2, \ldots$, отвечающая этим собственным значениям, образует ортогональный базис в $\mathcal{H}_1$:
$$(z_k^\pm, z_l^\pm)_\mathcal{H} = (\lambda_k^\pm)^{-1}(\mathcal{B}z_k^\pm, z_l^\pm)_\mathcal{H} = \delta_{kl}. \tag{27}$$

Доказательство. Оно основано на том, что задача на собственные значения для оператора $\mathcal{B}_1$ равносильна системе уравнений
$$i\nabla\eta = \lambda\nabla\varphi, \ i\mathrm{div}\nabla\varphi = \lambda\eta \ (\text{в } \Omega), \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S), \ \int_\Omega \eta \, d\Omega = \int_\Omega \varphi \, d\Omega = 0, \tag{28}$$

которая, в свою очередь, приводит к известной задаче Неймана

$$-\triangle\eta = \lambda^2\eta \text{ (в } \Omega), \ \frac{\partial\eta}{\partial n} = 0 \text{ (на } S = \partial\Omega), \ \int_\Omega \eta \, d\Omega = 0. \tag{29}$$

В частности, асимптотические формулы (26) следуют из классической асимптотики Вейля для собственных значений задачи (29). □

Возвращаясь к задаче (19), представим ее решение в виде

$$z = z_0 + z_1, \ z_0 = (\vec{\omega}; 0)^t \in \mathcal{H}_0, \ \vec{\omega} \in \vec{J}_0(\Omega), \tag{30}$$

$$z_1 = (\nabla\varphi; \eta)^t \in \mathcal{H}_1, \ \nabla\varphi \in \vec{G}(\Omega), \ \eta \in H^1_\Omega. \tag{31}$$

Подставляя это представление в (19) (это можно делать, так как $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ – инвариантные подпространства для $\mathcal{B}$, см. лемму 3) и действуя ортопроекторами P_0 и P_1, соответственно, с учетом свойства $Cz_0 = 0$ (см. (11)), приходим к системе уравнений

$$\mathcal{B}_1 z_1 + igc^{-2} P_1 C P_1 z_1 = \omega z_1, \ igc^{-2} P_0 C P_1 z_1 = \omega z_0. \tag{32}$$

Отсюда следует, что элементы z_1 находятся из первого уравнения, а элементы z_0 выражаются через z_1 из второго соотношения.

Теорема 2. *Задача (32) имеет дискретный спектр $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений, локализованных в полосе $|\mathrm{Im}\lambda| \le gc^{-2}$ и имеющих асимптотическое поведение*

$$\omega_k^\pm = \lambda_k^\pm(\mathcal{B}) = \pm\Big(|\Omega|/6\pi^2\Big)^{1/2} k^{1/3}[1 + o(1)] \ (k \to \infty). \tag{33}$$

Корневые (собственные и присоединенные) элементы $\{z_{1k}^\pm\}_{k=1}^\infty$, $z_{1k}^\pm = P_1 z_k^\pm$, отвечающие собственным значениям $\omega_k^\pm$, образуют базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > 3$ в подпространстве $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Первое уравнение (32) есть задача на собственные значения для слабо возмущенного самосопряженного неограниченного оператора с дискретным спектром. Поэтому утверждения теоремы следуют из утверждений 1^0 и 2^0 монографии [4], стр.292. □

Отметим, что спектру частот $\omega_k^\pm$ из (33) отвечают акустические волны, возникающие в баротропном газе при дополнительном действии гравитационных сил.

