УДК 517.95

©2010. **Н.М. Гринців**

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач визначення коефіцієнта при старшій похідній у параболічних рівняннях у припущенні, що коефіцієнт перед похідною за часом перетворюється в нуль у початковий момент часу. Досліджено випадок сильного степеневого виродження.

Ключові слова: *обернені задачі, параболічні рівняння з виродженням.*

Вступ. При описі таких фізичних процесів, як рух рідин та газів у пористому середовищі, явища в плазмі, опріснення морських вод та інших, виникають прямі задачі для параболічних рівнянь з виродженням, зокрема й ті, виродження котрих спричиняє коефіцієнт перед похідною за часом.

В [1] розглянуто рівняння

$$u_{xx} - t^k d(t,x)u_t - b(x,t)u_x + c(t,x)u = f(t,x)$$

в області $Q = \{0 < t \leq T, 0 < x < \infty\}$. Показано, що у випадку слабкого ($0 < k < 1$) виродження вказане рівняння має в Q єдиний обмежений розв'язок, що задовольняє умови $u(0,x) = \psi(x)$, $u(t,0) = \varphi(t)$. Якщо ж $k \geq 1$ (сильне виродження), то єдиний обмежений розв'язок цього рівняння визначається лише умовою $u(t,0) = \varphi(t)$. Це означає, що у випадку сильного виродження потрібно відмовитись від виконання початкових умов.

Лінійне параболічне рівняння

$$-\varphi(t,x)u_t + a^{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + b^i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u = f(t,x),$$

яке вироджується на довільній підмножині шару $H = \{0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$, розглянуто в [2]. У роботі дано визначення слабкого та сильного виродження у вигляді інтегральної умови, а також знайдено обмеження на допустимий ріст шуканої функції, які забезпечують однозначну розв'язність задачі без початкових даних.

Умови коректності деяких крайових задач для лінійних параболічних рівнянь другого порядку в припущенні, що коефіцієнт перед u_t має нуль досить високого порядку при $t = 0$, знайдено в [3], [4].

Обернені задачі визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ в параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

в області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ вивчались в [5], [6]. Досліджено випадки слабкого ($0 < \beta < 1$) та сильного ($\beta \geq 1$) виродження. Умови існування та єдиності розв'язку встановлено також у випадку $-1 < \beta < 0$. Питання розв'язності обернених задач для параболічних рівнянь, виродження котрих спричиняє коефіцієнт при похідній за часом, залишалось відкритим.

У даній роботі досліджуються обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при старшій похідній у рівнянні теплопровідності та повному параболічному рівнянні в припущенні, що коефіцієнт перед u_t дорівнює нулю при $t = 0$. Встановлено умови існування та єдиності розв'язків таких задач у випадку сильного степеневого виродження, а також досліджено вплив молодших членів рівняння на розв'язність задачі.

1. Формулювання задач та основні результати. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядаються обернені задачі визначення коефіцієнта $a = a(t), a(t) > 0, t \in [0,T]$ в рівнянні теплопровідності

$$t^\beta u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

та в повному параболічному рівнянні

$$t^\beta u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{2}$$

з умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

де $\beta > 1$ – задане число.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,\ \mu_3(t) = \mu_{3,0}(t)t^\gamma,\ \mu_{3,0} \in C[0,T],\ f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;
2) $f_x(x,t) \ge 0,\ |f(x,t)| + |f_x(x,t)| \le A_0 t^{\beta-1+\gamma},\ (x,t) \in \overline{Q}_T,\ \mu_{3,0}(t) > 0,\ A_1 t^{\beta+\gamma-1} \le f(0,t) - t^\beta \mu_1'(t) \le A_2 t^{\beta+\gamma-1},\ 0 \le t^\beta \mu_2'(t) - f(h,t) \le A_3 t^{\beta+\gamma-1}, t \in [0,T]$, *де* $\gamma > 0$ *– задане число,* $A_i, i = \overline{0,3}$ *— додатні сталі.*
Тоді існує единий розв'язок $(a, u_0) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ a(t) > 0, t \in [0,T]$ *задачі (1), (3), (4).*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також*
1) $b, c \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;
2) $|b(x,t)| + |b_x(x,t)| \le A_4 t^\alpha, |c(x,t)| \le A_5 t^{\alpha+\gamma}$, *де* $\alpha > \beta - 1$, A_4, A_5 *— додатні сталі.*
Тоді існує единий розв'язок $(a, u) \in C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}\overline{Q}_{T_0},\ a(t) > 0, t \in [0,T_0]$ *задачі (2) - (4), де число* T_0, $0 < T_0 \le T$ *визначається вихідними даними цієї задачі.*

