УДК 517.5

©2010. **Ю.С. Коломойцев**

О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ СРЕДНИМИ БОХНЕРА-РИССА В H_p, $0 < p \le 1$

В статье получен точный порядок приближения функций обобщенными средними Бохнера-Рисса дробного порядка в пространстве H_p, $0 < p \le 1$.

Ключевые слова: *обобщенные средние Бохнера-Рисса, пространство Харди H_p, $0 < p \le 1$, поликруг, K-функционал.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное евклидово пространство, $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $|x| = (x,x)^{1/2}$, $\mathbb{Q}^n = [-\pi,\pi]^n$, $\mathbb{R}_+^n$ – подмножество точек из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами, $\mathbb{Z}^n$ – с целыми координатами, $\mathbb{N}^n$ – с натуральными координатами; $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}_+^n$; $\operatorname{supp} f$ – носитель функции f; $x_+ = \max\{x, 0\}$. Единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\mathbb{D}^n = \{\, z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_j| < 1,\, j = 1, \ldots, n\}$. Пусть $\beta > 0$, положим $\binom{\beta}{0} = 1$ и $\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Через C будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров.

Аналитическая в единичном поликруге $\mathbb{D}^n$ функция f принадлежит $H_p(\mathbb{D}^n)$, если

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{\substack{0<\rho_j<1\\ j=1,\ldots,n}} \|f(\rho e^{i\theta})\|_p = \sup_{\substack{0<\rho_j<1\\ j=1,\ldots,n}} \left(\int_{\mathbb{Q}^n} |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где $\rho e^{i\theta} = (\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n})$, $d\theta = d\theta_1 \ldots d\theta_n$.

Любая функция из $H_p(\mathbb{D}^n)$, $p > 0$, раскладывается в поликруге $\mathbb{D}^n$ в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k z^k,$$

где $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, $c_k = c_{k_1,\ldots,k_n}$ – коэффициенты ряда Тейлора функции f.

Для функции $f \in H_p(\mathbb{D}^n)$ на единичном торе $\mathbb{T}^n = \{\, z = (z_1 \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_j| = 1,\, j = 1, \ldots, n\}$ существует почти всюду (см., например, [1, гл. III] радиальная граничная функция $f(e^{i\theta}) \in L_p$, причем

$$\|f(\rho e^{i\theta})\|_p \le \|f(e^{i\theta})\|_p = \|f\|_p.$$

Обобщенные средние Бохнера-Рисса определяются следующим образом:

$$R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1 - (\varepsilon|k|)^\beta)_+^\delta c_k z^k,$$

где $\{c_k\}$ – коэффициенты Тейлора функции f, а числа β, δ и $\varepsilon > 0$.

Отметим, что вопросу о точном порядке приближения функций средними Бохнера-Рисса и формуле для K-функционала в H_p при $p \in (0,1)$ посвящены работы ([3]-[13]). При четном натуральном β в работе [10] были получены двусторонние оценки приближения функций из $H^p(\mathbb{D}^n)$ через K-функционал и специальный модуль гладкости. Ранее в [6] при натуральном β была получена двусторонняя оценка приближения функций $f \in H^p(E_2)$ (E_2 – полуплоскость) соответствующими обобщенными средними Бохнера-Рисса. Используя схему доказательства [6], в работе [12] была доказана двусторонняя оценка приближения функций $f \in H^p(\mathbb{D})$ средними Бохнера-Рисса с любым показателем $\beta > 1/p - 1$ и $\delta > 1/p - 1$. Приближения функций $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$ обобщенными средними Бохнера-Рисса для дробных и натуральных β изучались также в [13]. В частности, в работе [13] были получены оценки приближения средними

$$\widetilde{R}_\varepsilon^{\beta,\delta}(f,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} (1 - (\varepsilon(k_1 + \cdots + k_n))^\beta)_+^\delta c_k z^k$$

через обычные модули гладкости. Однако, оценка сверху приближения средними $\widetilde{R}_\varepsilon^{\beta,\delta}$ отличалась от оценки снизу.

В настоящей статье получен точный порядок приближения функций обобщенными средними Бохнера-Рисса в пространстве $H_p(\mathbb{D}^n)$, $p \in (0,1]$, через K-функционал.

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных результатов мы будем использовать теоремы о мультипликаторах из работы [10].

