УДК 511.17+512.542.74

©2010. **А.А. Кадубовский**

ОБ ОБОБЩЕНИИ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

В данной статье доказывается мультипликативность функции, являющейся обобщением функции Эйлера. Также приводятся ранее неизвестные применения указанного обобщения к решению некоторых задач перечислительной комбинаторики.

Ключевые слова: *функция Эйлера, мультипликативная функция, применения.*

Введение. Пусть $h, m \in N$. Символом (h, m) будем обозначать наибольший общий делитель чисел h і m. Напомним (напр. [1]), что функцию $\varphi(m)$ натурального аргумента m, которая определяется соотношением $\varphi(m) = |M|$, где $M = \{h \in \{1, 2, ..., m-1\} |\ (h, m) = 1\}$, называют функцией Эйлера. Хорошо известно, что мультипликативные функции, в частности, функции Эйлера, играют важную роль в теории чисел и широко применимы к задачам перечислительной комбинаторики.

Данная статья посвящена изучению некоторых обобщений функции Эйлера. А именно, введем в рассмотрение функцию $\varphi^*(m)$ натурального аргумента m, которая определяется посредством соотношений

$$\varphi^*(m) = |M|, \quad \text{где} \quad M = \{h \in \{1, 2, ..., m-2\} |\ (h, m) = (h+1, m) = 1\}. \qquad (1)$$

Пример 1. Пусть $m = 15$. Тогда только три числа 1, 7 и 13 удовлетворяют условию (1): $(1, 15) = (2, 15) = 1$; $(7, 15) = (8, 15) = 1$; $(13, 15) = (14, 15) = 1$. Поэтому $\varphi^*(15) = 3$. Очевидно так же, что $\varphi^*(2) = 0$, $\varphi^*(3) = 1$.

В данной статье приводится доказательство мультипликативности функции $\varphi^*(m)$, установлена справедливость аналогичного утверждения в более общем случае. Получены соотношения для вычисления указанных функций, зная каноническое разложение аргумента на сомножители. Впервые приведены применения указанных обобщений к решению некоторых задач перечислительной комбинаторики.

1. Основные свойства функции $\varphi^*(\cdot)$.

Функция $\varphi^*(\cdot)$ обладает следующими очевидными свойствами:

1^0 если m — четно, то $\varphi^*(m) = 0$;

2^0 если $m \geq 3$ — нечетно, то $\varphi^*(m) \geq 1$;

3^0 если m — простое, то $\varphi^*(m) = m - 2$.

Ради определенности, в дальнейшем будем полагать, что $\varphi^*(1) = 1$. В виду свойства 1^0, эту функцию целесообразно рассматривать только на множестве нечетных натуральных чисел.

Поэтому следуя [1], функцию $\varphi^*(m)$, определенную и не равную нулю на множестве нечетных натуральных чисел, будем называть мультипликативной, если $\varphi^*(a \cdot b) = \varphi^*(a) \cdot \varphi^*(b)$ для взаимно простых a и b.

В начале покажем справедливость следующего утверждения

Лемма 1.1. *Для произвольного простого p и натурального α имеет место равенство*

$$\varphi^*\left(p^\alpha\right) = p^{\alpha-1} \cdot \varphi^*\left(p\right) = p^{\alpha-1} \cdot (p-2) = p^\alpha \cdot \left(1 - \frac{2}{p}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через $P_\alpha = \{1, 2, 3, ..., p^\alpha\}$ множество чисел от 1 до p^α. Очевидно, что в этой последовательности каждое p-ое число не является взаимно простым с числом p^α. Рассмотрим далее множество

$$A = \left\{ a_k = k \cdot p |\, k = 1, 2, ..., p^{\alpha-1} \right\}.$$

Очевидно, что $(a_k, p^\alpha) \geq p$. С другой стороны — каждое из $(p^\alpha - p^{\alpha-1})$ чисел множества $P_\alpha \backslash A$ является взаимно простым с p^α.

Однако, ни одно из чисел $a_k - 1$ (из множества $P_\alpha \backslash A$) не удовлетворяет условию (1), так как следующее после него число a_k не является взаимно простым с числом p^α.

Поэтому $\varphi^*\left(p^\alpha\right) = p^\alpha - 2p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1} \cdot (p-2) = p^{\alpha-1} \cdot \varphi^*\left(p\right)$. $\square$

В дальнейшем под каноническим разложением числа m (на сомножители) будем понимать представление числа m в виде произведения степеней, основаниями которых являются простые числа: $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}, (p_i < p_{i+1})$.