4. Малые движения вязкого баротропного газа. Исследуя задачу о малых движениях вязкого баротропного газа, осуществим в (4) ту же замену (5), а также замены

$$\nu = \mu\rho_0^{-1}, \ \nu' = \mu'\rho_0^{-1}.$$

Тогда возникает начально-краевая задача

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - (\nu\triangle\vec{u} + (\nu + \nu')\nabla\mathrm{div}\vec{u}) + c\nabla\eta + gc^{-1}\eta\vec{e}_3 = \vec{f}(t, x), \ \frac{\partial\eta}{\partial t} + c\,\mathrm{div}\vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \tag{34}$$

$$\int\limits_{\Omega} \eta \, d\Omega = 0, \ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S), \ \vec{u}(0,x) = \vec{u}^{\,0}(x), \ \eta(0,x) = \eta^0(x), x \in \Omega. \tag{35}$$

Эту задачу, как и в п.2, приведем к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{L}_2(\Omega) \oplus L_{2,\Omega}$.

С этой целью рассмотрим оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset \vec{L}_2(\Omega) \to \vec{L}_2(\Omega)$, действующий по закону

$$A\vec{u} := -(\nu\triangle\vec{u} + (\nu+\nu')\nabla\mathrm{div}\vec{u}), \tag{36}$$

$$\mathcal{D}(A) := \{\vec{u} \in \vec{H}^2(\Omega) : \ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S)\}. \tag{37}$$

Лемма 4. *Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором с дискретным спектром. Его собственные значения $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ конечнократны и имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k(A) = c_A \, k^{2/3}[1 + o(1)], \ c_A = |\Omega|/(2\pi^2), \ k \to \infty. \tag{38}$$

Собственные элементы оператора A образуют ортогональный базис в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$ и в пространстве $\vec{H}_0^1(\Omega)$ с эквивалентной нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}_0^1(\Omega)} = \nu \, E(\vec{u},\vec{u}) + \nu' \int\limits_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{u}|^2 d\Omega, \tag{39}$$

$$E(\vec{u},\vec{u}) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{3} \Big(|\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}|^2\Big) \, d\Omega, \quad \vec{H}_0^1(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \ \vec{u} = \vec{0} \ (\textit{на } S)\}. \tag{40}$$

С помощью введенного оператора A задачу (34)–(35) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + i\,c\,\mathcal{B}z - g\,c^{-1}Cz + f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{41}$$

$$z = (\vec{u};\eta)^t, \ \vec{u} \in \mathcal{D}(A), \ \eta \in H^1_{\Omega}, \ \mathcal{A} := \mathrm{diag}(A;0). \tag{42}$$

Здесь операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ неограничены, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq 0, \ \mathcal{B} = \mathcal{B}^*$.

Для приведения задачи (41) к стандартной изученной проблеме осуществим замену

$$z(t) = e^{at}y(t), \ a > 0. \tag{43}$$

Тогда взамен (41) возникает задача Коши

$$\frac{dy}{dt} = -\begin{pmatrix} A_a & 0 \\ 0 & aI \end{pmatrix} y + i\,c \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} y - gc^{-1}Cy + f_0(t), \tag{44}$$

$$f_0(t) = e^{-at}f(t), \ y(0) = z^0, \ A_a := A + aI \gg 0, \tag{45}$$

где B_{12} и $B_{21} = B_{12}^*$ – соответствующие нулевые элементы матричного оператора $\mathcal{B}$ (см. (16) и (11)).

Лемма 5. *Имеет место факторизация*

$$\begin{pmatrix} A_a & -icB_{12} \\ -icB_{21} & aI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -icA_a^{-1/2}B_{12} \\ -icB_{21}A_a^{-1/2} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{46}$$

причем оператор $Q := B_{21}A_a^{-1/2} : \vec{L}_2(\Omega) \to L_{2,\Omega}$ *ограничен, а оператор* $Q^+ := A_a^{-1/2}B_{12}$, $\mathcal{D}(Q^+) = \mathcal{D}(B_{12}) = H^1_\Omega$, *обладает свойствами*

$$Q^+ = Q^*|_{H^1_\Omega}, \quad \overline{Q^+} = Q^*. \tag{47}$$

Лемма 6. *Операторная матрица (46) допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора:*

$$\mathcal{A}_a := \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -icQ^* \\ -icQ & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \{y = (\vec{y}_1; y_2)^t : \ A_a^{1/2}\vec{y}_1 - icQ^*y_2 \in \mathcal{D}(A_a^{1/2})\}, \tag{49}$$

