УДК 517.98

©2010. **Е.В. Божонок**

ПСЕВДОКВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА W_2^1

В данной работе в терминах "псевдоквадратичных функционалов"получены достаточные условия корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и повторной компактной дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в локально выпуклом пространстве Соболева W_2^1. Рассмотрены, как необходимое, так и достаточное, условия сильного K–экстремума в локально выпуклом пространстве W_2^1.

Ключевые слова: *вариационный функционал, K–экстремум, пространство Соболева, локально выпуклое пространство.*

Введение. Предварительные сведения.

В известной монографии И.В. Скрыпника [1] доказано, что в пространстве Соболева W_2^1 вариационный функционал имеет особые дифференциальные свойства. Так, в этом случае, функционал Эйлера–Лагранжа не является, за исключением вырожденного случая, дважды сильно дифференцируемым.

Внимательный анализ ситуации показал, что уже корректная определенность основного вариационного функционала в пространстве Соболева связана с дополнительным требованием "псевдоквадратичности"интегранта по y'. Кроме того, непрерывность функционала в классическом "банаховом"случае C^1 переходит в пространстве W_2^1 в K–непрерывность, дифференцируемость—в K–дифференцируемость и т.д. Для гильбертова пространства Соболева W_2^1 условия корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и повторной компактной дифференцируемости вариационных функционалов были получены в [2], [3]. Аналогичной оказалась и ситуация с экстремумами вариационных функционалов в W_2^1. В этом случае экстремумы являются, как правило ([2], [4], [5]), не локальными, а компактными (K–экстремумами). В работах [6]–[9] рассмотрены, как необходимое, так и достаточное, условия сильного K–экстремума в гильбертовом пространстве W_2^1.

В данной работе (п.п. 2–5) мы получаем условия корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и повторной компактной дифференцируемости вариационных функционалов в случае локально выпуклого пространства Соболева W_2^1. В шестом пункте статьи рассмотрены достаточные и необходимые условия сильного K–экстремума в локально выпуклом W_2^1.

Введем необходимые определения ([2]–[5]).

Определение 1. Борелевское отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F—вещественные банаховы пространства, назовем *псевдоквадратичным по z* ($f \in K_2(z)$), если f можно представить в виде:

$$f(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) \cdot \|z\| + R(x,y,z) \cdot \|z\|^2, \tag{1}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ борелевские отображения P, Q, и R существенно по $x \in \Omega$ ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Назовем отображение f *вейерштрассовским псевдоквадратичным*: $f \in WK_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ отображения P, Q и R равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Скажем, что отображение f *принадлежит классу* $W^1K_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q и R, но также и градиенты $\nabla P := \nabla_{yz} P$, $\nabla Q := \nabla_{yz} Q$, $\nabla R := \nabla_{yz} R$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Скажем, что отображение f *принадлежит классу* $W^2K_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q, R, их градиенты ∇P, ∇Q, ∇R, но и гессианы $H(P) := H_{yz}(P)$, $H(Q) := H_{yz}(Q)$, $H(R) := H_{yz}(R)$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Определение 2. Пусть E—вещественное банахово пространство, $\Psi : E \to \mathbb{R}$—функционал на E. Назовем функционал Ψ *компактно непрерывным* (K*–непрерывным*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Ψ на $(y + span\, C)$ непрерывно в y относительно банаховой нормы $\| \cdot \|_C$ in $span\, C$, порожденной C.

Аналогично, скажем, что Ψ *компактно (дважды) дифференцируем* (K*–дифференцируем, дважды* K*–дифференцируем*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Ψ на $(y + span\, C)$ (дважды) дифференцируем по Фреше в y относительно $\| \cdot \|_C$. Обозначим через $\Psi'_K(y)$ и $\Psi''_K(y)$ первую и вторую K–производные Ψ, соответственно.