2. Доведення теореми 1. Припустимо тимчасово, що функція $a = a(t)$ відома. Для побудови розв'язку $u_0 = u_0(x,t)$ задачі (1), (3) використаємо метод функцій Гріна [7, с.49]. Через $G_k(x,t,\xi,\tau)$, $k = 1,2$ позначимо функції Гріна відповідно першої та другої крайових задач для рівняння (1). Вони визначаються формулою

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\ k = 1,2, \tag{5}$$

де $\theta(t)-\theta(\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{a(\sigma)}{\sigma^{\beta}}\,d\sigma.$

Розв'язок задачі (1), (3) має вигляд

$$u_0(x,t)=\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}}\mu_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}}\mu_2(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}d\xi d\tau,\ (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{6}$$

Обчислимо похідну від функції $u_0(x,t)$ за змінною x. Для цього використаємо рівності $G_{1x}=-G_{2\xi}, G_{2\tau}=-\frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}}G_{2\xi\xi}$ та інтегрування частинами:

$$u_{0x}(x,t)=\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^{\beta}}-\mu_1'(\tau)\right)d\tau+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\left(\mu_2'(\tau)-\frac{f(h,\tau)}{\tau^{\beta}}\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\frac{f_{\xi}(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}d\xi d\tau,\ (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{7}$$

Оцінимо функції $u_0(x,t)$ та $u_{0x}(x,t)$, виходячи з формул (6), (7). Оскільки $G_1(x,t,\xi,\tau)\le G_2(x,t,\xi,\tau)$ та

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi=1, \tag{8}$$

то, враховуючи умови теореми 1, отримаємо оцінки

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}d\xi d\tau\right|\le C_1\int\limits_0^t\tau^{\gamma-1}d\tau\le C_2t^{\gamma},$$

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\frac{f_x(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}d\xi d\tau\right|\le C_3t^{\gamma}. \tag{9}$$

При оцінюванні перших двох інтегралів правої частини рівності (6) використаємо (5):

$$\left|\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}}\mu_1(\tau)d\tau\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\max_{[0,T]}|\mu_1(t)|\int\limits_0^t\frac{1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}}\times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x+2nh) \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) d\tau \leq C_4.$$

Аналогічно

$$\left| \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau) \frac{a(\tau)}{\tau^\beta} \mu_2(\tau) d\tau \right| \leq C_5.$$

Таким чином, з (6) матимемо

$$|u_0(x,t)| \leq C_2 t^\gamma + C_4 + C_5 \leq C_6,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{10}$$

Для оцінки перших двох інтегралів, що входять до правої частини формули (7), використаємо нерівність

$$G_2(x,t,\xi,\tau) \leq C_7 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right). \tag{11}$$

Беручи до уваги припущення теореми 1 та означення різниці $\theta(t)-\theta(\tau)$, отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 \equiv \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau) \left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^\beta} - \mu_1'(\tau)\right) d\tau \leq C_8 \int\limits_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right) \tau^{\gamma-1} d\tau \leq \\ \leq C_9 t^\gamma + C_{10} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \leq C_9 t^\gamma + C_{11} \int\limits_0^t \frac{t^{\frac{\beta-1}{2}} \tau^{\frac{\beta-3}{2}+\gamma}}{\sqrt{t^{\beta-1} - \tau^{\beta-1}}} d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

Після заміни $\tau = zt$, знаходимо

$$I_1 \leq C_9 t^\gamma + C_{11} t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} \int\limits_0^1 \frac{z^{\frac{\beta-3}{2}+\gamma}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}} dz \leq C_9 t^\gamma + C_{12} t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}.$$

Повторюючи ті ж міркування, приходимо до оцінки

$$\left| \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau) \left(\mu_2'(\tau) - \frac{f(h,\tau)}{\tau^\beta}\right) d\tau \right| \leq C_{13} t^\gamma + C_{14} t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}.$$

В результаті з (7) отримаємо

$$u_{0x}(x,t) \leq C_{15} t^\gamma + C_{16} t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} \leq C_{17} t^\gamma,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{13}$$

Рівняння (4) подамо у вигляді

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{u_{0x}(0,t)},\ t \in [0,T], \tag{14}$$

де $u_{0x}(x,t)$ визначається формулою (7), та знайдемо апріорні оцінки розв'язків цього рівняння.