Числовая последовательность (матрица) $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+^n}$ называется мультипликатором в $H_p(\mathbb{D}^n)$ (будем писать $\{\lambda_k\} \in M_p$), если для любой функции $f \in H_p(\mathbb{D}^n)$ с коэффициентами Тейлора $\{c_k\}$

$$(\Lambda f)(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \lambda_k c_k z^k \in H_p(\mathbb{D}^n)$$

и существует константа γ такая, что для любой функции $f \in H_p(\mathbb{D}^n)$

$$\|\Lambda f\|_{H_p} \le \gamma \|f\|_{H_p}, \quad \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \inf \gamma.$$

Если $\varphi: \ \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$, то будем писать $\varphi \in M_p$, если

$$\|\varphi\|_{M_p} = \sup_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty.$$

Приведем здесь несколько свойств мультипликаторов (см., например, [10], [14, гл. 7]: $M_p \subset M_q$ при $0 < p \le q \le 2$; $\|\{\lambda_k\mu_k\}\|_{M_p} \le \|\lambda_k\|_{M_p}\|\mu_k\|_{M_p}$, $p > 0$; $\|\{\lambda_k + \mu_k\}\|_{M_p}^p \le \|\lambda_k\|_{M_p}^p + \|\mu_k\|_{M_p}^p$, $p \in (0,1]$.

Следующие лемма 1, теорема 1 и теорема 2 были получены в работе [10].

Лемма 1. *(см. [10]) (Принцип сравнения) Пусть* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\widetilde{\lambda}_k\}$ *– две такие последовательности, что из* $\lambda_k = 0$ *следует* $\widetilde{\lambda}_k = 0$*, а* $K = \inf \|\{\lambda_k/\widetilde{\lambda}_k\}\|_{M_p} < \infty$

(нижняя грань относится к выбору значений дробей 0/0), $p>0$. Тогда для любой функции f такой, что $\Lambda f \in H_p$ выполняется неравенство $\|\widetilde{\Lambda} f\|_{H_p} \le K\|\Lambda f\|_{H_p}$.

Преобразование Фурье функции f будем определять следующим образом:

$$\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(x,y)}dy.$$

Теорема 1. *(см. [10]) Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [-m_1,m_1]\times\dots\times[-m_n,m_n]$. Если преобразование Фурье $\widehat{\varphi}\in L_p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p\in(0,1]$, то*

$$\|\varphi\|_{M_p} \le C(p,n)\bigg(\prod_{j=1}^n m_j\bigg)^{\frac{1}{p}-1}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\varphi}(x)|^p dx\bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2. *(см. [10]) Пусть $0<p\le 1$, а $\varphi \in C^r(\mathbb{R}^n_+)$ при некотором $r>n(1/p-1/2)$. Если*

$$|\varphi(x)|\le \frac{A}{1+|x|^\nu},\quad \sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^r\varphi}{\partial x_j^r}(x)\right|\le\frac{B}{1+|x|^\mu},$$

где $\nu>0$, а $\mu=r+\nu$ или $\mu=\nu>n(1/p-1/2)$, то $\varphi\in M_p$.

Лемма 2. *Пусть $0<p\le 1$, $\alpha=[\frac{n}{p}]+1$, функция $f\in C(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель и $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_j^\alpha}\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,n$. Тогда $f\in M_p$.*

Доказательство. Используя элементарные свойства преобразования Фурье (см., например, [2]), имеем

$$x_j^\alpha \widehat{f}(x)=(-i)^\alpha\widehat{\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_j^\alpha}}(x),\quad j=1,\dots,n.$$

Следовательно,

$$|\widehat{f}(x)|\le\bigg(\sum_{j=1}^n|x_j|^\alpha\bigg)^{-1}\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_j^\alpha}\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\le c|x|^{-\alpha},\quad |x|\ge 1. \tag{1}$$

Из неравенства (1), учитывая, что $\alpha=[\frac{n}{p}]+1$, находим

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p\le C\bigg(1+\int_{|x|\ge1}|x|^{-p\alpha}dx\bigg)\le c\bigg(1+\int_1^\infty r^{n-1-p\alpha}dr\bigg)<\infty.$$

Таким образом, используя теорему 1, получим, что $f\in M_p$. □

Далее символом $\mathcal{R}^n$ будем обозначать пространство вещественнозначных непрерывных радиальных, имеющих компактный носитель, функций ψ таких, что $\psi(0)=1$.