В [3] были получены следующие результаты.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, E*—банахово пространство,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. *Тогда при* $f \in K_2(z)$ *вариационный функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x, y, y')dx, \quad y(\cdot) \in W_2^1(\Omega, E), \tag{2}$$

определен всюду на $W_2^1(\Omega, E)$.

Теорема 4. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H*—вещественное гильбертово пространство,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in WK_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа (2)* K*–непрерывен всюду на* $W_2^1(\Omega, H)$.

Теорема 5. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H*—вещественное гильбертово пространство,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in W^1K_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа (2)* K*–дифференцируем всюду на* $W_2^1(\Omega, H)$.

Теорема 6. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H*—вещественное гильбертово пространство,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in W^2K_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа (2) дважды* K*–дифференцируем всюду на* $W_2^1(\Omega, H)$.

Введем также понятие сильного K–экстремума.

Определение 7. Будем говорить, что функционал $\Psi : E \to \mathbb{R}$, где E—вещественное банахово пространство, имеет *сильный компактный экстремум* (*сильный K–экстремум*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого пространства $C \subset E$ сужение Ψ на $(y + span\, C)$ имеет локальный экстремум в y относительно $\| \cdot \|_C$ в $span\, C$.

1. Условия корректной определенности.

Обобщим понятия из пункта 1 на локально выпуклый случай.

Определение 8. Пусть Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y и Z—вещественные полные отделимые ЛВП, F—вещественное банахово пространство, $\{\| \cdot \|_i\}_{i\in I}$ и $\{\| \cdot \|^j\}_{j\in J}$—определяющие системы полунорм в Y и Z, соответственно. Обозначим через Y_i и Z^j фактор–пространства $Y\big/_{ker\|\cdot\|_i}$ и $Z\big/_{ker\|\cdot\|^j}$, пополненные по фактор–нормам $\| \cdot \|_i^\sim$ и $\| \cdot \|^{j\sim}$, соответственно. Борелевское отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$ назовем *псевдоквадратичным по* z ($f \in K_2(z)$), если, для некоторых $i \in I$, $j \in J$, f допускает продолжение

$$f_i^j : \Omega \times Y_i \times Z^j \to F, \tag{3}$$

псевдоквадратичное по $z^j \in Z^j$ (в смысле определения 1). Заметим, что продолжение (3) возможно при условии $\big(\|y_1 - y_2\|_i = 0,\ \|z_1 - z_2\|^j = 0\big) \Rightarrow \big(f(x, y_1, z_1) = f(x, y_2, z_2)\big)$.

Отметим также, что из определений 8 и 1 следует, в силу непрерывного вложения $\Omega \times Y \times (Z, \| \cdot \|^j) \hookrightarrow \Omega \times Y_i \times Z^j$, что для любого компакта $C_Y \subset Y$ f допускает представление в виде:

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z) \cdot \|z\|^j + R(x, y, z) \cdot (\|z\|^j)^2, \tag{4}$$

где отображения P, Q и R существенно (по $x \in \Omega$) ограничены на $\Omega \times C_Y \times Z =: T_C$.

Теорема 9. *Пусть $\Omega = [a; b]$, E—вещественное полное отделимое ЛВП, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in K_2(z)$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа (2) определен всюду на $W_2^1(\Omega, E)$.*

Доказательство. Заметим, что здесь можно положить, в обозначениях определения 8, $Y = Z = E$, $F = \mathbb{R}$. Воспользуемся известным представлением ([10] гл. II, теор. 5.4)

$$E = \varprojlim_{i\in I} E_i\,,$$

где $\left\{E_i = \left(\widetilde{E\big/_{ker\|\cdot\|_i}}, \| \cdot \|_i^\sim\right)\right\}_{i\in I}$—проективная шкала банаховых пространств, построенная по определяющей системе полунорм $\{\| \cdot \|_i\}_{i\in I}$ в E. Тогда пространство Соболева $W_2^1(\Omega, E)$ может быть представлено в виде проективного предела