Беручи до уваги (9), (12) та припущення теореми, оцінимо функцію $a = a(t)$ знизу, виходячи з рівняння (14):

$$a(t) \geq \frac{\mu_{3,0}(t)t^{\gamma}}{C_{18}t^{\gamma} + C_{19}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}, \; t \in [0,T]. \tag{15}$$

Позначимо $a_{min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$. Враховуючи умови теореми 1 та означення різниці $\theta(t) - \theta(\tau)$ для a_{min} отримаємо нерівність

$$C_{18}a_{min} + C_{20}\sqrt{a_{min}} - C_{21} \geq 0, \; t \in [0,T],$$

звідки одержуємо

$$a_{min} \geq B_0, \quad \text{або} \quad a(t) \geq B_0, \; t \in [0,T]. \tag{16}$$

Для того, щоб оцінити $a = a(t)$ зверху, знайдемо оцінку функції $u_{0x}(0,t)$ знизу. В силу припущень теореми одержимо

$$u_{0x}(0,t) \geq \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^{\beta}} - \mu_1'(\tau)\right)d\tau = \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\Bigg(1+$$

$$+2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)\Bigg)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^{\beta}} - \mu_1'(\tau)\right)d\tau \equiv J_1 + J_2.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2h^2}{z}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_n^{n+1} e^{-\frac{s^2h^2}{z}}ds = \int\limits_1^{\infty} e^{-\frac{s^2h^2}{z}}ds.$$

Після заміни змінних $\sigma = \dfrac{hs}{\sqrt{z}}$, приходимо до нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2h^2}{z}} \geq \frac{1}{h}\int\limits_{h/\sqrt{z}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma.$$

Останню нерівність та (16) використаємо для оцінки J_2:

$$J_2 \geq C_{22}\int\limits_0^t \tau^{\gamma-1}\,d\tau \int\limits_{\frac{h}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma \geq C_{22}\int\limits_0^t \tau^{\gamma-1}\,d\tau \int\limits_{\frac{C_{23}t^{\frac{\beta-1}{2}}\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{t^{\beta-1}-\tau^{\beta-1}}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma.$$

В отриманому інтегралі проведемо заміну змінних $\tau = zt$:

$$J_2 \geq C_{22}t^{\gamma}\int\limits_0^1 z^{\gamma-1}\,dz \int\limits_{\frac{C_{23}t^{\frac{\beta-1}{2}}z^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma = C_{22}t^{\gamma}\int\limits_0^{1/2} z^{\gamma-1}\,dz \int\limits_{\frac{C_{23}t^{\frac{\beta-1}{2}}z^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma +$$

$$+C_{22}t^{\gamma}\int\limits_{1/2}^1 z^{\gamma-1}\,dz \int\limits_{\frac{C_{23}t^{\frac{\beta-1}{2}}z^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma \geq C_{22}t^{\gamma}\int\limits_0^{1/2} z^{\gamma-1}\,dz \int\limits_{C_{24}T^{\frac{\beta-1}{2}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma \geq C_{25}t^{\gamma}.$$

Оскільки згідно з умовами теореми $J_1 \geq 0$, то

$$u_{0x}(0,t) \geq C_{25}t^{\gamma},\ t \in [0,T]. \tag{17}$$

Виходячи з (14), отримуємо оцінку

$$a(t) \leq \frac{\mu_{3,0}(t)t^{\gamma}}{C_{25}t^{\gamma}} \leq B_1 < \infty,\ t \in [0,T]. \tag{18}$$

Через N позначимо множину $N = \{a \in C[0,T] : B_0 \leq a(t) \leq B_1\}$. Рівняння (14) подамо у вигляді

$$a(t) = Pa(t),$$

де P визначається правою частиною рівності (14). Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться подібно як в [5] і [7, с.27]. Застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, отримуємо існування розв'язку задачі (1), (3), (4).

