

УДК 539.3

©2010. В.В. Залётов, Н.С. Хапилова

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ**

Исследованы закономерности распределения перемещений внутри и на границе деформируемого полупространства при действии на него сосредоточенной силы, приложенной к граничной плоскости, в точках которой нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения отсутствуют. Выполнено сравнение численных результатов с решением задачи Буссинеска, которая является частным случаем сформулированной смешанной задачи. Установлено влияние расстояния от плоскостей  $z=const$  до границы полупространства на распределение перемещений в упругой области. Изучено перераспределение перемещений при варьировании параметров, характеризующих механические свойства изотропного полупространства и упругого основания.

**Ключевые слова:** теория упругости, полупространство, смешанная задача, аналитическое решение, перемещения, компьютерная графика.

**Введение.** В работе [1] с помощью интегрального преобразования Ханкеля решена смешанная задача теории упругости о распределении напряжений и перемещений в изотропном полупространстве при действии на него сосредоточенной силы, приложенной к граничной плоскости, в точках которой нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения отсутствуют. Получены аналитические формулы для компонент напряжений и перемещений на границе и в произвольных точках упругой области. В частном случае, когда коэффициент пропорциональности равен нулю, эти формулы совпадают с известным решением [2] задачи Буссинеска о распределении напряжений и перемещений в изотропном полупространстве, к границе которого приложена нормальная сосредоточенная сила.

Задача Буссинеска является базовой моделью при исследовании многих прикладных проблем не только в машиностроении, но и в строительной механике, геомеханике, биофизике, инженерной медицине и других областях науки, в которых используются методы теории упругости. Этим объясняется регулярное появление в печати научных работ, посвященных тем или иным обобщениям задачи Буссинеска, связанным с усложнением граничных условий, дифференциальных уравнений теории упругости, структуры и упругих свойств полупространства и т.д. Так, A.P.S. Selvadurai [3, 4] обобщил классическое решение задачи Буссинеска на случай, когда нормально нагруженное упругое полупространство подкреплено диском или мембраной. В работе [5] получено трёхмерное аналитическое решение задачи о нормальной сосредоточенной силе, действующей на свободную поверхность покрытого специальным материалом полупространства. J.G. Simmonds и P.G. Warne [6] исследовали задачу о деформации изотропного полупространства сосредоточенной силой на основе точных уравнений теории упругости для несжимаемых и сжимаемых материалов. Полученные в статье [6] результаты обобщены на случай трансверсально-

изотропного полупространства в работе [7]. Н.Г.Георгиадис, Д.С.Анагносту [8] построили соотношения классической теории упругости, предположив, что функция "деформация-плотность энергии" зависит не только от деформационных членов, но и от градиентов деформаций. В работах [9-11] решение задачи Буссинеска обобщено на случай полупространства, лежащего на упругом основании.

Ниже на основе аналитического решения смешанной задачи, полученного в статье [1], изучены закономерности распределения перемещений внутри и на границе деформируемого полупространства. Выполнено сравнение с решением задачи Буссинеска, которая является частным случаем исследуемой осесимметричной смешанной задачи.

**1. Основные соотношения. Постановка и аналитическое решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства.** Рассмотрим верхнее упругое полупространство  $z \geq 0$ . Начало цилиндрической системы координат  $r, \Theta, z$  совместим с точкой приложения сосредоточенной силы  $P$ . В случае осесимметричной деформации перемещения  $u, w$  вдоль осей  $r, z$  не зависят от координаты  $\Theta$ , окружное перемещение  $v$  равно нулю, компоненты деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\Theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}$  связаны с перемещениями зависимостями

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_\Theta = \frac{u}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (1)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Компоненты напряжения  $\tau_{r\Theta}, \tau_{\Theta z}$  равны нулю. Закон Гука записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\Theta + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\Theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\Theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\Theta)], \\ \gamma_{rz} &= \frac{1}{G}\tau_{rz}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $E$  - модуль Юнга,  $G$  - модуль сдвига,  $\nu$  - коэффициент Пуассона. К уравнениям (1)-(3) необходимо добавить условие совместности деформаций.

Граничные условия осесимметричной смешанной задачи теории упругости для деформируемого полупространства запишем в виде

$$\sigma_z(r, 0) = kw(r, 0) - P\delta(r), \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad (4)$$

где  $k$  - постоянная,  $P$ - интенсивность сосредоточенной силы,  $\delta$  - дельта-функция Дирака.