В учебной литературе по теории чисел (напр. [2]) доказывается следующее утверждение

Предложение 1.1. Пусть x, p и q — натуральные числа больше единицы. Тогда следующие условия эквивалентны:

a) $(x, pq) = 1$; *b*) $\begin{cases} (x, p) = 1 \\ (x, q) = 1 \end{cases}$

Очевидным обобщением этого утверждения является следующее

Лемма 1.2. *Пусть x, p и q — натуральные числа больше единицы. Тогда имеет место критерий*

$$(x, pq) = (x+1, pq) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x, p) = (x+1, p) = 1 \\ (x, q) = (x+1, q) = 1 \end{cases}.$$

Следствие. Пусть p и q — взаимно простые нечетные числа. Тогда величина $\varphi^*\left(p \cdot q\right)$ равна числу всех таких $x \in \{1, ..., pq-2\}$, для которых одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} (x, p) = (x, q) = 1 \\ (x+1, p) = (x+1, q) = 1 \end{cases} \text{ или же } \begin{cases} (x, p) = (x+1, p) = 1 \\ (x, q) = (x+1, q) = 1 \end{cases}.$$

Пример 3. Пусть $m = 45$. Не составляет труда убедиться, что $\varphi^*\left(45\right) = 9$.

$\boxed{1}$	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	$\boxed{7}$	~~8~~	~~9~~
~~10~~	~~11~~	~~12~~	$\boxed{13}$	~~14~~	~~15~~	$\boxed{16}$	~~17~~	~~18~~
~~19~~	~~20~~	~~21~~	$\boxed{22}$	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~
$\boxed{28}$	~~29~~	~~30~~	$\boxed{31}$	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
$\boxed{37}$	~~38~~	~~39~~	~~40~~	~~41~~	~~42~~	$\boxed{43}$	~~44~~	~~45~~

Заметим, что $45 = 5 \cdot 9$ и $(5, 9) = 1$. Более того, из приведенной иллюстрации не трудно видеть, что $\varphi^*(45) = \varphi^*(9) \cdot \varphi^*(5) = 3 \cdot 3 = 9$.

Теорема 1.1. *Для нечетных взаимно простых p и q имеет место равенство*

$$\varphi^*(p \cdot q) = \varphi^*(p) \cdot \varphi^*(q) \tag{3}$$

Доказательство. Расположим числа от 1 до pq в виде следующей таблицы:

$0 \cdot p + 1$	...	$0 \cdot p + k$	$0 \cdot p + k + 1$	...	$0 \cdot p + p - 1$	p
$1 \cdot p + 1$	...	$1 \cdot p + k$	$1 \cdot p + k + 1$	...	$1 \cdot p + p - 1$	$2p$
			...			
$(q-2)p + 1$	...	$(q-2)p + k$	$(q-2)p + k + 1$	...	$(q-2)\,p + p - 1$	$qp - p$
$(q-1)p + 1$	...	$(q-1)p + k$	$(q-1)p + k + 1$	...	$(q-1)\,p + p - 1$	$qp.$

По определению среди чисел $1, 2, ..., p$ содержится точно $\varphi^*(p) \geq 1$ таких x, что $(x, p) = (x + 1, p) = 1$. В дальнейшем указанные x будем называть *приемлемыми.* Пусть k одно из $\varphi^*(p)$ таких чисел. Очевидно, что k определяет k-ый столбец, в котором содержатся числа вида

$$(i \cdot p + k)\,, \quad i = \overline{0, ..., q-1}.$$

Покажем, что для каждого $i = \overline{0, ..., q-1}$ и фиксированного k выполняется условие $(i \cdot p + k; p) = 1$. Допустим, что это не так.

Тогда $\begin{cases} ip + k = d \cdot l \\ p = d \cdot p' \\ d > 1 \end{cases}$. Откуда $\begin{cases} ip + k = d \cdot l \\ ip = i \cdot d \cdot p' \\ d > 1 \end{cases}$ или же $\begin{cases} k = d \cdot (l - ip') \\ p = d \cdot p' \\ d > 1 \end{cases}$.

Но тогда $(k; p) = (d(l - ip'); dp') \geq d > 1$. Чего быть не может, так как $(k; p) = 1$.

Таким образом, в каждом столбце, который определяется приемлемым k, содержатся числа взаимно простые с p. Более того, так как $(k + 1; p) = 1$, то в силу выше сказанного, в $(k + 1)$-ом столбце также все числа являются взаимно простыми с p.

