ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Том 20

УДК 517.977, 531.36

©2010. **А.И. Двирный, В.И. Слынько**

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В работе рассматривается задача об устойчивости верхнего положения математического маятника на подвижной основе в предположении, что на маятник действуют периодические ударные силы. Получено необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в случае малых коэфициентов трения между маятником и основой.

Ключевые слова: *импульсная система, устойчивость, функция Ляпунова.*

Введение. Маятник на подвижном основании является математической моделью некоторых транспортных систем, в частности, моноцикла. Управление движением такой механической системы было предметом изучения в работе [1]. При этом рассматривалось движение маятника при условии, что колесо, на котором закреплено основание маятника, движется по ровной поверхности. В настоящей работе предлагается математическая модель маятника при учете неровности поверхности. Неровность поверхности предлагается моделировать периодическими импульсными воздействиями.

Основной результат. Рассматривается математический маятник, точка подвеса которого находится в центре колеса. Симметричное относительно своей оси колесо может катиться без проскальзывания по ровной горизонтальной поверхности вдоль прямой линии. Массу колеса обозначим через M, радиус — R, радиус инерции относительно центра колеса O — ρ. Обозначим через φ угол поворота против часовой стрелки какого-то фиксированного радиуса, который в начале движения ориентирован вдоль горизонтальной оси OX, через x_0 — обозначим перемещение центра масс колеса O вдоль горизонтальной прямой, так что $\dot{x}_0 = -\dot{\varphi}R$. Пусть β — угол отклонения математического маятника от вертикали, m — его масса, r — расстояние от точки подвеса O до его центра масс. Между колесом и подвесом маятника есть сила сопротивления, момент которой, действующий на маятник, равен $L = \alpha(\dot{\varphi}-\dot{\beta})$, $\alpha > 0$. В качестве обобщенных координат выберем углы β, φ. Получим уравнения движения рассматриваемой механической системы в предположении, что к концу стержня, образующего математический маятник в фиксированные моменты времени, прилагаются постоянные импульсные нагрузки, действующие паралельно вертикальной оси симметрии колеса в ее положительном направлении.

Для рассматриваемой механической системы уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\delta(t-\tau_k), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(t, q, \dot{q})$ — функция Лагранжа системы, Q_i – обобщенные силы, p_{ik} – обобщенные импульсы ударных сил, δ – дельта-функция, τ_k – моменты импульсных воздействий. Далее предположим, что $\tau_{k+1} - \tau_k = \theta,\ k = 1, 2, \dots$.

Эти уравнения на интервалах времени (τ_k, τ_{k+1}) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Уравнение движения системы в момент времени $t = \tau_k$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\Bigg|_{t=\tau_k+0} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\Bigg|_{t=\tau_k} = p_{ik}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Следовательно, движение механической системы с импульсным воздействием описывается уравнениями (2)-(3).

Функция Лагранжа и обобщенные силы представляются следующим образом [1]

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\cos\beta\dot{\varphi}\dot{\beta} + a_{22}\dot{\beta}^2) - mgr\cos\beta, \quad Q_\beta = L - \eta\dot{\beta}, \quad Q_\varphi = -L,$$

где $a_{11} = M(R^2 + \rho^2) + mR^2$, $a_{12} = mRr$, $a_{22} = mr^2$.

Для обобщенных импульсов получаем выражения

$$p_{\beta k} = p_0 r \sin\beta, \quad p_{\varphi k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

где p_0 – постоянная импульсная нагрузка.

Введем безразмерное время τ по формуле

$$t = T\tau\big(T^2 = \frac{r}{g}\big).$$

Предположим, что внешний момент отсутствует, тогда уравнения движения системы двух тел с учетом сил сопротивления и импульсных воздействий имеют вид системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [2]

$$\begin{gathered}
(1 - d^2\cos^2\beta)\beta'' + d^2(\beta')^2\sin\beta\cos\beta - \sin\beta + \overline{\eta}\beta' = -(1 + e^2\cos\beta)\overline{\alpha}(\beta' - \varphi'), \\
(1 - d^2\cos^2\beta)\varphi'' - e^2(\beta')^2\sin\beta + e^2\sin\beta\cos\beta - \overline{\eta}e^2\cos\beta\beta' = e^2(\frac{e^2}{d^2} + \cos\beta)\overline{\alpha}(\beta' - \varphi'), \\
\beta(\tau^+) - \beta(\tau) = 0, \\
\varphi(\tau^+) - \varphi(\tau) = 0, \\
\beta'(\tau^+) - \beta'(\tau) = \frac{p_0\sin\beta}{(1 - d^2\cos^2\beta)m\sqrt{gr}}, \\
\varphi'(\tau^+) - \varphi'(\tau) = \frac{-e^2 p_0\sin\beta\cos\beta}{(1 - d^2\cos^2\beta)m\sqrt{gr}}, \ \tau = \frac{1}{T}\tau_k, \ k = 1, 2, \dots .
\end{gathered} \tag{4}$$

Полученная система уравнений движений имеет два многообразия состояний равновесий вида $\beta = 0,\ \beta' = 0,\ \varphi' = 0$ и $\beta = \pi,\ \beta' = 0,\ \varphi' = 0$.

