ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Том 20

УДК 517.5

©2010. **Н.П. Волчкова**

АНАЛОГ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА БЕССЕЛЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ФЕРРЕРСА

Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса.
Ключевые слова: *функции Лежандра, функции Ферререса, асимптотический ряд.*

Хорошо известно [1, глава 2, § 29, (29.4)], что функция Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ имеет при $z \to \infty$, $|\arg z| \le \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0,\pi)$) асимптотическое разложение

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\nu, 2k)(2z)^{-2k} - \right.$$

$$\left. \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\nu, 2k+1)(2z)^{-2k-1} \right], \qquad (1)$$

где

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + m\right)}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - m\right)}, \quad \Gamma \text{ – гамма-функция.}$$

Цель данной работы – получить аналог разложения (1) для функций Ферререса (см. [2, глава 3, § 3, п. 57]). Функции Ферререса $T_\nu^\mu(x)$ ($\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $x \in (-1,1)$) определяются равенством

$$T_\nu^\mu(x) = \frac{e^{i\pi\mu}}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right),$$

где F - гипергеометрическая функция Гаусса. Они тесно связаны с функциями Лежандра первого рода и играют важную роль в различных вопросах анализа. В частности, с точностью до постоянного множителя, функция

$$(\sin\theta)^{1-\frac{n}{2}} T_{l+\frac{n}{2}-1}^{1-\frac{n}{2}}(\cos\theta), \quad (l \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$$

является зональной сферической функцией на стандартной n -мерной сфере $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r \in (0,\pi)$ положим

$$d_k(r) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1} \operatorname{ctg} r, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно, } k \ne 0, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

$$A_0 = (\sin r)^{\alpha - \frac{1}{2}},$$

$$A_p = (\sin r)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)_m}{m!} \sum_{k_1 + \ldots + k_m = p} \frac{p!}{k_1! \ldots k_m!} d_{k_1}(r) \ldots d_{k_m}(r),$$

где $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0, \pi)$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \le \pi - \varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение*

$$T^{\mu}_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cos r) \sim \frac{2 e^{i\pi\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2} - \mu)(\sin r)^{-\mu}} \times$$

$$\left(\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1 - 2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu - \mu + \frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu - \mu + \frac{1}{2}}} + \right. \tag{2}$$

$$\left. \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1 - 2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu - \mu + \frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu - \mu + \frac{3}{2}}} \right).$$

Частные случаи теоремы 1 были известны ранее. Например, в [3, лемма 4.2] было получено два члена асимптотического разложения (2). Этот результат затем использовался для изучения некоторых вопросов интегральной геометрии на $\mathbb{S}^n$. Относительно других частных случаев теоремы 1 и близких вопросов см. [2, глава 6, § 3], [4, часть 1], [5, часть 2].

Доказательство теоремы 1.

Пусть сначала $\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{2}$. Тогда по формуле Мелера-Дирихле (см. [6, 3.7 (27)])

$$T^{\mu}_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cos r) = \frac{e^{i\pi\mu}(\sin r)^{\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2} - \mu)} \int_{-r}^{r} e^{i\lambda t}(\cos t - \cos r)^{-\mu - \frac{1}{2}} dt. \tag{3}$$

Обозначим

$$I(\lambda) = \int_{-r}^{r} e^{i\lambda t}(\cos t - \cos r)^{-\mu - \frac{1}{2}} dt.$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [7, глава 2, § 10, пункт 10.3, теорема 10.2]) имеем

$$I(\lambda) \sim e^{i\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \mu\right) - \lambda r\right)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Gamma\left(p - \mu + \frac{1}{2}\right)}{p!} \frac{A_p}{(i\lambda)^{p - \mu + \frac{1}{2}}} +$$

$$e^{i\lambda r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(p - \mu + \frac{1}{2}\right)}{p!} \frac{A_p}{(i\lambda)^{p - \mu + \frac{1}{2}}},$$

где

$$A_p = \frac{d^p}{dt^p} \left(\left(\frac{\cos(t - r) - \cos r}{t} \right)^{-\mu - \frac{1}{2}} \right) \Bigg|_{t=0}, \quad p \ge 0.$$

Отсюда

$$I(\lambda) \sim 2\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} +$$

$$2\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Вычислим A_p. По формуле Тейлора

$$\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} = \frac{(\cos t - 1)\cos r + \sin t \sin r}{t} =$$

$$\frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}\cos r + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}\sin r\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} b_k(r), \tag{5}$$

где

$$b_k(r) = \begin{cases} \cos r, & k \ \text{– нечетно}, \\ \sin r, & k \ \text{– четно}, \ k = 0, 1, \dots . \end{cases}$$

Перепишем (5) в виде

$$\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} = \sin r\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_k(r)\right) = \sin r(1+\tau(t)), \tag{6}$$

где

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!(k+1)}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_k(r), \quad c_k(r) = \begin{cases} \operatorname{ctg r}, & k \ \text{– нечетно}, \\ 1, & k \ \text{– четно}, \ k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \dots .$

Положим $F(x) = (1+x)^{-\mu-\frac{1}{2}}$. Тогда (см. (6))

$$A_p = (\sin r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{d^p}{dt^p}\left((1+\tau(t))^{-\mu-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t=0} = (\sin r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{d^p}{dt^p}\left(F(\tau(t))\right)\Big|_{t=0}.$$

Используем формулу

$$(F(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^{p} \frac{F^{(m)}(\tau(t))}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (\tau(t))^k (\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p \geq 0$$

(см. [8, доказательство теоремы 2.11]). Поскольку $\tau(0) = 0$,

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} (\tau^m)^{(p)}(0), \quad p \geq 1. \tag{7}$$

Положив в формуле

$$(f_1 \dots f_m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} f_1^{(k_1)} \dots f_m^{(k_m)}$$

$f_1 = \ldots = f_m = \tau$, получим

$$(\tau^m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)} \dots \tau^{(k_m)}, \quad m \geq 1. \tag{8}$$

Из (7) и (8) находим

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1.$$

Таким образом,

$$A_p = (\sin r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1.$$

Учитывая, что

$$F^{(m)}(0) = (-1)^m \left(\frac{1}{2} + \mu\right)_m$$

и

$$\tau^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1} c_k(r) = d_k(r),$$

из (3) и (4) получаем (2) для $\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{2}$. Общий случай следует отсюда стандартным методом продолжения по параметру (см. [6, 2.8 (30)] и [7, глава 2, § 10, пункт 10.3, доказательство формулы (10.61)]). Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М: Наука, 1971. – 288 с.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций – М: ИЛ, 1952. – 476 с.
3. *Волчков Вит.В.* Локальная теорема о двух радиусах на сфере // Алгебра и анализ. – 2004. – Т. 16. – Вып. 3. – С. 24-55.
4. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
7. *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. – Рига: Зинатне, 1974. – 272 с.

8. *Nessel R.J., Wickeren E.* Local Multiplier Criteria in Banach Spaces // Mathematica Balkanica. New Series. – 1988. – V. 2. – Fasc. 2-3. – P. 114-132.

N.P. Volchkova

An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Ferrers functions.

An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Ferrers functions is obtained.

Keywords: *the Legendre functions, the Ferrers functions, asymptotic expansion.*

Н.П. Волчкова

Аналог асимптотичного ряду Бесселя для функцій Ферререа.

Одержано аналог асимптотичного ряду Бесселя для функцій Ферререа.

Ключові слова: *функції Лежандра, функції Ферререа, асимптотичний ряд.*

Донецкий национальный технический университет
v.volchkov@mail.donnu.edu.ua

Получено 31.05.10