$$W_2^1(\Omega, E) = \varprojlim_{i\in I} W_2^1(\Omega, E_i).$$

В силу определения 8, при некотором $i \in I$ функция f допускает псевдоквадратичное продолжение $f_i : \Omega \times E_i \times E_i \to F$. Тогда по теореме 3 функционал

$$\Phi_i(y) = \int\limits_{\Omega} f_i(x, y, y')dx$$

определен всюду на $W_2^1(\Omega, E_i)$. Ясно, что при непрерывном вложении $v_i : W_2^1(\Omega, E) \hookrightarrow W_2^1(\Omega, E_i)$ будет $v_i \circ \Phi = \Phi_i$. Таким образом, функционал (2) определен всюду на $W_2^1(\Omega, E)$. □

2. Условия компактной непрерывности.

Отметим, что в локально выпуклом случае определения K–непрерывности, K–дифференцируемости, повторной K–дифференцируемости аналогичны соответствующим понятиям в банаховом случае (определение 2).

Определение 10. Пусть, в обозначениях определения 8, $f \in K_2(z)$ и непрерывно в $\Omega \times E \times E$ по (y, z). Назовем отображение f *вейерштрассовским по* z: $f \in WK_2(z)$, если для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ представление (4) можно выбрать таким образом, что отображения P, Q и R равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Определение 11. Отделимое полное локально выпуклое пространство E назовем *полуядерным*, если в нем существует определяющая система полунорм $\{\| \cdot \|_i\}_{i \in I}$, порождаемых полускалярными произведениями $\| h \|_i^2 = \langle h, h \rangle_i$ $(i \in I)$.

Замечание 12. Используя теорему о представлении полного ЛВП в виде приведенного проективного предела банаховых пространств ([10], гл. II, теор. 5.4), и полагая $H_i = \left(\widetilde{E/_{ker\ \|\cdot\|_i}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_i^{\sim}\right)$, получаем представление E в виде приведенного проективного предела гильбертовых пространств

$$E = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in I}} H_i\,. \tag{5}$$

Заметим, что, в отличие от определения ядерного ЛВП ([10], гл. III, п. 7), мы не требуем ядерности вложений $H_{i_2} \hookrightarrow H_{i_1}$ $(i_1 \preceq i_2)$ и счетности системы $\{H_i\}_{i \in I}$. Примером полуядерного ЛВП может служить любое счетно–гильбертово пространство, например, $L_2^{loc}(\mathbb{R})$ (которое не является ядерным).

Теорема 13. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, E*—вещественное полуядерное ЛВП,* $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in WK_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа (2)* K*–непрерывен всюду на* $W_2^1(\Omega, E)$.

Доказательство. Здесь, как и в теореме 9, $Y = Z = E$, $F = \mathbb{R}$ в обозначениях определения 8. В силу замечания 12, E представимо в виде (5), причем $\left\{H_i = \left(\widetilde{E/_{ker\ \|\cdot\|_i}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_i^{\sim}\right)\right\}_{i \in I}$—проективная шкала гильбертовых пространств. Тогда пространство Соболева $W_2^1(\Omega, E)$ также может быть представлено в виде проективного предела

$$W_2^1(\Omega, E) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in I}} W_2^1(\Omega, H_i). \tag{6}$$

В силу определения 10, функция f при некотором $i \in I$ продолжается до вейерштрассовской по z функции f_i в банаховом пространстве $\Omega \times H_i \times H_i$ (определение 1).

Пусть $u_i : E \hookrightarrow H_i$ и $v_i : W_2^1(\Omega, E) \hookrightarrow W_2^1(\Omega, H_i)$—канонические вложения. Тогда $f = f_i \circ (id_\Omega, u_i, u_i)$. Обозначим

$$\Phi_i(y_i) = \int\limits_\Omega f_i(x, y_i, y_i')dx, \quad \left(y_i \in W_2^1(\Omega, H_i)\right),$$

тогда $\Phi(y) = \Phi_i(u_i \circ y)$, $\Phi = \Phi_i \circ v_i$, поскольку $v_i(y) = u_i \circ y$.