Определим переменные возмущенного движения

$$x_1 = \beta,\ x_2 = \beta',\ x_3 = \varphi',$$

тогда линеаризированная система уравнений возмущенного движения имеет вид (штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ)

$$\begin{gathered}
x_1' = x_2,\\
x_2' = \Delta\Big(x_1 - \overline{\alpha}\Delta_1 x_2 + \overline{\alpha}\Delta_1 x_3\Big),\\
x_3' = \Delta\Big(-e^2 x_1 + \overline{\alpha} e^2\Delta_2 x_2 - \overline{\alpha} e^2 \Delta_2 x_3\Big),\ \tau \neq \frac{1}{T}\tau_k,\\
x_1(\tau^+) = x_1(\tau),\\
x_2(\tau^+) = \frac{p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} x_1(\tau) + x_2(\tau),\\
x_3(\tau^+) = \frac{-e^2 p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} x_1(\tau) + x_3(\tau),\ \tau = \frac{1}{T}\tau_k,\ k = 1, 2, \ldots.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\Delta = \frac{1}{1-d^2}$, $\Delta_1 = 1 + e^2$, $\Delta_2 = \frac{e^2}{d^2} + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ \Delta & -\Delta\overline{\alpha}\Delta_1 & \Delta\overline{\alpha}\Delta_1\\ -\Delta e^2 & \overline{\alpha}e^2\Delta_2) & -\Delta\overline{\alpha}e^2\Delta_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \frac{p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} & 1 & 0\\ \frac{-e^2 p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что величина коэффициента сопротивления является малой величиной, поэтому $\overline{\alpha}$ будем считать малым параметром.

Выпишем характеристический многочлен матрицы A

$$\lambda^3 + \overline{\alpha}\Delta(\Delta_2 e^2 + \Delta_1)\lambda^2 - \Delta\lambda - \Delta^2\overline{\alpha}\frac{e^4(1-d^2)}{d^2} = 0.$$

Легко найти, что

$$\lambda_1 = -\Delta\frac{e^4(1-d^2)}{d^2}\overline{\alpha},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\Delta} - \frac{1}{2}\Delta(e^2+1)^2\overline{\alpha} + \frac{1}{2}\Delta\sqrt{\Delta}(e^2+1)^2\Big(\frac{e^4}{d^2} + 2e^2 - \frac{3}{4}(e^2+1)^2 + 1\Big)\overline{\alpha}^2 + o(\overline{\alpha}^2),$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\Delta} - \frac{1}{2}\Delta(e^2+1)^2\overline{\alpha} - \frac{1}{2}\Delta\sqrt{\Delta}(e^2+1)^2\Big(\frac{e^4}{d^2} + 2e^2 - \frac{3}{4}(e^2+1)^2 + 1\Big)\overline{\alpha}^2 + o(\overline{\alpha}^2).$$

Из элементов собственных векторов матрицы A составим матрицу $S = S_0 - \overline{\alpha} S_1 + o(\overline{\alpha})$, где

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{\Delta}e^2} & \frac{1}{\sqrt{\Delta}e^2} \\ 0 & -\frac{1}{e^2} & -\frac{1}{e^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1+e^2 & -\frac{1+e^2}{e^2}\Big(\frac{1}{2}(e^2-1)-\frac{e^2}{d^2}\Big) & -\frac{1+e^2}{e^2}\Big(\frac{1}{2}(e^2-1)-\frac{e^2}{d^2}\Big) \\ 0 & -\sqrt{\Delta}(1+e^2)\Big(1-\frac{1}{d^2}\Big) & \sqrt{\Delta}(1+e^2)\Big(1-\frac{1}{d^2}\Big) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложение матрицы S^{-1} по степеням $\overline{\alpha}$ имеет вид

$$S^{-1} = S_0^{-1} - \overline{\alpha} S_0^{-1} S_1 S_0^{-1} + o(\overline{\alpha}).$$

