УДК 517.956

 **Е.А. Калита**

# РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕСТРОГО ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ

В работе рассматриваются нелинейные эллиптические системы высокого порядка нестрого дивергентного вида при структурном условии, обеспечивающем коэрцитивность и монотонность в паре со степенью оператора Лапласа. Устанавливаются априорные оценки, которые не вырождаются при вырождении этого условия и потере коэрцитивности, что приводит к разрешимости вырождающихся систем. Результаты принципиально отличаются от результатов, возможных для систем строго дивергентного вида.

***Ключевые слова:*** *нелинейные эллиптические системы, высокий порядок, вырождение, нестрого дивергентные, разрешимость.*

Рассматривается нелинейная эллиптическая система

$$\mathcal{L}u = (-\mathrm{div})^t A(D^s u) = f(x), \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $s$, $t$ – целые неотрицательные, $s+t$ четное положительное, $u$, $f$ – вектор-функции размерности $N \geqslant 1$, $A$ – функция размерности $n^t N$. Предполагается, что $A(0) = 0$ и выполнено следующее структурное условие: функция $B$, определяемая равенством

$$\Delta^m u + \mathrm{div}^t B(D^s u) = \varkappa\, \mathrm{div}^t A(D^s u),$$

где $m = (s+t)/2$, при подходящем нормирующем множителе $\varkappa > 0$, липшицева с константой единица:

$$|B(\xi) - B(\eta)| \leqslant |\xi - \eta|. \tag{2}$$

Здесь модуль обозначает норму в конечномерном евклидовом пространстве, для $B$ – размерности $n^t N$, для $\xi, \eta$ – $n^s N$, как и для $D^s u$.

Примерами нелинейных операторов с вырождением, удовлетворяющих (2), будут

$$\Delta u - |D^2 u|, \quad (s=2, t=0), \quad \Delta^2 u - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} |\partial_{x_i} D^2 u| \quad (s=3, t=1),$$

а также линейный оператор с постоянными коэффициентами

$$\Delta^{(s+t)/2} u - \partial^{s+t} u / \partial x_1^{s+t},$$

который приведен здесь только для иллюстрации возможного типа вырождения – разумеется, мы не получаем никаких новых результатов для линейных операторов с постоянными коэффициентами.

Отметим, что более сильное условие

$$|B(\xi) - B(\eta)| \leqslant K|\xi - \eta|, \quad K < 1, \tag{3}$$

обеспечивает сильную монотонность оператора $\mathcal{L}$ в паре с $\Delta^{(s-t)/2}$ в пространстве $H^s_0$. При $K = 1$ сильная монотонность (и коэрцитивность) теряются, остается только простая монотонность. В случае дивергентных систем ($s = t$) условие (3) равносильно стандартной паре структурных условий

$$(A(\xi) - A(\eta),\, \xi - \eta) \geqslant c_1|\xi - \eta|^2, \quad |A(\xi) - A(\eta)| \leqslant c_2|\xi - \eta|,$$

а условие (2) равносильно

$$(A(\xi) - A(\eta), \xi - \eta) \geqslant c_0\, |A(\xi) - A(\eta)|^2.$$

(буквой $c$ будем обозначать различные несущественные положительные константы). Ясно, что это условие не позволяет установить существование решений системы (1).

Оказывается, нестрого дивергентный случай ($s \neq t$) в этом отношении полностью отличается от строго дивергентного. Именно, при $n > 3$ мы устанавливаем существование решений $u \in H^s_{b-2} \cap H^{s-1}_{a-2}$, где $H^s_a$ – пространство с нормой $\|D^s u; L_2(\mathbb{R}^n; (1 + |x|)^a)\|$, если $a, b$ лежат в определенном интервале $(a_*, 0)$ при $s > t$ или $(0, a^*)$ при $s < t$.