Итак, существует точно $\varphi^*(p)$ столбцов, каждый из которых содержит числа x, которые удовлетворяют условию $(x, p) = (x + 1, p) = 1$. Более того, последнему условию удовлетворяют исключительно те числа, которые содержатся в указанных $\varphi^*(p)$ столбцах. Справедливость последнего следует из того, что $(i \cdot p + k; p) = 1 \Leftrightarrow (k; p) = 1$

Покажем далее, что в каждом из p столбцов числа образуют полную систему вычетов по модулю q. Для этого рассмотрим числа k-го столбца ($k = \overline{1, 2, ..., p}$)

$$0 \cdot p + k,\ 1 \cdot p + k,\ 2 \cdot p + k,\ 3 \cdot p + k,\ ...,\ (q-2) \cdot p + k,\ (q-1) \cdot p + k,$$

а доказательство проведем методом от противного.
Допустим, что среди указанных чисел существует хотя бы два таких числа

$$ip + k \quad \text{и} \quad jp + k, \quad i > j, \quad i, j = \overline{1, 2, ..., q-1},$$

которые при делении на q дают одинаковый остаток r, $\quad 0 \leq r < q$.

Тогда очевидно, что разница $(ip - jp)$ этих чисел (нацело) делится на q. Откуда следует, что $(i - j)p = dq, d \geq 1$. Так как числа p и q являются взаимно простыми, то последнее равенство возможно только при условии $\begin{cases} i - j = q \\ p = d \end{cases}$, чего быть не может, так как разница $1 \leq (i - j) \leq q - 2$. Пришли к противоречию.

Следовательно, числа $(i \cdot p + k)$, $i = \overline{0, ..., q-1}$ фиксированного k-го столбца действительно образуют полную систему вычетов по модулю q. И поэтому среди указанных чисел содержится точно $\varphi^* (q) \geq 1$ чисел y, которые удовлетворяют условию $(y; q) = (y + 1; q) = 1$.

Рассмотрим далее те столбцы, которые определяются приемлемыми k. Все числа x, удовлетворяющие условию $(x; p) = (x + 1; p) = 1$, содержатся исключительно в указанных столбцах, количество которых равно $\varphi^*(p)$. С другой стороны — в каждом таком столбце содержится точно $\varphi^*(q)$ чисел y, которые удовлетворяют условию $(y; q) = (y + 1; q) = 1$. Таким образом, те числа y, которые удовлетворяют последнему условию и содержатся в указанных столбцах, одновременно удовлетворяют четырем условиям:

$$\begin{cases} (y, p) = (y + 1, p) = 1 \\ (y, q) = (y + 1, q) = 1 \end{cases}.$$

Согласно **лемме 1.2**, среди чисел от 1 до pq содержится точно $\varphi^* (p) \cdot \varphi^* (q)$ таких y, что $(y, pq) = (y + 1, pq)$ =1. Таким образом, $\varphi^* (p \cdot q) = \varphi^* (p) \cdot \varphi^* (q)$. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение нечетного числа m. Тогда значение функции $\varphi^* (m)$ может быть вычислено по формулам*

$$\varphi^* (m) = m \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{2}{p_k}\right) = \tag{4}$$

$$= \varphi (m) \left(\frac{p_1 - 2}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(\frac{p_2 - 2}{p_2 - 1}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{p_k - 2}{p_k - 1}\right). \tag{5}$$

Справедливость утверждения является следствием **леммы** 1.1. и **теоремы** 1.1.

2. Обобщение функции $\varphi^*(\cdot)$ и функции Эйлера $\varphi(\cdot)$.

Определение 2.1. Функцию натурального аргумента m, которая определяется соотношениями $\varphi_k(m) = |M|$, где

$$M = \left\{ h \in \{1, 2, ..., m-k\} \middle| \; (h, m) = (h+1, m) = ... = (h+k-1, m) = 1 \right\}, \qquad (6)$$

будем называть и обозначать $\varphi_k(m)$.

Замечание. Из определения функции Эйлера $\varphi(\cdot)$, функции $\varphi^*(\cdot)$ и определения 2.1. имеем, что $\varphi_1(m) = \varphi(m)$, $\varphi_2(m) = \varphi^*(m)$.

Предложение 2.1. Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$ – каноническое разложение натурального числа m по простым делителям $(p_i < p_{i+1})$. Тогда для произвольного натурального $k \geq p_1$ значение функции $\varphi_k(m) = 0$.