По теореме 4, Φ_i—K–непрерывный функционал в $W_2^1(\Omega, H_i)$. Поскольку v_i—непрерывный линейный оператор, то v_i и K–непрерывен ([11], теор. 3.7). Следовательно, композиция $\Phi = \Phi_i \circ v_i$ также K–непрерывна. □

3. Условия компактной дифференцируемости.

Определение 14. Пусть, в обозначениях определения 8, функция $f \in WK_2(z)$ и непрерывно дифференцируема в $\Omega \times E \times E$ по (y, z). Скажем, что $f \in W^1K_2(z)$, если для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ представление (4) можно выбрать так, что не только отображения P, Q и R, но и градиенты $\nabla P := \nabla_{yz}P$, $\nabla Q := \nabla_{yz}Q$, $\nabla R := \nabla_{yz}R$ определены, равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Теорема 15. *Пусть $\Omega = [a; b]$, E—вещественное полуядерное отделимое ЛВП, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in W^1K_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа (2) K–дифференцируем всюду на $W_2^1(\Omega, E)$; при этом*

$$\Phi_K'(y)h = \int\limits_\Omega \left[\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right]dx. \tag{7}$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 13, продолжим, при некотором $i \in I$, функцию f до функции f_i класса $W^1K_2(z)$ в банаховом пространстве $\Omega \times H_i \times H_i$. Тогда, по теореме 5, функционал Φ_i K–дифференцируем в $W_2^1(\Omega, H_i)$. Из равенства $\Phi = \Phi_i \circ v_i$ и очевидной K–дифференцируемости v_i (как линейного непрерывного оператора) следует K–дифференцируемость Φ. □

4. Условия повторной компактной дифференцируемости.

Определение 16. Пусть, в обозначениях определения 8, функция $f \in K_2(z)$ и дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega \times E \times E$ по (y, z). Скажем, что $f \in W^2K_2(z)$, если для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ представление (4) можно выбрать так, что отображения P, Q, R, их градиенты ∇P, ∇Q, ∇R и их гессианы $H(P) := H_{yz}(P)$, $H(Q) := H_{yz}(Q)$, $H(R) := H_{yz}(R)$ определены, равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Теорема 17. *Пусть $\Omega = [a; b]$, E—вещественное полуядерное отделимое ЛВП, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in W^2K_2(z)$, то функционал Эйлера–Лагранжа (2) дважды K–дифференцируем всюду на $W_2^1(\Omega, E)$; при этом*

$$\Phi_K''(y)(h, k) = \int\limits_\Omega \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h, k) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}((h', k) + (h, k')) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h', k')\Big]dx. \tag{8}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 13 и 15, продолжим, при некотором $i \in I$, функцию f до функции f_i класса $W^2K_2(z)$ в банаховом пространстве $\Omega \times H_i \times H_i$. Тогда, по теореме 6, функционал Φ_i дважды K–дифференцируем в $W_2^1(\Omega, H_i)$. Поскольку $\Phi = \Phi_i \circ v_i$ и v_i—линейный непрерывный оператор, то отсюда, очевидно, следует повторная K–дифференцируемость Φ. $\square$

5. Экстремумы функционала Эйлера–Лагранжа в локально выпуклом пространстве Соболева $W_2^1(\Omega, E)$.