Лемма 3. *(см. [15]) Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ – однородная функция порядка $\beta \geq 0$, не являющаяся полиномом, а $\psi \in \mathcal{R}^n$. Тогда $\widehat{f\psi}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\frac{n}{n+\beta} < p \leq \infty$.*

Из леммы 3 и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $0 < p \leq 1$, $\beta \in 2\mathbb{N} \cup (n(\frac{1}{p}-1), \infty)$, $\psi \in \mathcal{R}^n$ и $f_\beta(x) = |x|^\beta \psi(x)$. Тогда $f_\beta \in M_p$.*

Лемма 6. *Пусть $0 < p \leq 1$, $\delta > n/p - (n+1)/2$ и $\beta \in 2\mathbb{N} \cup (n(1/p-1), \infty)$. Тогда функция $\varphi(x) = (1 - |x|^\beta)_+^\delta \in M_p$.*

Доказательство. Отметим, что при четных β лемма 6 была доказана в [10].

При доказательстве леммы 6 мы будем использовать следующее разбиение единицы. Пусть функции h_1, $h_2 \in C^\infty[0, \infty)$,

$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{4}; \\ 0, & t > \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad h_2(t) = 1 - h_1(t). \tag{2}$$

Положим $\varphi_1(x) = \varphi(x) h_1(|x|)$ и $\alpha = 2([\frac{n}{p}] + 1)$. Проверим, что $\varphi_1 \in M_p$. Для этого мы воспользуемся представлением $\varphi_1(x) = \varphi_{1,1}(x) + \varphi_{1,2}(x)$, где

$$\varphi_{1,1}(x) = h_1(|x|) \left(1 + \sum_{k=[\alpha/\beta]+1}^{\infty} \binom{\delta}{k} (-1)^k |x|^{\beta k} \right),$$

$$\varphi_{1,2}(x) = h_1(|x|) \sum_{k=1}^{[\alpha/\beta]} \binom{\delta}{k} (-1)^k |x|^{\beta k}.$$

Используя лемму 2, получим, что $\varphi_{1,1} \in M_p$. Функция $\varphi_{1,2} \in M_p$ в силу следствия 1. Таким образом, $\varphi_1 \in M_p$.

Далее, заметим, что для любых $\delta > 0$ и $\beta > 0$ справедливо разложение

$$(1 - |x|^\beta)_+^\delta = (\beta/2)^\delta (1 - |x|^2)_+^\delta + (\beta/2)^\delta \frac{2-\beta}{4} \delta (1 - |x|^2)_+^{\delta+1} + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - |x|^2)_+^{\delta+k},$$

а функция $(1 - |x|^2)_+^\delta \in M_p$. Таким образом, для доказательства леммы 6 достаточно исследовать функцию

$$\varphi_2(x) = h_2(|x|) \left((1 - |x|^\beta)_+^\delta - \sum_{k=0}^{\alpha} a_k (1 - |x|^2)_+^{\delta+k} \right) =$$
$$= h_2(|x|) \sum_{k=\alpha+1}^{\infty} a_k (1 - |x|^2)_+^{\delta+k}.$$

Нетрудно проверить, что $\frac{\partial^\alpha \varphi_2(x)}{\partial x_j^\alpha} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, из леммы 2 получим, что $\varphi_2 \in M_p$. Таким образом, мы показали, что функция $\varphi \in M_p$. $\square$

3. Основные результаты. Оператор дробного дифференцирования $D_\beta(f,z)$ для функций вида $f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} c_k z^k$ определим следующим образом:

$$D_\beta(f,z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} |k|^\beta c_k z^k.$$

Для исследования скорости приближения обобщенными средними Бохнера-Рисса мы будем использовать K-функционал

$$K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p}=\inf_g\{\|f-g\|_{H_p}+\varepsilon^\beta\|D_\beta(g)\|_{H_p}\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $f\in H_p(\mathbb{D}^n)$, $p\in(0,1]$, $\delta>n/p-(n+1)/2$ *и* $\beta\in 2\mathbb{N}\cup(n(1/p-1),\infty)$. *Тогда*

$$K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p}\asymp\|f-R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p},\quad \varepsilon>0$$