Предложение 2.2. Для произвольного простого p и фиксированного $k \in \{1, ..., p-1\}$ имеет место равенство $\varphi_k(p) = p - k = \varphi(p) - (k-1)$.

Теорема 2.1. *Для произвольного простого p, натурального α и фиксированного $k \in \{1, ..., p-1\}$ имеет место равенство*

$$\varphi_k(p^\alpha) = p^{\alpha-1} \cdot \varphi_k(p) = p^{\alpha-1} \cdot (p-k) = p^\alpha \cdot \left(1 - \frac{k}{p}\right). \qquad (7)$$

Доказательство. Обозначим через $P_\alpha = \{1, 2, 3, ..., p^\alpha\}$ множество чисел от 1 до p^α. Очевидно, что в этой последовательности каждое p-ое число не является взаимно простым с числом p^α. Рассмотрим далее множества

$$A = \left\{ a_l = l \cdot p | \, l = 1, 2, ..., p^{\alpha-1} \right\} \quad \text{и} \quad A_l = \{ a_{lj} = a_l - j | \, j = 1, ..., k-1 \}.$$

Очевидно, что для каждого $l = 1, 2, ..., p^{\alpha-1}$ $\quad (a_l, p^\alpha) \geq p$.

Более того, для каждого $l = 1, 2, ..., p^{\alpha-1}$ ни одно из чисел $a_{lj} = a_l - j$, $j = 1, ..., k-1$ не удовлетворяет условию (6).

Так как p является простым и для каждого $l = 1, 2, ..., p^{\alpha-1}$ справедливо равенство $\|A_l\| = k-1$, приходим к заключению о том, что только числа множества $P_\alpha \backslash \left\{ A \cup A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{p^{\alpha-1}} \right\}$ удовлетворяют условию (8).

Таким образом $\varphi_k(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} - p^{\alpha-1} \cdot (k-1) = p^{\alpha-1} \cdot (p-k) = p^{\alpha-1} \cdot \varphi_k(p)$. $\square$

Лемма 2.1. *Пусть x, k, p и q — натуральные числа, причем, $p > q$, а $k \in \{1, ..., q-1\}$. Тогда следующие условия являются эквивалентными*

A) $\quad (x, pq) = ... = (x+k-1, pq) = 1;$

B) $\quad \begin{cases} (x, p) = (x+1, p) = ... = (x+k-1, p) = 1 \\ (x, q) = (x+1, q) = ... = (x+k-1, q) = 1. \end{cases}$

Доказательство утверждения, с очевидными изменениями, ведется по схеме доказательства **леммы 1.2**.

Следствие. Пусть p и q $(p > q)$ — взаимно простые нечетные числа, а $k \in \{1,...,q-1\}$. Тогда величина $\varphi_k(p \cdot q)$ совпадает с числом таких $x \in \{1,...,pq-k\}$, для которых одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} (x,p) = (x+1,p) = ... = (x+k-1,p) = 1 \\ (x,q) = (x+1,q) = ... = (x+k-1,q) = 1. \end{cases}$$

Теорема 2.2. *Для натуральных взаимно простых p и q $(p > q)$, и фиксированного $k \in \{1,...,q-1\}$ имеет место равенство*

$$\varphi_k(p \cdot q) = \varphi_k(p) \cdot \varphi_k(q). \tag{8}$$

Доказательство. Расположим числа от 1 до pq в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{lllllll}
0 \cdot p+1 & 0 \cdot p+2 & 0 \cdot p+3 & ... & 0 \cdot p+p-2 & 0 \cdot p+p-1 & p \\
1 \cdot p+1 & 1 \cdot p+2 & 1 \cdot p+3 & ... & 1 \cdot p+p-2 & 1 \cdot p+p-1 & 2p \\
 & & & ... & & & \\
(q-2)p+1 & (q-2)p+2 & & ... & (q-1)p-2 & (q-1)\,p-1 & (q-1)\,p \\
(q-1)p+1 & (q-1)p+2 & & ... & qp-2 & qp-1 & qp \quad .
\end{array}$$

В первой строке содержится точно $\varphi_k(p) \geq 1$ таких чисел x, что
$$(x,p) = (x+1,p) = ... = (x+k-1,p) = 1.$$

Так как число $sp+t$ является взаимно простым с числом p тогда и только тогда, когда число t является взаимно простым с числом p, то все числа столбцов, которые определяются „приемлемыми" x, являются взаимно простыми с p. И наоборот — все числа столбцов, которые определяются „неприемлемыми" x, не являются взаимно простыми с p.