Введем функцию напряжений Лява [95], с помощью которой система (1)-(3) преобразуется к уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad (5)$$

здесь оператор имеет вид  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Компоненты напряжений и перемещений через функцию  $\Phi(r, z)$  выражаются следующими формулами:

$$u = -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad (6)$$

$$w = \frac{1}{2G} [2(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}], \quad (7)$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} (\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}), \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} (\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}), \quad (9)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} [(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}], \quad (10)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}], \quad (11)$$

где  $G = E/[2(1 + \nu)]$ .

Решение задачи сводится к определению функции  $\Phi(r, z)$ , для которой в плоскости  $z = 0$  выполняются граничные условия (4) при подстановке в них выражений (10), (11) для компонент напряжений  $\sigma_z, \tau_{rz}$  и (7) для перемещения  $w$ .

Решив задачу (4)-(5) с помощью интегрального преобразования Ханкеля, найдём напряжения и перемещения в упругом полупространстве [1]:

$$\begin{aligned}
 u(r, z) &= -\frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left[ \frac{1-2\nu}{r} \left( 1 - \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{rz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \\
 &\quad + \frac{\chi(1+\nu)P}{2\pi E} \int_0^\infty (1-zt-2\nu) J_1(rt) \frac{e^{-tz}}{t+\chi} dt, \\
 w(r, z) &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left[ \frac{2(1-\nu)}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \\
 &\quad + \frac{\chi(1+\nu)P}{2\pi E} \int_0^\infty (2\nu-2-tz) J_0(rt) \frac{e^{-tz}}{t+\chi} dt, \\
 \sigma_r(r, z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1-2\nu}{r^2} \left( 1 - \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{3zr^2}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \right] + \\
 &\quad + \frac{P\chi}{2\pi r} \int_0^\infty [rt(1-zt)J_0(rt) - (1-zt-2\nu)J_1(rt)] \frac{e^{-tz}}{t+\chi} dt, \\
 \sigma_\Theta(r, z) &= \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[ \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] + \\
 &\quad + \frac{P\chi}{2\pi} \int_0^\infty (2\nu t J_0(rt) + \frac{1}{r} (1-zt-2\nu) J_1(rt)) \frac{e^{-tz}}{t+\chi} dt, \\
 \sigma_z(r, z) &= -\frac{3Pz^3}{2\pi(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{P\chi}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-tz} t(1+tz)}{t+\chi} J_0(rt) dt, \\
 \tau_{rz}(r, z) &= -\frac{3Prz^2}{2\pi(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{P\chi z}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-tz}}{t+\chi} J_1(rt) dt.
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $J_0(rt), J_1(rt)$  - функции Бесселя, параметр  $\chi$  определяется из соотношения

$$\chi = 2k(1-\nu^2)/E. \tag{13}$$

Приравнивая в формулах (12) координату  $z$  нулю, получим распределение напряжений и перемещений на границе области. При  $\chi = 0$  соотношения (12) совпадают с решением задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство.

**2. Численное исследование упругих перемещений в изотропном полупространстве.** Радиальные и вертикальные перемещения в точках упругого полупространства рассчитывались по формулам (4),(5). Из них следует, что в случае заданной интенсивности сосредоточенной силы перемещения зависят только от постоянных  $\chi, \nu, E$ . При расчётах коэффициент Пуассона и модуль упругости полагались равными, соответственно:  $\nu = 0.25, E = 10^4$  МПа, параметр  $\chi$  варьировался в пределах от 0.2 до 1.8.

Распределение радиальных перемещений  $u(r, z)$  в плоскостях  $z = 0.2; 0.4; 0.6$  показано на рис.1. В исследуемой области изменения координаты  $r \in [0.05, 0.4]$  радиальные перемещения положительны. В случае задачи Буссинеска они больше,

чем при решении смешанной задачи (кривые  $\chi=0.8$ ). Вблизи границы в плоскости  $z=0.2$  распределение перемещений имеет явно выраженный максимум. В плоскостях  $z=0.4$ ;  $z=0.6$  максимум уменьшается и удаляется от точки приложения сосредоточенной силы.