Єдиність розв'язку задачі (1), (3), (4) доводитимемо від супротивного. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2$ задачі (1), (3), (4). Різниці цих розв'язків позначимо відповідно $a(t) = a_1(t) - a_2(t), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Ці різниці задовольняють рівняння

$$t^{\beta}u_t = a_1(t)u_{xx} + a(t)u_{2xx},\ (x,t) \in Q_T \tag{19}$$

та умови

$$u(0,t) = u(h,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{20}$$

$$a(t)u_{2x}(0,t) + a_1(t)u_x(0,t) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{21}$$

За допомогою функції Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $t^{\beta}u_t = a_1(t)u_{xx}$ задачу (19) - (21) зведемо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду відносно функції $a = a(t)$:

$$a(t) = -\frac{a_1(t)}{u_{2x}(0,t)}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}}d\tau \int\limits_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi,\ t \in [0,T]. \tag{22}$$

Ядро рівняння (22) має інтегровну особливість, а, отже, рівняння (22) має єдиний тривіальний розв'язок, що й завершує доведення теореми 1.

3. Доведення теореми 2. Позначимо $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. За допомогою функції Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$ задачу (2) - (4) зведемо до системи рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \\ + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{23}$$

$$v(x,t) = u_{0x}(x,t) + \\ + \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{24}$$

$$a(t)v(0,t) = \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{25}$$

в якій $u_0(x,t), u_{0x}(x,t)$ визначаються формулами (6), (7).

Позначимо $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} v(x,t)$, $U(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} u(x,t)$, $a_{min}(t) = \min\limits_{0\le\tau\le t} a(\tau)$. Враховуючи припущення на вихідні дані та нерівність

$$\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \le \frac{C_{26}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

оцінимо інтеграли, котрі містяться в правих частинах рівностей (23), (24):

$$\left|\int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{27}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta}V(\tau)d\tau,$$

$$\left|\int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{28}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta+\gamma}U(\tau)d\tau,$$

$$\left|\int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{29}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-\beta}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \tag{26}$$

$$\left|\int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{30}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha+\gamma-\beta}U(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau. \tag{27}$$

Беручи до уваги (10), (13), з (23), (24) отримуємо нерівності відносно функцій $U(t), V(t)$:

$$U(t) \le C_6 + C_{27}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta}V(\tau)d\tau + C_{28}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta+\gamma}U(\tau)d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{28}$$

$$V(t) \le C_{17}t^{\gamma} + C_{29}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-\beta}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{30}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha+\gamma-\beta}U(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,\ (x,t)\in\overline{Q}_T. \quad (29)$$

Оцінимо функцію $a = a(t)$, виходячи з рівняння (25). Для цього спочатку знайдемо оцінку $v(0,t)$ знизу. Враховуючи (17), (26), (27) , стверджуємо, що існує число t_1, $0 < t_1 < T$, яке визначається з нерівності

$$\frac{C_{25}}{2}t_1^{\gamma} - \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau \ge 0,$$

що для функції $v(0,t)$ виконується оцінка

$$v(0,t) \ge \frac{C_{25}}{2}t^{\gamma}, \quad t\in[0,t_1]. \quad (30)$$

Використовуючи останню нерівність в (25), отримуємо

$$a(t) \le B_2, \quad t\in[0,t_1]. \quad (31)$$

Для оцінки $a(t)$ знизу розглянемо (28), (29). Розв'язавши нерівність (28) відносно функції $U(t)$, знаходимо

$$U(t) \le C_{31} + C_{32}\int\limits_0^t \tau^{\alpha-\beta}V(\tau)d\tau,\ t\in[0,T]. \quad (32)$$

Враховуючи (32), для $V(t)$ одержуємо нерівність

$$V(t) \le C_{33}t^{\gamma} + C_{34}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha+\gamma-\beta}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{35}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-\beta}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau. \quad (33)$$

Розв'язуючи нерівність (33) методом, викладеним в [8], знаходимо

$$V(t) \le C_{36}t^{\gamma} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1} + \frac{C_{39}t^{\alpha-\beta+1}}{a_{min}(t)}\Bigg(C_{36}t^{\gamma} +$$
$$+ \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1}\Bigg)\exp\left(\int\limits_0^t \frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\right), \quad t\in[0,T]. \quad (34)$$

Підставляючи (34) в (25), отримаємо

$$a(t) \ge \mu_{3,0}(t)t^{\gamma}\Bigg(C_{36}t^{\gamma} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1} + \frac{C_{39}t^{\alpha-\beta+1}}{a_{min}(t)}\Bigg(C_{36}t^{\gamma} +$$

$$+\frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}}+\frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1}\Bigg)\exp\Bigg(\int\limits_0^t\frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\Bigg)\Bigg)^{-1},$$