Рассмотрим далее те столбцы, которые определяются приемлемыми для нас x. Каждый l-ый столбец $(l = 1,2,...,p-k)$ содержит числа вида $jp+l$, где номер $j = \overline{0,...,q-1}$ и поэтому пробегает полную систему вычетов по модулю q. Так как p и q взаимно просты а $l = const$, то и числа $\{jp+l\}_{j=0}^{q-1}$ образуют полную систему вычетов $\{0,1,2...,q-1\}$ по модулю q.

Поэтому в каждом столбце, который определяется приемлемым x, содержится одинаковое количество $\varphi_k(q) \geq 1$ таких чисел y, что имеют место равенства $(y,q) = (y+1,q) = ... = (y+k-1,q) = 1$.

Таким образом, в каждом из $\varphi_k(p)$ столбцов содержится по $\varphi_k(q)$ таких x, что выполняются условия
$$\begin{cases} (x,p) = (x+1,p) = ... = (x+k-1,p) = 1 \\ (x,q) = (x+1,q) = ... = (x+k-1,q) = 1 \end{cases}.$$

Тогда по **лемме 2.1** среди чисел от 1 до pq содержится ровно $\varphi_k(p) \cdot \varphi_k(q)$ таких x, что $(x,pq) = (x+1,pq) = ... = (x+k-1,pq) = 1$.
Поэтому $\varphi_k(p \cdot q) = \varphi_k(p) \cdot \varphi_k(q)$. $\square$

Теорема. *Пусть* $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$ $(p_i < p_{i+1})$ *— каноническое разложение нечетного числа* m*, а* $k \in \{1, ..., p_1 - 1\}$*. Тогда значение функции* $\varphi_k(m)$ *может быть вычислено по формуле*

$$\varphi_k(m) = m\left(1 - \frac{k}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{k}{p_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k}{p_l}\right). \qquad (9)$$

Справедливость утверждения является следствием **теорем** 2.1. и 2.2.

3. Применения функции $\varphi^*(\cdot)$**.**

Пусть S_n — симметрическая группа, CS_n — множество циклов длины n. Общеизвестно, что каждый цикл $b = (1, j_2, ..., j_n)$ можно представить n разными способами с помощью циклических перестановок (смещений) его элементов. Поэтому естественным является отождествление всех таких представлений. На множестве CS_n введем отношение эквивалентности посредством отождествления циклов $b = (1, j_2, ..., j_n)$ и $b' = b + k \mod n = (1 + k \mod n, ..., j_n + k \mod n)$ при каждом $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Тогда, как известно, совокупность указанных классов эквивалентности есть фактор-множество CS_n/nZ_n, где Z_n – множество классов вычетов по модулю n. В 2003г. в [3] впервые было приведено доказательство соотношения для вычисления величины $\varphi_n = |CS_n/nZ_n|$ – числа классов эквивалентности.

Введем в рассмотрение следующее множество циклов

$$CS_n^* = \{b \in CS_n |\ \pi \circ b \in CS_n\}, \quad \text{где} \quad \pi = (1, 2, ..., n) \in CS_n.$$

Тогда, как следует из работы автора [3], величину $\varphi_n^* = |CS_n^*/nZ_n|$ при нечетных n можно вычислить с помощью соотношения

$$\varphi_n^* = \frac{1}{n}\left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + \sum_{i|n,\ i \neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \frac{2(i-1)!}{i+1} \cdot \varphi^*\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\right). \qquad (10)$$

Более того, с помощью функции $\varphi^*(\cdot)$ представляется возможным вычисление не только указанной выше величины φ_n^*, но и подсчет числа:

1) неизоморфных двухцветных хордовых O-диаграмм максимального рода (с n хордами);

2) топологически неэквивалентных гладких функций с одной (вырожденной) седловой критической точкой, одним максимумом и одним минимумом на замкнутой ориентируемой поверхности произвольного рода $g = \frac{n-1}{2}$.

Более полную информацию, относительно задач 1) и 2), можно найти в работах [4,5].

В заключение приведем пример, иллюстрирующий природу функции $\varphi^*(\cdot)$. Подсчет величин φ_n и φ_n^* по лемме Бернсайда напрямую связан с нахождением количества элементов, принадлежащих множествам $CS_{n,i} = \{b \in CS_n |\ b + i = b \bmod n\}$ и $CS_{n,i}^* = \{b \in CS_n^* |\ b + i = b \bmod n\}$, соответственно.