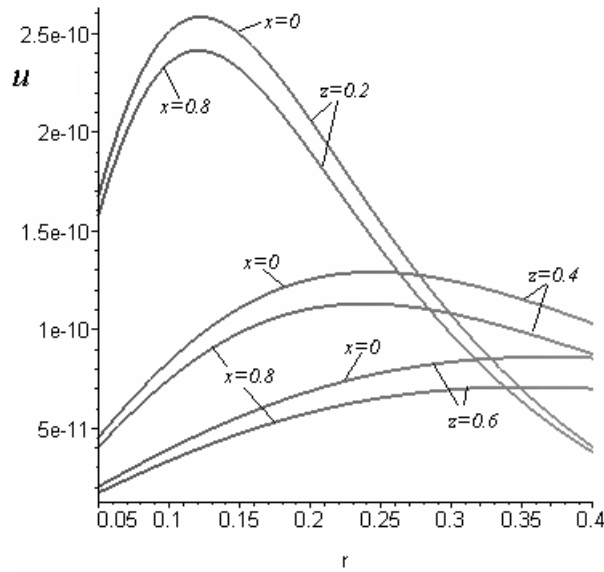


Рис. 1. Распределение радиальных перемещений  $u(r,z)$  в упругом полупространстве

На рисунках 2, 3 представлены результаты исследования зависимости распределения перемещения  $u(r,z)$  от параметра  $\chi$ .

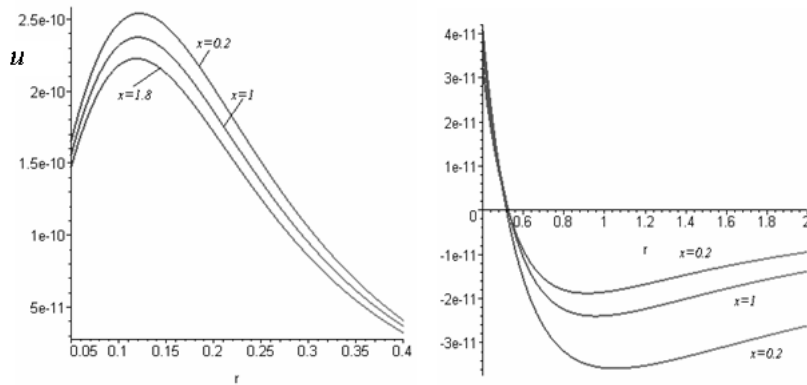


Рис. 2. Влияние параметра  $\chi$  на распределение радиальных перемещений в плоскости  $z=0.2$

Отметим, что при фиксированных значениях упругих постоянных  $\nu$ ,  $E$  рост параметра  $\chi$  происходит за счет увеличения постоянной  $k$ . Как видно из рис. 2, чем больше  $\chi$ , тем меньше величина положительных радиальных перемещений. В плоскости  $z=0.2$  радиальные перемещения при  $r^* \approx 0.52$  обращаются в нуль и при после-

дующем удалении от начала координат ( $r > r^*$ ) становятся отрицательными, при этом большим значениям параметра  $\chi$  соответствуют, как видно из рис. 2, меньшие абсолютные величины перемещений  $u$ .

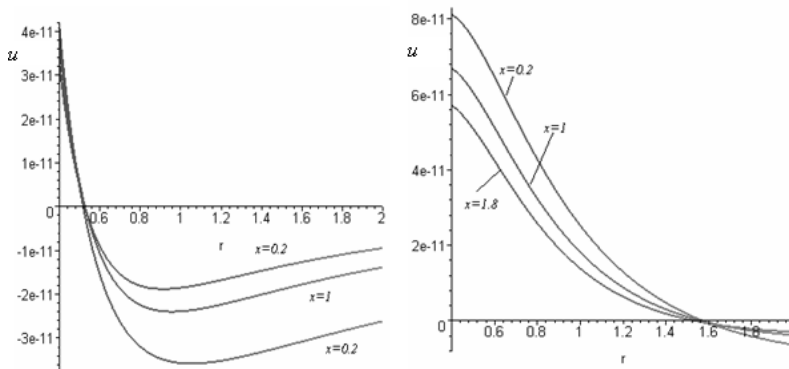


Рис. 3. Влияние параметра  $\chi$  на распределение радиальных перемещений в плоскости  $z=0.6$

В плоскости  $z=0.6$  (рис.3) радиальные перемещения вблизи оси  $z$  ( $r=0.05$ ) уменьшаются на порядок по сравнению с их величинами в плоскости  $z=0.2$ , при этом закономерности влияния параметра  $\chi$  на распределение перемещений сохраняются, а численное значение координаты  $r^*$ , при котором функция  $u(r,z)$  обращается в нуль, увеличивается.