Рассмотрим функционал Эйлера–Лагранжа (2) в пространстве $W_2^1(\Omega, E)$, где $\Omega = [a; b]$, E–вещественное полуядерное ЛВП. Предположим, что $E = E_1 \times ... \times E_n$, где E_i $(i = \overline{1, n})$—вещественные полуядерные ЛВП также. Используя представление (5) для каждого E_i, мы получаем представление E_i в форме приведенного проективного предела

$$E_1 = \varprojlim_{j_1 \in J_1} H_{1j_1}\,, \quad E_2 = \varprojlim_{j_2 \in J_2} H_{2j_2}\,, \;\ldots\;, E_n = \varprojlim_{j_n \in J_n} H_{nj_n}\,,$$

где $H_{ij_i} = (\,E_i|_{ker\ \|\cdot\|_{ij_i}}\,, \langle \cdot, \cdot \rangle_{ij_i}^{\sim})$—гильбертовы пространства.Вводя мультииндексы $j = (j_1, ..., j_n)$, $J = \{j\}$, и гильбертовы пространства $H_j = H_{1j_1} \times ... \times H_{nj_n}$, мы получим

$$E = \varprojlim_{j \in J} H_j\,. \tag{9}$$

В работах [6]–[9] получены, как необходимое, так и достаточное, условия K–экстремумов вариационного функционала (2) в $W_2^1(\Omega, H)$ (где $\Omega = [a; b]$, H—гильбертово пространство). По аналогии с пунктами 2–4 данной статьи, легко доказать соответствующие утверждения для полуядерного ЛВП $W_2^1(\Omega, E)$.

Определение 18. Пусть $E = E_1 \times ... \times E_n$—вещественное полуядерное ЛВП, $B_n : E \to E$—линейный непрерывный самосопряженный оператор. Зададим линейный непрерывный оператор B_n как операторную матрицу $B_n = (B_{ij})$, где $B_{ij} : E_j \to E_i$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Рассмотрим следующее разбиение матрицы B_n на 4 блока: B_n^{11}—главный минор размера $[\frac{n}{2}] \times [\frac{n}{2}]$, B_n^{22}—смежный к нему определитель размера $(n - [\frac{n}{2}]) \times (n - [\frac{n}{2}])$, B_n^{12}, B_n^{21}—соответствующие смежные прямоугольные блоки размера $[\frac{n}{2}] \times (n - [\frac{n}{2}])$ и $(n - [\frac{n}{2}]) \times [\frac{n}{2}]$ (где $[\,\cdot\,]$ означает целую часть числа).

Будем предполагать, что выполнено легко проверяемое необходимое условие положительной определённости ([12]) операторной матрицы размера 2×2: B_n^{11} и B_n^{22} непрерывно обратимы. На множестве всех таких матриц B_n $(n = 1, 2, ...)$ введём *операторы Сильвестра I рода* четырех типов:

$$\triangle_1^1(B_n) = B_n^{11}; \quad \triangle_1^2(B_n) = B_n^{11} - B_n^{12} \cdot (B_n^{22})^{-1} \cdot B_n^{21};$$

$$\triangle_2^2(B_n) = B_n^{22}; \quad \triangle_2^1(B_n) = B_n^{22} - B_n^{21} \cdot (B_n^{11})^{-1} \cdot B_n^{12}.$$

Заметим,что матрицы $\triangle_j^i(B_n)$ $(i, j = 1, 2)$ имеют максимальный размер $([\frac{n}{2}] + 1) \times ([\frac{n}{2}] + 1)$ при нечетном n и $[\frac{n}{2}] \times [\frac{n}{2}]$ при четном n.

Определение 19. Рассмотрим следующее разбиение B_n на 4 блока: $\widetilde{B}_n^{11}$—элемент B_{11} матрицы B_n, $\widetilde{B}_n^{22}$—смежный к нему определитель размера $(n-1)\times(n-1)$, $\widetilde{B}_n^{12}, \widetilde{B}_n^{21}$—соответствующие смежные строка и столбец размера $1\times(n-1)$ и $(n-1)\times 1$.