або, після елементарних перетворень,

$$C_{36}a_{min}(t)+C_{37}t^{\alpha-\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{min}(t)}+C_{38}t^{2\alpha-\beta+1}+C_{39}t^{\alpha-\beta+1}\Bigg(C_{36}+\frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+$$

$$+\frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha-\beta+1}\Bigg)\exp\Bigg(\int\limits_0^t\frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\Bigg)-C_{41}\geq 0. \tag{35}$$

Оскільки вираз

$$K(t)\equiv C_{37}t^{\alpha-\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{min}(t)}+C_{38}t^{2\alpha-\beta+1}+C_{39}t^{\alpha-\beta+1}\Bigg(C_{36}+\frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+$$

$$+\frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha-\beta+1}\Bigg)\exp\Bigg(\int\limits_0^t\frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\Bigg)$$

прямує до нуля при $t\to 0$, то можна вказати таке число $t_2, 0<t_2<T$, що

$$K(t)\leq\frac{C_{41}}{2},\quad t\in[0,t_2].$$

Тоді з нерівності (35) отримаємо, що

$$C_{36}a_{min}(t)-\frac{C_{41}}{2}\geq 0,$$

звідки

$$a(t)\geq B_4,\quad t\in[0,t_2]. \tag{36}$$

Використовуючи оцінку (36) в нерівностях (34), (32) знаходимо

$$v(x,t)\leq C_{42}t^{\gamma},\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,t_2], \tag{37}$$

$$u(x,t)\leq C_{43},\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,t_2]. \tag{38}$$

Доведення існування розв'язку задачі (2) - (4) закінчуємо як і у випадку рівняння теплопровідності.

Для доведення єдиності розв'язку задачі (2) - (4) використаємо ті ж міркування, що й при доведенні єдиності розв'язку задачі (1), (3), (4). У цьому випадку для відповідних різниць $a(t)=a_1(t)-a_2(t), u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ отримаємо задачу

$$t^{\beta}u_t=a_1(t)u_{xx}+a(t)u_{2xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u,\ (x,t)\in Q_T, \tag{39}$$

$$u(0,t)=u(h,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{40}$$

$$a(t)u_{2x}(0,t)+a_1(t)u_x(0,t)=0,\ t\in[0,T]. \tag{41}$$

Позначимо $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. Згідно з умовами теореми 2 $u_{2x}(0,t) > 0, t \in (0,T]$, тому рівняння (41) можемо записати у вигляді

$$a(t) = -\frac{a_1(t)v(0,t)}{u_{2x}(0,t)},\ t \in [0,T]. \tag{42}$$

Використовуючи функцію Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $t^\beta u_t = a_1(t)u_{xx}$, задачу (39), (40) замінимо системою рівнянь

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^\beta}d\tau \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi,\ (x,t) \in \overline{Q}_T, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} v(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^\beta}d\tau \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{44}$$

Оскільки ядра системи інтегральних рівнянь (42) - (44) мають інтегровні особливості, то система має єдиний тривіальний розв'язок. Поклавши $T_0 = \min\{t_1, t_2\}$, приходимо до твердження теореми 2.

1. *Смирнова Г.Н.* Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области // Сиб. мат. ж. – 1963. – Т.4, №2. – С.343-357.
2. *Калашников А.С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки. – 1968. – Т.3, №2. – С.171-178.
3. *Джураев Т.Д.* О краевых задачах для линейных пераболических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. заметки. – 1972. – Т.12, №5. – С.643-652.
4. *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравн. – 1986. – Т.22, №6. – С.1065-1068.
5. *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. ж. – 2006. – Т.57, №11. – С.1563-1570.
6. *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – №288. – С.99-106.
7. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – 240p.
8. *Гринців Н.М.* Розв'язність оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння в області з вільною межею // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – №314-315. – С.40-49.

N.M. Hryntsiv

Inverse Problems for Degenerate Parabolic Equations

There are established conditions of existence and uniqueness of the classical solutions to the inverse problems for determination of the coefficient at the higher-order derivative in the parabolic equations. It is supposed that coefficient at the u_t vanishes at the initial moment as a power $t^{\beta}, \beta > 1$.

Keywords: *inverse problems, degenerate parabolic equations.*

Н.Н. Грынцив

Обратные задачи для вырождающихся параболических уравнений

Установлены условия существования и единственности классических решений обратных задач определения старшего коэффициента в вырождающихся параболических уравнениях. Исследован случай сильного степенного вырождения.

Ключевые слова: *обратные задачи, вырождающиеся параболические уравнения.*

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
hryntsiv@ukr.net

Получено 15.02.09