Отметим, что подобный эффект обнаруживался ранее. В работе Кордеса [1] рассматривались квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка недивергентного вида. Оказалось, что структурное условие, обеспечивающее коэрцитивность оператора в паре с оператором Лапласа в $\overset{\circ}{W}{}^2_2$ даже при вырождении, позволяет иметь априорную оценку $W^2_2$-решений в пространстве $C^{1/2}$. Укажем, что для одного уравнения в случае $t = 0$, $s = 2m$ (или $s = 0$, $t = 2m$) условие (2) равносильно вырожденному условию Кордеса на матрицу "коэффициентов" $\partial A(\xi)/\partial\xi$, рассматриваемую как квадратная матрица $n^m \times n^m$. В работе [2] нами устанавливалось, что для системы (1) с условием (3) при $s > t$, $n > 3$ решения класса $H^s_{\mathrm{loc}}$ принадлежат пространству Морри, причем показатель морриевости не стремится к нулю при $K \to 1$ – в отличие от хорошо известных результатов для дивергентных систем.

Для описания интервала значений $a, b$, при которых есть разрешимость, рассмотрим оператор $T^{s,t} = D^s \Delta^{-m} \mathrm{div}^t$ – векторное преобразование Рисса – оператор с символом $\zeta^s|\zeta|^{-s-t}\zeta^t$, переводящий вектор-функции размерности $n^t$ в вектор-функции размерности $n^s$. Обозначим $T^{s,t}_a$ – его норма в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)$ (строго говоря, из одной декартовой степени этого пространства в другую). Как известно, $T^{s,t}_a < \infty$ при $a \in (-n, n)$, $T^{s,t}_0 = 1$, и $T^{s,t}_a$ логарифмически выпукло по $a$ по теореме Рисса-Торина. Обозначим $a_* = a_*(s,t,n) = \min\{a \in (-n,n) : T^{s,t}_a = 1\}$, $a^* = a^*(s,t,n) = \max\{a \in (-n,n) : T^{s,t}_a = 1\}$. В [3], [4] устанавливался следующий результат.

**Теорема А.** *Пусть $s \neq t$, $n > 3$. Тогда $a_* \neq a^*$,*

$$(a_*, a^*) \subset \begin{cases} (3 - n, 0), & s > t \\ (0, n - 3), & s < t, \end{cases}$$

*один конец интервала всегда ноль, и вложение переходит в равенство при* $t = 0$ *или* $s = 0$. *Кроме того, при* $a \in (a_*, a^*)$ *для* $f \in L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)$

$$\|T^{s,t} f\|_a^2 \leqslant \|f\|_a^2 - c_a \|D\Delta^{-1} f\|_{a-2}^2,$$

$c_a = c(a^* - a)(a - a_*)$, *константа* $c > 0$ *зависит только от* $s, t, n$.

Здесь (и только здесь) $\|\cdot\|_a$ обозначает норму в $L_2(\mathbb{R}^n;\, |x|^a)$, в дальнейшем $\|\cdot\|_a$ будет обозначать норму в $L_2(\mathbb{R}^n; (1 + |x|)^a)$; $\|\cdot\|_\omega$ – норма в $L_2(\mathbb{R}^n; \omega)$, $\omega(x)$ – неотрицательная весовая функция, $\|\cdot\|_Q$ – норма в $L_2(Q)$.

Обозначим $I_t$ – потенциал Рисса порядка $t$ – оператор с символом $|\zeta|^{-t}$; $H_a^{-t}$ при $t > 0$ – пространство с нормой $\|I_t f; L_2(\mathbb{R}^n; (1 + |x|)^a)\|$.

Наш основной результат составляет следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть* $s \neq t$, $n > 3$. *Пусть* $a, b \in (a_*, a^*)$, $f \in H_{b+2}^{2-t} \cap H_{a+2}^{1-t}$. *Тогда система* (1) *имеет решение* $u \in H_{b-2}^s \cap H_{a-2}^{s-1}$, *и справедливы оценки*

$$\|D^s u\,\|_{b-2} \leqslant c\,\|I_{t-2}\, f\|_{b+2}, \tag{4}$$

$$\|D^{s-1} u\|_{a-2} \leqslant c\|I_{t-1}\, f\|_{a+2} \tag{5}$$

(*при* $t = 0, 1$ *предполагаем* $f \in \overset{\circ}{H}{}_{b+2}^{2-t} \cap \overset{\circ}{H}{}_{a+2}^{1-t}$, *при этом полагаем* $I_{t-2} = D^{2-t}$, $I_{t-1} = D^{1-t}$; *при* $s = 0$ *полагаем* $D^{s-1} = D\Delta^{-1}$).