(двустороннее неравенство с константами, не зависящими от f *и* ε*).*

Доказательство. Докажем сначала следующие два неравенства:

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p}\le C_1\varepsilon^\beta\|D_\beta(f)\|_{H_p}, \tag{3}$$

$$\varepsilon^\beta\|D_\beta(R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f))\|_{H_p}\le C_2\|f-R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p}, \tag{4}$$

где константы C_1 и C_2 зависят только от n,p,β и δ. В силу принципа сравнения (лемма 1) достаточно доказать, что после доопределения в нуле функции

$$\xi(x)=\frac{1-\varphi(x)}{|x|^\beta}\in M_p\quad\text{и}\quad \eta(x)=\frac{|x|^\beta\varphi(x)}{1-\varphi(x)}\in M_p.$$

Полагаем $\xi(0)=\delta$, $\eta(0)=1/\delta$.

Исследуем функцию ξ. Положим $\xi_j(x)=h_j(|x|)\xi(x)$, $j=1,2$, где h_1 и h_2 – функции из доказательства леммы 6, определенные равенствами (2), т.е. $\xi(x)=\xi_1(x)+\xi_2(x)$. Заметим, что

$$\xi_1(x)=h_1(|x|)\sum_{k=1}^\infty\binom{\delta}{k}(-1)^k|x|^{\beta k}.$$

Таким образом, рассуждая по аналогии с доказательством леммы 6, получаем, что $\xi_1\in M_p$.

Принадлежность функции $\xi_2\in M_p$ вытекает из того, что $1-\varphi(x)\in M_p$ и $h_2(|x|)|x|^{-\beta}\in M_p$ (см. теорему 2, а также примеры в [10]). Таким образом, $\xi\in M_p$.

Покажем теперь, что $\eta\in M_p$. Снова используем разбиение единицы. Положим $\eta_j(x)=h_j(|x|)\eta(x)$, $j=1,2$. Проверим сначала, что $\eta_2\in M_p$. Для этого представим функцию η_2 в виде суммы двух функций $\eta_2=\eta_{2,1}+\eta_{2,2}$, где

$$\eta_{2,1}(x)=|x|^\beta h_2(|x|)\sum_{k=1}^\sigma\varphi^k(x),\quad \eta_{2,2}(x)=|x|^\beta h_2(|x|)\sum_{k=\sigma+1}^\infty\varphi^k(x)$$

и $\sigma = [\frac{1}{\delta}(\frac{n}{p}+1)]$. Используя лемму 2, нетрудно проверить, что $\eta_{2,2} \in M_p$. Функция $\eta_{2,1} \in M_p$ в силу леммы 6 и леммы 2.

Остается показать, что $\eta_1 \in M_p$. Для этого достаточно проверить, что

$$\eta_{1,1}(x) = \frac{|x|^\beta h_1(|x|)}{1-\varphi(x)} \in M_p. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(|x|) = \frac{|x|^\beta}{1-\varphi(x)} - \sum_{k=0}^{[\alpha/\beta]} a_k |x|^{\beta k},$$

где $\alpha = 2([\frac{n}{p}]+1)$. Заметим, что при $t \in (0,1)$

$$\frac{t^\beta}{1-(1-t^\beta)^\delta} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\beta k}\right)^{-1},$$

где $c_0 = \delta \neq 0$. Таким образом, числа $\{a_k\}$ можно выбрать так, чтобы

$$\phi(t) = \frac{\sum_{k=[\alpha/\beta]+1}^{\infty} b_k t^{\beta k}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\beta k}}.$$

Положим $\gamma(x) = \phi(|x|)h_1(|x|)$. Из леммы 3 следует, что $\gamma - \eta_{1,1} \in M_p$. Таким образом, показав, что $\gamma \in M_p$, мы получим (6). Воспользуемся леммой 2. Имеем

$$\gamma^{(\alpha)}(t) = (\phi(t)h_1(t))^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\nu} \phi^{(\nu)}(t) h_1^{(\alpha-\nu)}(t).$$

При $\nu \in [0, \alpha-1]$ функция $\phi^{(\nu)}(t)h_1^{(\alpha-\nu)}(t) = 0$ в окрестности нуля. Вычисляя производную порядка α от функции $\phi(t)$, получаем

$$\phi^{(\alpha)}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha}\sum_{k=[\alpha/\beta]+1}^{\infty} b_{j,k} t^{\beta k - j}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,\alpha} t^{\beta k}},$$

где $c_{0,\alpha} \neq 0$. Нетрудно заметить, что $h_1(|x|)\frac{\partial^\alpha \phi(|x|)}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, в силу леммы 2 получаем, что $\gamma \in M_p$.