Будем предполагать, что $\widetilde{B}_n^{11}$ непрерывно обратим. На множестве всех таких матриц B_n $(n=1,2,...)$ введём *операторы Сильвестра II рода*:

$$\widetilde{\triangle_1^1}(B_n)=\widetilde{B}_n^{11};\quad \widetilde{\triangle_2^1}(B_n)=\widetilde{B}_n^{22}-\widetilde{B}_n^{21}\cdot(\widetilde{B}_n^{11})^{-1}\cdot\widetilde{B}_n^{12}.$$

Теорема 20. *Пусть E_i $(i=\overline{1,n})$—вещественные полуядерные ЛВП, $E=E_1\times...\times E_n$, $f\in W^2K_2(z)$. Предположим, что для некоторых функций $y_m(\cdot)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega,E_m)$ $(m=\overline{1,n})$ выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа*

$$\frac{\partial f}{\partial y_m}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z_m}\right)\overset{п.в.}{=}0\quad на\ \Omega. \tag{10}$$

Введем обозначение $\Gamma_n(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial z_j}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial y_j} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\end{pmatrix}_{i,j=1}^{n}$.

Если на K–экстремали $y(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_n(\cdot))$ при всех $x\in\Omega$ выполнена система неравенств

$$\{\triangle_{j_m}^{i_m}...\triangle_{j_2}^{i_2}\triangle_{j_1}^{i_1}(\Gamma_n(f))\gg 0\}_{i_l,j_l=1}^{2}, \tag{11}$$

где $\triangle_{j_l}^{i_l}$—операторы Сильвестра I рода, $m=\begin{cases} k, & for\quad n=2^k\\ k+1, & for\quad 2^k<n<2^{k+1}\end{cases}$, то функционал Эйлера-Лагранжа

$$\Phi(y_1,...,y_n)=\int_\Omega f\big(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x)\big)dx \tag{12}$$

имеет сильный K–минимум в точке $y(\cdot)=(y_1(\cdot),...,y_n(\cdot))$.

Доказательство. Используя представление (9), выберем индекс j, для которого функционал Φ дважды K–дифференцируем в пространстве $W_2^1(\Omega,H_j)$. Применяя соответствующее достаточное условие сильного K–экстремума в "гильбертовом"случае ([7], теор. 17), мы получаем, что Φ имеет сильный K–экстремум в точке $y(\cdot)\in W_2^1(\Omega,H_j)$. Так как, по (9),

$$W_2^1(\Omega,E)\hookrightarrow W_2^1(\Omega,H_j), \tag{13}$$

то компакт в $W_2^1(\Omega,E)$ есть компакт в $W_2^1(\Omega,H_j)$. Тогда, по определению 2, сильный K–экстремум в $W_2^1(\Omega,H_j)$ является сильным K–экстремумом в $W_2^1(\Omega,E)$. $\square$

Теорема 21. *Пусть $\Omega=[a;b]$, E_i $(i=\overline{1,n})$—вещественные отделимые полуядерные ЛВП, $E=E_1\times\ldots\times E_n$, $f:\Omega\times E\times E\to\mathbb{R}$, $f\in W^2K_2(z)$, $y(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_n(\cdot))$—$K$–экстремаль функционала (12) в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega,E)$, все функции*

$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial z_j}(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))$ $(i, j = \overline{1, n})$ абсолютно непрерывны на Ω. Введем обозначение $P_n(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right)_{i,j=1}^{n}$. Тогда, если функционал Эйлера–Лагранжа (12) имеет сильный K–минимум в точке $y(\cdot)$, причем все операторы $\widetilde{\triangle_1^1}(\widetilde{\triangle_2^1})^k(P_n(f))$, $k = \overline{0, n-2}$ непрерывно обратимы, то система дифференциальных неравенств (неотрицательности квадратичной формы)

$$\widetilde{\triangle_1^1}(\widetilde{\triangle_2^1})^k(P_n(f)) \geq 0, \quad k = \overline{0, n-2}; \quad (\widetilde{\triangle_2^1})^{n-1}(P_n(f)) \geq 0, \tag{14}$$

где $\widetilde{\triangle_l^1}$ $(l = 1, 2)$—операторы Сильвестра II рода, выполнена для K–экстремали $y(\cdot)$ почти всюду на Ω.