Норма $D^{s-1}u$ здесь понимается с точностью до тривиальных решений системы (1) – полиномов степени меньше $s$, то есть, $\|D^{s-1}u\|_{a-2} \leqslant \cdots$ обозначает: существует полином $P$ степени $\deg P < s$ такой, что $\|D^{s-1}(u - P)\|_{a-2} \leqslant \cdots$

*Доказательство.* Покажем, что если $u \in H_a^s$ – решение системы (1), то справедлива оценка (5). При этом вместо условия (2) нам будет достаточно условия

$$|B(\xi)| \leqslant |\xi|. \tag{6}$$

Обозначим

$$\omega(x) = \left(\int r^{-a} \psi(y) dy\right)^{-1}, \tag{7}$$

$r = |x - y|$, $\psi$ – неотрицательная гладкая функция с носителем в шаре $\{x : |x| < 1\}$ и нормировкой $\int \psi\, dy = 1$. Подставим в интегральное тождество пробную функцию $v = \Delta^{-m} \mathrm{div}^s(\omega D^s u) \in H_{-a}^t$:

$$(\mathcal{L}\, u, v) = (f, v). \tag{8}$$

По условию (6) в левой части имеем (для кратности полагаем, что нормирующий множитель $\varkappa = 1$)

$$(\mathcal{L}\, u, v) \geqslant \|D^s u\|_\omega^2 - \|B\|_\omega \|D^t v\|_{1/\omega} \geqslant \|D^s u\|_\omega^2 - \|D^s u\|_\omega \|T^{t,s}(\omega D^s u)\|_{1/\omega}.$$

Отметим, что при сопряжении $(T^{s,t})^* = T^{t,s}$, $L_{2,a}^* = L_{2,-a}$, поэтому $a_*(t, s, n) = a^*(s, t, n)$, и условие теоремы $a \in (a_*, a^*)$ обеспечивает

$-a \in (a_*(t,s,n),\ a^*(t,s,n))$. Для нормы $T^{t,s}$ по теореме Фубини и теореме А находим ($g$ – произвольное из $L_{2,1/\omega} = L_2(\mathbb{R}^n; 1/\omega)$)

$$\|T^{t,s}g\|^2_{1/\omega} = \int |T^{t,s}g|^2 \Big(\int r^{-a}\psi\, dy\Big) dx = \int \Big(\int |T^{t,s}g|^2 r^{-a} dx\Big)\psi\, dy$$

$$\leqslant \int\int \Big(|g|^2 r^{-a} - c_a|D\Delta^{-1}g|^2 r^{-a-2}\Big) dx\, \psi\, dy = \|g\|^2_{1/\omega} - c_a\|D\Delta^{-1}g\|^2_{1/\nu},$$

$\nu = \big(\int r^{-a-2}\psi\, dy\big)^{-1}$. В (8) получаем

$$c_a\|D\Delta^{-1}(\omega D^s u)\|^2_{1/\nu} \leqslant (f,v).$$

В правой части

$$(f,v) = \int D^{s+1}\Delta^{-m} f\, D\Delta^{-1}(\omega D^s u) dx \leqslant \|D^{s+1}\Delta^{-m} f\|_\nu\, \|D\Delta^{-1}(\omega D^s u)\|_{1/\nu},$$

что дает

$$\|D\Delta^{-1}(\omega D^s u)\|_{1/\nu} \leqslant c\|D^{s+1}\Delta^{-m} f\|_\nu. \tag{9}$$

Здесь $D^{s+1}\Delta^{-m} = D^{s+1}I_{s+1}I_{t-1}$, и с учетом $\nu \asymp (1+|x|)^{a+2}$ по ограниченности преобразований Рисса в $L_2$ со степенным весом ($a+2 \in (-n,n)$ следует из $|a| < n-3$ (теорема А)) имеем

$$\|D^{s+1}\Delta^{-m} f\|_\nu \asymp \|f;\ H^{1-t}_{a+2}\|.$$

В левой части (9), обозначая $g = D\Delta^{-1}(\omega D^s u)$, имеем

$$D^{s-1}u = \Delta^{-1}\mathrm{div}(\omega^{-1}\mathrm{div}\, g) = \Delta^{-1}\mathrm{div}^2(\omega^{-1}g) - \Delta^{-1}\mathrm{div}\Big(gD\frac{1}{\omega}\Big) \tag{10}$$