Сделаем замену переменных в системе (5) по формуле $y = S^{-1}x$. Тогда матрицы $\overline{A}$, $\overline{B}$ в преобразованной системе уравнений возмущенного движения имеют вид

$$\overline{A} = \overline{A}_0 - \overline{A}_1 \overline{\alpha} + o(\overline{\alpha}),$$

$$\overline{A}_0 = \operatorname{diag}\{0, \sqrt{\Delta}, -\sqrt{\Delta}\}$$

$$\overline{A}_1 = \operatorname{diag}\{\Delta\frac{e^4(1-d^2)}{d^2}, \frac{1}{2}\Delta(e^2+1)^2, \frac{1}{2}\Delta(e^2+1)^2\}$$

$$\overline{B} = S^{-1}BS = I + \frac{p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}} S^{-1}B_0 S =$$

$$= I + \frac{p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}}(S_0^{-1}B_0S_0 + (S_0^{-1}B_0S_1 - S_0^{-1}S_1S_0^{-1}B_0S_0)\overline{\alpha} + o(\overline{\alpha})),\ i = 1, 2,$$

где матрица B_0 имеет вид

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -e^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Матрица монодромии Ψ преобразованной системы имеет вид

$$\Psi = e^{\frac{\theta}{T}\overline{A}}\overline{B}.$$

Для асимптотической устойчивости системы уравнений возмущенного движения необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы лежали внутри единичного круга. Один из мультипликаторов имеет вид

$$\rho_1(\overline{\alpha}) = 1 - \frac{\Delta(1-d^2)e^4\theta}{d^2T}\overline{\alpha},$$

а два другие определяются из квадратного уравнения

$$\rho^2 - (2\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\Delta}\theta}{T} + \frac{p_0}{(1-d^2)m\sqrt{gr}\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\Delta}\theta}{T})(1 - \frac{\Delta\theta(1+e^2)^2}{2T}\overline{\alpha})\rho +$$
$$+1 - \frac{\Delta\theta(1+e^2)^2}{2T}\overline{\alpha} = 0.$$

Нетрудно показать, что корни этого уравнения лежат внутри единичного круга, если и только если

$$|2\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\Delta}\theta}{T} + \frac{\sqrt{\Delta}p_0}{m\sqrt{gr}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\Delta}\theta}{T}| < 2, \quad \overline{\alpha} > 0. \tag{6}$$

Таким образом, неравенства (6) представляют необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости верхнего положения равновесия маятника на подвижном основании при импульсном воздействии, в предположении о малости коэффициента трения. Эти условия можно записать в виде

$$\left|2\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{r}}\theta\kappa\right) + \frac{p_0}{m\sqrt{gr}}\kappa\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{r}}\theta\kappa\right)\right| < 2,$$

где $\kappa = \sqrt{1 + \frac{mR^2}{M(R^2+\rho^2)}}$.

Заключение. В результате исследования задачи об устойчивости верхнего положения равновесия математического маятника на подвижной основе в предположении, что на маятник действуют периодические ударные силы, получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости.

Аналогичные результаты могут быть получены для нижнего положения равновесия. В случае непериодических моментов импульсных воздействий условия устойчивости положений равновесий рассматриваемой механической системы могут быть получены на основе результатов работ [3, 4].

1. Формальский А.М. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании// ПММ. — 2006. — Т. 70, вып. 1. — С. 62–71.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием — К.: Вища школа. — 1987. — 288 с.
3. Двирный А.И., Слынько В.И. Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. — 2004. — N 4. — С. 42 — 48.
4. Двирный А.И., Слынько В.И. Критерии устойчивости квазилинейных импульсных систем // Прикл. механика. — 2004. — **40**, N 5. — С. 137 — 144.

A.I.Dvirnyi, V.I.Slyn'ko

The stability of upper equilibrium position of mathematical pendulum on muvin suspention with impulsive effect.

In the work it is considered stability problem of the upper equilibrium position of the pendulum with mobile foot, which is acted by periodical forces. In the case when the coefficient of friction between pendulum and its foot is small, it is obtained the necessary and sufficient conditions of asymptotic stability of the pendulum.

Keywords: *impulsive system, stability, function of Liapunov.*

О.І. Двірний, В.І. Слинько

Стійкість верхнього положення рівноваги математичного маятника на рухомій основі при наявності імпульсного збурення.

У роботі розглядається задача про стійкість верхнього положення математичного маятника на рухомій основі в припущенні, що на маятник діють періодичні ударні сили. Одержано необхідні й достатні умови асимптотичної стійкості у випадку малих коефіцієнтів тертя між маятником і основою.

Ключові слова: *імпульсна система, стійкість, функція Ляпунова.*

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
`vitstab@ukr.net`

Получено 17.05.10