Доказательство. Используя представление (9), выберем индекс j, для которого функционал Φ дважды K–дифференцируем в пространстве $W_2^1(\Omega, H_j)$. В силу вложения (13), обратимость операторов $\widetilde{\triangle_1^1}(\widetilde{\triangle_2^1})^k(P_n(f))$ $(k = \overline{0, n-2})$ в пространстве $W_2^1(\Omega, H_j)$ следует из обратимости соответствующих операторов в $W_2^1(\Omega, E)$. Применяя соответствующее необходимое условие сильного K–экстремума в "гильбертовом"случае ([7], теор. 18), мы получаем, что система неравенств (14) выполняется в точке $y(\cdot) \in W_2^1(\Omega, H_j)$. Тогда, в силу вложения (13), система неравенств (14) выполняется и в точке $y(\cdot) \in W_2^1(\Omega, E)$. □

1. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.
2. *Орлов И.В.* K–дифференцируемость и K–экстремумы // Украинский математический вестник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 97–115.
3. *Орлов И.В., Божонок Е.В.* Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1 // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — № 2. — С. 63–78.
4. *Орлов И.В.* Нормальная дифференцируемость и экстремумы функционалов в локально выпуклом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 4. — С. 24–35.
5. *Orlov I. V.* Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces // North–Holland Math Studies., Functional Analysis and its Applications. — Amsterdam–Boston–...: Elsevier. — 2004. — Vol. 197. — P. 209–228.
6. *Орлов И.В.* Достаточные условия экстремума и K–экстремума в произведении двух ядерных ЛВП (общий случай) // Ученые записки ТНУ. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2004. — Т. 17(56), № 1. — С. 68–77.
7. *Божонок Е.В.* Достаточные и необходимые условия экстремума функционалов в ядерных локально выпуклых пространствах в случае многих переменных // Ученые записки ТНУ, серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2005. — № 1.— С. 3–26.
8. Божонок К.В., Орлов І.В. Умови Лежандра-Якобі для компактних екстремумів інтегральних функціоналів // Доповіді НАН України. — 2006. — № 11. — С. 5–11.
9. *Божонок Е.В., Орлов И.В.* Условия Лежандра и Якоби для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространстве Соболева // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т. 3, № 4. — С. 282–293.
10. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства — М.: Мир, 1971. — 360 с.
11. *Орлов И.В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 165–175.
12. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике — М.: Наука, 1989. — 416 с.

E.V. Bozhonok

Pseudoquadratic functionals in locally convex Sobolev space W_2^1.

In this paper the sufficient conditions of well-definiteness, compact continuity, compact differentiability and twice compact differentiability for Euler-Lagrange functional in locally convex Sobolev space in terms of "pseudoquadratic functionals"are obtained. Both necessary and sufficient conditions of strong K-extremum in locally convex Sobolev space are considered.

Keywords: *variational functional, K–extremum, Sobolev space, locally convex space.*

К.В. Божонок

Псевдоквадратичні функціонали в локально опуклому просторі Соболєва W_2^1.

У даній роботі в термінах "псевдоквадратичних функціоналів"отримано достатні умови коректної визначеності, компактної неперервності, компактної диференційовності й повторної компактної диференційовності функціонала Ейлера–Лагранжа в локально опуклому просторі Соболєва W_2^1. Розглянуто, як необхідну, так і достатню, умови сильного K–екстремуму в локально опуклому просторі W_2^1.

Ключові слова: *варіаційний функціонал, K–екстремум, простір Соболева, локально опуклий простір.*

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь
`katboz@mail.ru`

Получено 03.02.09