(строго говоря, не $D^{s-1}u$, а $D^{s-1}(u-P)$, где $P$ – полином степени $\deg P < s$ такой, что $D^{s-1}(u-P) \in \overset{\circ}{H}{}^1_a(\mathbb{R}^n)$). Поскольку $a-2 > -n$, для второго слагаемого по неравенству Харди

$$\big\|\Delta^{-1}\mathrm{div}\big(gD\frac{1}{\omega}\big)\big\|_\mu \leqslant c\big\|D\Delta^{-1}\mathrm{div}\big(gD\frac{1}{\omega}\big)\big\|_\omega,$$

$\mu = \big(\int r^{-a+2}\psi\, dy\big)^{-1}$, и далее, по ограниченности преобразований Рисса $D\Delta^{-1}\mathrm{div}$ в $L_{2,\omega}$

$$\mathrm{idem} \leqslant c\big\|\, gD\frac{1}{\omega}\big\|_\omega \leqslant c\|g\|_{1/\nu},$$

так как

$$\big|D\frac{1}{\omega}\big|^2 \leqslant a^2\Big(\int r^{-a-1}\psi\, dy\Big)^2 \leqslant a^2\int r^{-a-2}\psi\, dy\ \int r^{-a}\psi\, dy.$$

Для первого слагаемого в (10) по ограниченности преобразований Рисса $\Delta^{-1}\mathrm{div}^2$ в $L_{2,\mu}$ ($a-2 \in (-n,n)$ следует из $|a| < n-3$)

$$\|\Delta^{-1}\mathrm{div}^2(\omega^{-1}g)\|_\mu \leqslant c\|g\|_{\mu/\omega^2} \leqslant c\|g\|_{1/\nu},$$

с учетом

$$1/\omega^2 = \left(\int r^{-a}\psi\, dy\right)^2 \leqslant \int r^{-a+2}\psi\, dy \int r^{-a-2}\psi\, dy = 1/\mu\nu.$$

Теперь из (8) находим

$$\|D^{s-1}u\|_\mu \leqslant c\|f;\, H^{1-t}_{a+2}\|,$$

что совпадает с (5).

Для доказательства оценки (4) подставим в интегральное тождество пробную функцию $\Delta_{-h}\Delta^{-m}\mathrm{div}^s(\omega D^s u_h)$, где $u_h(x) = \Delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$, $h \in \mathbb{R}^n$; $\omega = \big(\int(\delta r^{-a} + r^{-b})\psi\, dy\big)^{-1}$, $\delta > 0$ – параметр. Рассуждая аналогичным способом доказательству (5), находим

$$\|D^{s-1}u_n\|_\mu \leqslant c\|I_{t-1}\, f_n\|_\nu,$$

где

$$\mu(x) = \Big(\int(\delta r^{-a} + r^{-b})r^2\psi\, dy\Big)^{-s}, \quad \nu(x) = \Big(\int(\delta r^{-a} + r^{-b})r^{-2}\psi\, dy\Big)^{-1}.$$

Разделив обе части на $|h|$, при $h \to 0$, получаем

$$\|D^s u\|_\mu \leqslant c\|I_{t-2} f\|_\nu.$$

Правая часть ограничена равномерно по $\delta > 0$, поэтому при $\delta \to 0$ получаем (4) – для решений $u \in H^s_a$.

Рассмотрим регуляризованную систему

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = (-1)^t\varepsilon\Delta^m u + \mathcal{L}\, u = f, \tag{11}$$

$\varepsilon > 0$ произвольно малое. Нетрудно проверить (опираясь на теорему А), что оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ сильно монотонен в паре с оператором $\Delta^{-m}\mathrm{div}^s(\omega D^s u)$ в пространстве $H^s_a$, если вес $\omega$ определяется (7). Действительно, для $u, v \in H^s_a$

$$\big(\mathcal{L}_\varepsilon u - \mathcal{L}_\varepsilon v,\, \Delta^{-m}\mathrm{div}^s(\omega D^s(u-v))\big)$$

$$= (1+\varepsilon)\|D^s(u-v)\|^2_\omega + \int (B(D^s u) - B(D^s v))\, T^{t,s}(\omega D^s(u-v))dx$$

$$\geqslant (1+\varepsilon)\|D^s(u-v)\|^2_\omega - \|D^s(u-v)\|_\omega \|T^{t,s}(\omega D^s(u-v))\|_{1/\omega}.$$