Вертикальные перемещения рассчитывались по формуле (12). Графики зависимости  $w(r,z)$  от координаты  $r$  в плоскостях  $z=0.2; 0.4; 0.6$  представлены на рисунке 4. Из сравнения кривых на рисунках 4 и 1 следует, что вертикальные перемещения

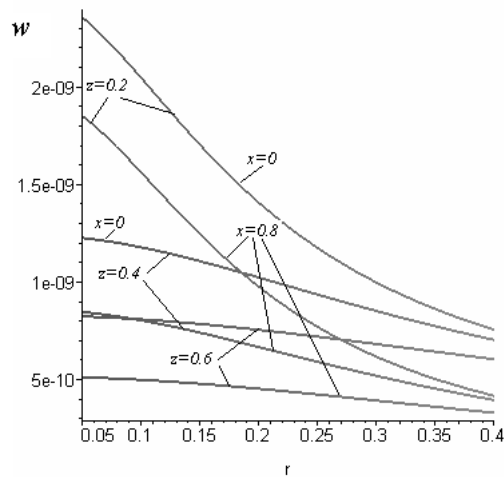


Рис. 4. Распределение вертикальных перемещений  $w(r,z)$  в упругом полупространстве

в упругом полупространстве на порядок больше, чем радиальные. Кривые на рис.

4 показывают, что вертикальные перемещения, рассчитанные на основе решения смешанной задачи при  $\chi = 0.8$ , существенно меньше, чем при решении задачи Буссинеска, когда  $\chi = 0$ . Отметим, что графики, приведенные на рисунке 4, позволяют также количественно оценить уменьшение вертикальных перемещений при увеличении  $z$  от 0.2 до 0.6.

Из рисунков 5, 6 видно, что при изменении  $r$  от 0.04 до 2 вертикальные перемещения остаются положительными.

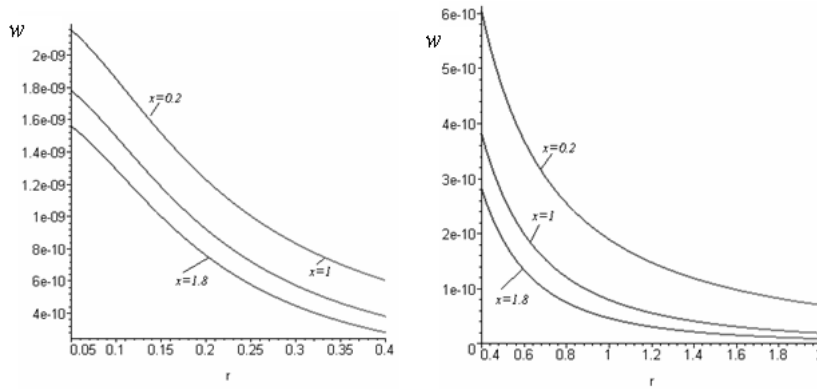


Рис. 5. Влияние параметра  $\chi$  на распределение вертикальных перемещений  $w$  в плоскости  $z=0.2$

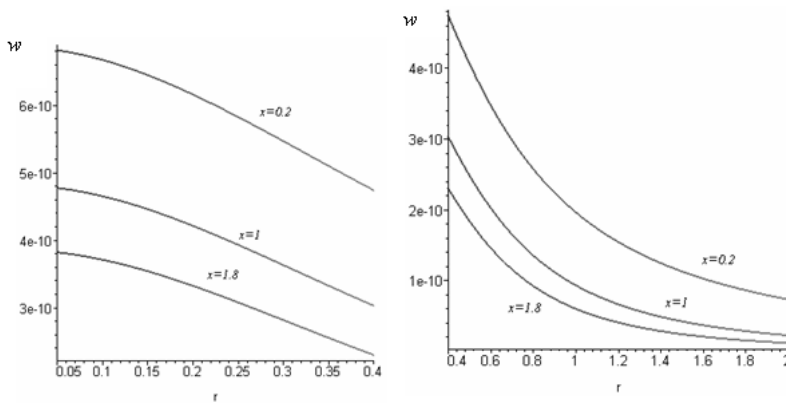


Рис. 6. Влияние параметра  $\chi$  на распределение вертикальных перемещений  $w$  в плоскости  $z=0.6$

С ростом  $\chi$  перемещения  $w(r, z)$  уменьшаются, причем влияние параметра  $\chi$  на распределение вертикальных перемещений очень существенно.