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_a y, y)_{\mathcal{H}} \geq a\|y\|^2_{\mathcal{H}}, \ \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a). \tag{50}$$

Рассмотрим наряду с (44)–(45) задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}_a y - gc^{-1}C\,y + f_0(t), \quad y(0) = z^0. \tag{51}$$

Из леммы 6 следует, что оператор $-\mathcal{A}_a$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Так как оператор C ограничен, то оператор $-\mathcal{A}_a - g\,c^{-1}C$ является генератором C_0-полугруппы.

Из этих фактов следует утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^{\,0} \in \mathcal{D}(A), \ \eta^0 \in H^1_\Omega, \ \vec{f}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega)). \tag{52}$$

Тогда задача (44), а поэтому и исходная задача (34)–(35) имеют единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Можно проверить, что из условий (52) следует, что в задаче (51) $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a)$, $f_0(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$. Поэтому задача (51) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Далее устанавливается (с использованием теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода), что при этих же условиях задача (44)–(45) имеет единственное сильное решение. Отсюда, возвращаясь от (44)–(45) к исходной задаче (34)–(35), получаем, что она имеет единственное сильное решение, т.е. все слагаемые в первом уравнении (34) – непрерывные функции t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, а во втором уравнении – непрерывные функции t со значениями в $L_{2,\Omega}$. При этом выполнены также начальные условия (35). □

Автор благодарит Копачевского Н.Д. за руководство работой.

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
2. *Иванов Ю.Б., Копачевский Н.Д.* О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ, Симферополь). – №1. – 2003. – С. 61-77.
3. *Копачевский Н.Д.* Собственные колебания вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ, Симферополь). – №2. – 2006. – С. 3-27.
4. *Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. – Willy-VCH, Berlin,...,Toronto, 1999. – 380 pp. (see p. 292, ass. 1^0).

C.A. Pronina

Small movements and normal oscillations of barotropic gas in the limited area.

The evolutionary and spectral problems are researched, which are generated by the small movements compressed by the barotropic viscous and frictionless gas in the limited area. The theorem on the strong solvability of the initial boundary value problem is defended. In the corresponding spectral problem there was founded that its spectrum consists of the infinitely multiple zero eigenvalue and two branches of the finite-dimensional eigenvalue localized around the imaginary axis. These branches responsible for a set of the root elements forming the Abel-Lida Basis. The similar questions are investigated for the viscous gas.

Keywords: *compressed barotropic gas, orthogonal basis, basis of Abel-Leeds, Cauchy problem, strong solution, the group generator, uniformly accretive operators.*

К.А. Проніна

Малі рухи та нормальні коливання баротропного газу в обмеженій області.

Розглядаються еволюційна та спектральна задачі, породжені малими рухами стискаємого баротропного в'язкого і нев'язкого газу в обмеженій області. Доведено теорему про сильну розв'язність початково-крайової задачі. У відповідній спектральній задачі встановлено, що її спектр складається з нескінченнократного нульового власного значення (очевидний розв'язок) та двох віток скінченнократних власних значень, локалізованих в околі уявної осі. Цим віткам відповідає сукупність кореневих елементів, що утворює базис Абеля-Лідського в підпросторі, ортогональному підпростору очевидних розв'язків. Аналогічні питання розглянуто й у випадку в'язкого газу.

Ключові слова: *стискаємий баротропний газ, ортогональний базис, базис Абеля-Лідського, задача Коші, сильний розв'язок, генератор групи, рівномірно акретивний оператор.*

Таврический национальный ун-т им. В.И. Вернадского, Симферополь
namekat@gmail.com

Получено 28.02.09