Пример 4. Подсчитаем число элементов, принадлежащих множеству $CS_{n,1}^{*}$.

Пусть $b \in CS_n$, тогда b можно представить в виде $b = (1, j_2, ..., j_n)$. Так как $b \in CS_{n,1}$, то $b + 1 = b \mod n$. Поэтому циклу b принадлежит каждая из упорядоченных пар: $\{1, j_2\}, \{2, j_2 + 1\}, ..., \{j_2, 2j_2 - 1\}, ..., \{2j_2 - 1, 3j_2 - 2\}, ...$

Откуда заключаем, что цикл b представим в виде

$$b = (1, 1 + h, 1 + 2h, ..., 1 + (n-1)h),$$

где $h = j_2 - 1$. Очевидно, что $b \in CS_{n,1}$ тогда и только тогда, когда h является взаимно простым с n. Более того, b представим в виде $b = \pi^h, \quad \pi = (1, 2, 3, ..., n)$, где $(h, n) = 1$. Однако, не при каждом таком h цикл $b \in CS_{n.1}^{*}$. Так, например, при $h = n - 1$ произведение $w(b) = \pi \circ b \notin CS_n$.

Далее, так как $w(b) = \pi \circ b$, то произведение $w(b) = \pi \circ \pi^h = \pi^{h+1}$. Очевидно, что $w(b)$ является циклом длины n тогда и только тогда, когда $(h', n) = 1$.

Таким образом, $b \in CS_{n,1}^{*}$ тогда и только тогда, когда b имеет вид $b = (1, 1 + h, 1 + 2h, ..., 1 + (n-1)h)$ и выполнены условия $(h, n) = 1 = (h + 1, n)$. Поэтому $|CS_{n,1}^{*}| = \varphi^{*}(n)$. Из приведенного примера не трудно заключить, что $\varphi_k(n) = |CS_{n,1}^{k}|, \quad CS_{n,1}^{k} = \{b \in CS_{n,1} |\ \pi^j \circ b \in CS_n\ \forall j = 1, ..., k-1\}$.

Следует отметить, что впервые мультипликативность функции $\varphi^{*}(\cdot)$ была анонсирована в 2001г. в [6], где были приведены и начальные значения этой функции. Так как этот результат не является классическим и почти неизвестным в учебной литературе, автор счел своим долгом привести доказательство этого красивого результата.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе установлена мультипликативность функции $\varphi_k(\cdot)$, которая является обобщением функции Эйлера и тождественна ей при $k = 1$. Установлены формулы, позволяющие по каноническому разложению аргумента, вычислить значения указанной функций. Приведен ряд эквивалентных задач, решение которых стало возможном только с привлечением функции $\varphi_2(\cdot)$. Другие применения функции $\varphi_k(\cdot)$ автору не известны.

1. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел – М.: Наука, 1972. – 178 с.
2. *Казачек Н.А., Перлатов Г.Н., Виленкин Н.Я.* Алгебра и теория чисел: учебное пособие для студентов заочников 2 курса физико-математических факультетов педагогических институтов – М.: Просвещение, 1984. – 192с.
3. *A. Vella.* Pattern avoidance in permutations: linear and cyclic orders // The electronic journal of combinatorics – 2003. – №10 – 43p.
4. *Кадубовський О.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Український математичний журнал – 2006 – т. 58, №3 – с. 343-351.
5. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — с. 17-27.
6. *V. Jovovic* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at: http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A058026

A.A. Kadubovsky

About generalization of Euler's totient function and some its applications.

In this paper we consider the arithmetic function, which is a generalization of Euler function. It is proven that this function is multiplicative. Formulas for the calculation of this function and some its application are resulted also.

Keywords: *Euler's totient function, multiplicative function, application.*

О.А. Кадубовський

Про узагальнення функції Ейлера та деякі її застосування.

У даній статті доводиться мультипликативність функції, яка є узагальненням функції Ейлера. Також наводяться раніше невідомі застосування вказаного узагальнення до розв'язку деяких задач перелічувальної комбінаторики.

Ключові слова: *функція Ейлера, мультиплікативна функція, застосування.*

Славянский государственный педагогический университет
kadubovs@ukr.net, kadubovs@imath.kiev.ua

Получено 21.12.09