### 3. Распределение упругих перемещений на границе полупространства.

Результаты численных исследований распределения напряжений на границе и внутри упругого полупространства приведены в работе [9]. В плоскости, ограничивающей упругое полупространство, касательные напряжения  $\tau_{rz}$  равны нулю, нормальные напряжения найдем из соотношений (12), полагая в них  $z=0$ , в частности, для

напряжения  $\sigma_z$  получим

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{\chi}{2\pi} \int_0^\infty J_0(rt) \frac{t}{t + \chi} dt. \quad (14)$$

Из графиков [9] для распределения напряжения  $\sigma_z$  на границе полупространства следует, что вблизи точки приложения сосредоточенной силы с ростом параметра  $\chi$  от 0.2 до 1.8 напряжения  $\sigma_z$  увеличиваются. Однако при дальнейшем увеличении радиальной координаты  $r$  эта закономерность изменяется: кривая  $\sigma_z$ , соответствующая  $\chi=1.8$ , приближается к кривой  $\chi=1$  и пересекает сначала её, а затем кривую  $\chi=0.2$ . Таким образом, убывание функции  $\sigma_z(r)$  с увеличением координаты  $r$  при значении параметра  $\chi=1.8$  происходит быстрее, чем при  $\chi=1$  и  $\chi=0.2$ .

В плоскости  $z=0$  вертикальные перемещения  $w(r, 0)$  пропорциональны напряжениям  $\sigma_z(r, 0)$ . Поэтому графики для распределения перемещений  $w(r, 0)$  с точностью до масштаба будут повторять кривые для напряжений  $\sigma_z(r, 0)$ , приведенные в статье [9].

Для радиальных перемещений на границе полупространства из формул (12) при  $P=1$  получим

$$u = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \left[ -\frac{1}{r} + \chi \int_0^\infty J_1(rt) \frac{dt}{t + \chi} \right]. \quad (15)$$

Численные исследования радиальных перемещений в плоскости  $z=0$  показывают, что с ростом параметра  $\chi$  от 0.2 до 1.8 перемещения  $u(r)$  уменьшаются. Влияние параметра  $\chi$  на распределение перемещений, возрастая при удалении от точки приложения силы, становится существенным в области изменения радиальной координаты  $r \in [0.25, 2]$ .

В заключение отметим, что сходимость несобственных интегралов, входящих в соотношения (14)-(15), ухудшается по сравнению с аналогичными интегралами, содержащимися в формулах (12) для распределения напряжений и перемещений в точках упругого полупространства. При численных исследованиях в интегралах (12), (14)- (15) предварительно выделялись особенности, что приводило к значительному сокращению продолжительности расчётов.

#### 4. Основные результаты и выводы.

1. Исследована зависимость распределения перемещений в упругом полупространстве от величины параметра  $\chi$  и расстояния от плоскостей  $z=\text{const}$  до границы. Установлено, что

- радиальные перемещения  $u(r, z)$  в плоскостях  $z=\text{const}$  положительны при  $r \in [0.05, r^*]$  и отрицательны при  $r \in [r^*, 2]$ , причем кривые  $u = u(r, z)|_{z=\text{const}}$  имеют как положительный максимум, так и отрицательный. С приближением к границе полупространства положительный максимум увеличивается ( в плоскости  $z=0.2$  он в 3.2 раза больше, чем в плоскости  $z=0.6$ ) и перемещается к началу системы координат, значение координаты  $r^*$ , при котором перемещение  $u$  равно нулю, уменьшается. Из расчетов следует: чем больше  $\chi$ , тем меньше абсолютные величины перемещений  $u(r, z)$ .



- вертикальные перемещения в упругом полупространстве на порядок больше, чем радиальные. С ростом  $\chi$  перемещения  $w(r, z)$  уменьшаются, причем параметр  $\chi$  оказывает существенное влияние на распределение вертикальных перемещений.

2. Установлены закономерности зависимости распределения перемещений на границе полупространства от параметра  $\chi$ . Показано, что

- влияние параметра  $\chi$  на распределение радиальных перемещений, возрастаая при удалении от точки приложения сосредоточенной силы, становится существенным при  $r > 0.25$ ;

- вертикальные перемещения в граничной плоскости пропорциональны напряжениям  $\sigma_z$ , с ростом  $\chi$  от 0.2 до 1.8 напряжение  $\sigma_z(r, 0)$  увеличивается при  $r \leq r^*$ , эта закономерность изменяется, если  $r > r^*$ .