Из приведенных выше рассуждений следует справедливость неравенства (3) и (4). Выведем теперь из них оценки для K-функционала. Имеем

$$\begin{aligned} K_\beta(f,\varepsilon)_p &\le \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} + \varepsilon^\beta \|D_\beta(R_\varepsilon^{\beta,\delta})(f)\|_{H_p} \le \\ &\le (1+C_2)\|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p}. \end{aligned}$$

Докажем теперь оценку снизу. При произвольной функции g такой, что $D_\beta g \in H_p(\mathbb{D}^n)$,

$$\begin{aligned} \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p}^p &\le \|(f-g) - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f-g)\|_{H_p}^p + \|g - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(g)\|_{H_p}^p \le \\ &\le (1 + \|R_\varepsilon^{\beta,\delta}\|_{H_p \to H_p})\|f-g\|_{H_p}^p + C_2^p \varepsilon^{\beta p}\|D_\beta g\|_{H_p}^p. \end{aligned}$$

Осталось перейти к нижней грани по g и учесть, что

$$\sup_{\varepsilon} \|R_{\varepsilon}^{\beta,\delta}\|_{H_p \to H_p} = \sup_{\varepsilon} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} = \|\varphi\|_{M_p} < \infty.$$

□

1. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
3. *Стороженко Э.А.* О теоремах типа Джексона в H^p, $0 < p < 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – **44**, N4. – С. 946-692.
4. *Валашек Я.* О приближениях в многомерных пространствах Харди H^p, $0 < p \leq 1$ // Сообщ. АН Гр. ССР. – 1982. – **105**, N1. – С. 21-24.
5. *Oswald P.* On some Approximation Properties of Real Hardy Spaces ($0 < p \leq 1$) // J. Approx. Theory. – 1984. – **40**, N1. – P. 45-65.
6. *Solyanik A.A.* On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain means of Fourier integrals // Anal. Math. – 1986. – **12**. – P. 59-75.
7. *Colzani L.* Jackson Theorems in Hardy Spaces and Approximation by Riesz Means // J. Approx. Theory. – 1987. – **49**. – P. 240-251.
8. *Белинский Э.С.* Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения // ДАН. – 1993. – **332**, N2. – С. 133-134.
9. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // ДАН. – 1994. – **335**, N6. – С. 697-699.
10. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. – 1997. – **188**, N4. – С. 145-160.
11. *Wang J.* Generalized Bochner-riesz means on spaces generated by smooth blocks // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2003. – **44**, N3. – P. 489-505.
12. *Прибегин С.Г.* Приближение функций из H^p, $0 < p \leq 1$, обобщенными средними Рисса с дробным показателем // Матем. сб. – 2006. – **197**, N7. – С. 77-86.
13. *Прибегин С.Г.* О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$ // Матем. сб. – 2009. – **200**, N2. – С. 89-106.
14. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. Kluwer. 2004.
15. *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On some extensions of Berenstein's inequality for trigonometric polynomials // Functiones et Approximatio – 2001. – **XXIX**. – P. 125-142.

Yu.S. Kolomoitsev

On two-sided estimates of approximation of functions by generalized Bochner-Riesz means in H_p, $0 < p \leq 1$.

In this paper the exact order of approximation of functions by generalized Bochner-Riesz means of fractional order in the space H_p, $0 < p \leq 1$, is obtained.

Keywords: *generalized Bochner-Riesz means, Hardy space* H_p, $0 < p \leq 1$, *polydisk,* K*-functional.*

Ю.С. Коломойцев

Про двосторонні оцінки наближення функцій узагальненими середніми Бохнера-Рісса в H_p, $0 < p \le 1$.

У роботі отримано точний порядок наближення функцій узагальненими середніми Бохнера-Рісса в просторі H_p, $0 < p \le 1$.

Ключові слова: *узагальнені середні Бохнера-Рісса, простір Гарді H_p, $0 < p \le 1$, полікруг, K-функціонал.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий нац. ун-т
kolomus1@mail.ru

Получено 16.04.10