По теореме Фубини и теореме А аналогично доказательству оценки (5) (от теоремы А здесь требуется только $T^{t,s}_{-a} = 1$ при $a \in (a_*, a^*)$) находим

$$\|T^{t,s}(\omega D^s(u-v))\|_{1/\omega} \leqslant \|D^s(u-v)\|_\omega,$$

что дает

$$\big(\mathcal{L}_\varepsilon u - \mathcal{L}_\varepsilon v,\, \Delta^{-m}\mathrm{div}^s(\omega D^s(u-v))\big) \geqslant \varepsilon\|D^s(u-v)\|^2_\omega.$$

Как известно, сильно монотонный липшиц-непрерывный оператор обратим, и обратный – тоже сильно монотонен и липшиц-непрерывен (см., например, [5], гл. 4). По неравенству Харди из $f \in H^{1-t}_{a+2}$ следует $f \in H^{-t}_{a}$ (при $a > -n$, но по теореме А всегда $|a| < n - 3$), поэтому система (11) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in H^s_a$.

Система (11) при $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (2), поэтому решения $u_\varepsilon \in H^s_a$ удовлетворяют оценкам (4), (5) равномерно по $\varepsilon > 0$. По слабой компактности пространств $H^s_a$ для любой последовательности $\varepsilon_j \to 0$ соответствующая последовательность решений $u_{\varepsilon_j}$ имеет хотя бы одну точку накопления $u \in H^s_{b-2} \cap H^{s-1}_{a-2}$ в слабой топологии. Поскольку $u \in H^s_{\mathrm{loc}}$, $u$ лежит локально в пространстве монотонности $H^s_0$ оператора $\mathcal{L}$ (в паре с оператором $\Delta^{(s-t)/2}$). Стандартная процедура, используемая при доказательстве леммы Минти-Браудера (основная лемма теории монотонных операторов, см., например, [5], гл. 4), вместе с процедурой локализации позволяет установить, что $u$ удовлетворяет интегральному тождеству для системы (1) с пробными функциями из $H^t_{\mathrm{comp}}$. Теорема доказана.

1. *Cordes H.O.* Über die ersti Randvertaufgabe bei quasilinear Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen // Math. Ann. – 1956. – V. **131**, № 3. – P. 287–312.
2. *Калита Е.А.* Регулярность по Морри нелинейных эллиптических систем высокого порядка при вырождении эллиптичности // Матем. заметки. – 2002. – Т. **72**, № 2. – С. 198–206.
3. *Калита Е.А.* О весовых нормах преобразований Рисса // Докл. РАН. – 2002. – Т. **383**, № 1. – С. 12–14.
4. *Калита Е.А.* О равенстве единице весовых норм преобразований Рисса // Матем. заметки. – 2002. – Т.**72**, № 6. – С. 869–882.
5. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

**E. A. Kalita**

**Solvability for nonlinear elliptic systems of nonstrictly divergent form under degeneration of ellipticity.**

We consider high order nonlinear elliptic systems of nonstrictly divergent form under structure condition provides coercivity and monotonicity in pair with some degree of Laplacian. We establish a priori estimates which do not degenerate under degeneration of structure condition and failing of coercivity. It gives solvability for systems with degeneration. Our results are principally different from results which are possible for strictly divergent systems.

***Keywords:*** *nonlinear elliptic systems, high order, degeneration, nonstrictly divergent, solvability.*

**Є. О. Калита**

**Розв'язність нелінійних еліптичних систем нестрого дивергентного вигляду при виродженні еліптичності.**

У роботі розглядаються нелінійні еліптичні системи високого порядку нестрого дивергентного вигляду при структурних умовах, що забезпечують коерцитивність та монотонність у парі зі степінню оператора Лапласа. Встановлюються апріорні оцінки, які не вироджуються при виродженні цих умов та втраті коерцитивності, що призводить до розв'язності вироджених систем. Результати принципово відрізняються від результатів, можливих для систем строго дивергентного вигляду.

***Ключові слова:*** *нелінійні еліптичні системи, вищий порядок, виродження, нестрого дивергентні, розв'язність.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
`ekalita@mail.ru`

Получено 15.07.2010