3. Несмотря на более компактный вид соотношений для перемещений на границе по сравнению с решением в упругой области, сходимость интегралов при  $z=0$  ухудшается. В связи с этим при проведении расчётов необходимы предварительные исследования входящих в решение несобственных интегралов.

1. Залётюв В.В. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. - 2004. - Т.9.- С.61-67.
2. Boussinesq J. Application des Potentiels a l'Etude l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques / Gauthier - Villars, Paris. - 1885. - 721 pp.
3. Selvadurai A.P.S. Boussinasq's problem for an elastic half-space reinforced with a rigid disk inclusion // Mathematics and Mechanics of Solids. - 2000. - Vol. 5, No. 4. - P. 483-499.
4. Selvadurai A.P.S. On the Surface Displacement of an isotropic elastic half-space containing an inextensible membrane reinforcement // Mathematics and Mechanics of Solids. - 2009. - Vol. 14, No. 1-2. - P. 123-134.
5. Xu Jin-Quan, Mutoh Yoshiharu. A Normal Force on the Free Surface of a Coated Material // Journal of Elasticity. - December 2003. - Vol. 73, Numbers 1-3. - P. 147-164.
6. Simmonds J.G., Warne G. Notes on the nonlinearly elastic Boussinesq problem // Journal of Elasticity. - January 1994. - Vol. 34, Number 1. - P.69-82.
7. Coon E.T., Warne D.P., Warne P.G. Asymptotic Analysis of Finite Deformation in a Nonlinear Transversely Isotropic Incompressible Hyperelastic Half-space Subjected to a Tensile Point Load // Journal of Elasticity. - June 2004. - Vol. 75, Number 3. - P.197-228.
8. Georgiadis H. G., Anagnostou D.S. Problems of the Flamant-Boussinesq and Kelvin Type in Dipolar Gradient Elasticity // Journal of Elasticity. - January 2008. - Vol. 90, Number 1. - P. 71-98.
9. Залётюв В.В. Распределение напряжений в изотропном полупространстве при заданных граничных условиях смешанного типа. // Труды ИПММ НАН Украины. -2006. - Т.13. - С.83-91.
10. Залётюв В.В. Аналитическое решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства // Труды ИПММ НАН Украины. -2007.- Т.14. - С.74-82.
11. Залётюв В.В., Сторожев В.И., Хатилова Н.С. Смешанная задача теории упругости для изотропного полупространства при действии на границе сосредоточенной силы // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. X Международной конференции. - Ростов-на-Дону, Россия: ООО "ЦВВР 2006. - С.120-124.

V.V. Zaletov, N.S. Khapilova

**Regularities of distribution of displacements in the isotropic half- space, lying on the elastic basis, at an action on border o concentrated force.**

Regularities of distribution of displacements inside and on boundary of deformable half- space are investigated at an action on it of a concentrated force applied to a boundary plane in which points normal stresses and displacements are proportional, shearing stresses are absent. Comparison of numerical results with a solution of Boussinesq's problem, which is a particular case of the formulated mixed problem is carried out. The influence of distance from planes  $z=\text{const}$  to half-space boundary on distribution of displacements in elastic domain is established. Displacements redistribution is studied by a variation of the parameters characterizing mechanical properties of isotropic half- space and elastic foundation.

**Keywords:** *theory of elasticity, half-space, mixed problem, analytic solution, displacements, computer graphics.*

В.В. Зальотов, Н.С. Хапілова

**Закономірності розподілу переміщень у ізотропному півпросторі, який лежить на пружній основі, при дії зосередженої сили.**

Досліджено закономірності розподілу переміщень усередині і на межі деформівного півпростору при дії на нього зосередженої сили, прикладеної до граничної площини, в точках якої нормальні напруження і переміщення пропорційні, дотичні напруження відсутні. Виконано порівняння чисельних результатів з розв'язком задачі Бусінеска, яка є окремим випадком сформульованої змішаної задачі. Встановлено вплив відстані від площин  $z = \text{const}$  до межі півпростору на розподіл переміщень у пружній області. Вивчено перерозподіл переміщень при варіюванні параметрів, що характеризують механічні властивості ізотропного півпростору і пружної основи .

**Ключові слова:** *теорія пружності, півпростір, змішана задача, аналітичний розв'язок, переміщення, комп'ютерна графіка.*