УДК 517.5

©2010. **Е.С. Афанасьева**

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В данной статье получен критерий для кольцевых Q-гомеоморфизмов на римановых многообразиях и следствие из него.

Ключевые слова: *кольцевые Q-гомеоморфизмы, римановы многообразия, риманова метрика.*

Введение. Исследованием проблемы модулей римановых поверхностей активно занимались еще в конце 30-х – начале 40-х годов. Тейхмюллер был одним из тех, кто поставил эту проблему в центре своей программы. Он оказался последователем Абеля и Римана в этом вопросе и впервые ввел расстояние (метрику Тейхмюллера) между различными римановыми поверхностями (между конформными структурами или точками пространства параметров). Последователями же Тейхмюллера стали Альфорс и Берс, которые ввели в пространстве Тейхмюллера комплексную структуру. Первые специфические многомерные эффекты теории квазиконформных отображений были отмечены М. А. Лаврентьевым в статье [16]. Хотя многие утверждения из этого исследования долгое время не были доказаны и не получили должного развития. Систематическое изучение пространственных квазиконформных отображений началось уже в конце 50-х – начале 60-х годов, в основном, в России (Лаврентьев [17] – [19], Шабат [41] – [42], Решетняк [27] – [28], Белинский [4], Финляндии (Вяйсала [5] – [6], и США (Геринг [8] – [10]). Отметим также, что понятие конформного модуля семейства кривых на плоскости, как конформного инварианта, родилось у Берлинга и Альфорса [1] и оформилось в метод экстремальных длин, который, в свою очередь, появился из приемов Гретша. Метод экстремальных длин или модулей и сам этот конформный инвариант успешно используются как в геометрической функции, так и за ее пределами, применяется к исследованию граничного поведения конформных и квазиконформных отображений [9], [34], [42] или к качественным вопросам магнитной гидродинамики и теории зацеплений [39] – [40]. Само понятие конформных инвариантов (емкость, модуль или экстремальная длина), как уже упоминалось выше, связано с именем Альфорса [1] – [2], [34]. Используя эти инварианты, на многообразии появилась возможность вводить конформно-инвариантную метрику, см., напр., [3], [12], [20], [37] – [38] и пополнять многобразие по этой метрике. Сравнительно недавнее красивое применение этих конформных инвариантов, связанное с магнитной гидродинамикой и узлами, описано в [39] – [40]. В последние же годы ведущие специалисты в своих работах активно изучают кольцевые Q-гомеоморфизмы, см., [29] – [30].Это понятие мотивировано определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [7] и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости [31] – [32]. Заметим, что изначально понятие кольцевого Q-гомеоморфизма на комплексной плоскости было изучено и получило начало к тщательному рассмотрению для решения вырожденных уравнений Бельтрами, см., напр., [29], [31]. В данной статье используются как, уже упомянутые выше, инварианты, так и относительно новое понятие кольцевого Q-гомеоморфизма на римановом многообразии.

1. Предварительные сведения. Повторим уже известные ранее понятия, необходимые для дальнейшего изучения кольцевых Q-гомеоморфизмов на римановом многообразии.

Итак, римановым многообразием $(\mathbb{M}^n, g)$ называется объект, состоящий из дифференцируемого многообразия и заданного на нем метрического тензора. Метрический тензор на $\mathbb{M}$ называется еще римановой метрикой на $\mathbb{M}$, см. [11]. Римановой метрикой на многообразии $\mathbb{M}$ называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат, см. [13]. Геодезическое расстояние $d(x, x_0)$ – длина кратчайшей геодезической линии, соединяющей две точки x и x_0, см. [24].

Согласно [14] – [15], напомним следующие понятия. Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ – семейство кривых на n–мерном римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}_+$ называется *допустимой для* Γ, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \geq 1 \tag{1}$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) := \inf \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n dv, \tag{2}$$

где $dv = \sqrt{|detg_{ij}|}\ dx^1 ... dx^n$ и нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям, см., напр., [26].

Далее нас будут интересовать геодезические шары $B(x_0, r)$ и геодезические сферы $\partial B(x_0, r)$. Величины $vol_n B(x_0, r)$, $vol_{n-1} \partial B(x_0, r)$ для кратности будем обозначать через $v(r)$ и $s(r)$, соответственно. Тогда

$$v(r) = \int\limits_0^r s(t) dt. \tag{3}$$

Пусть D – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ $(n \geq 2)$, $D_* = f(D)$ – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n_*, g')$ $(n \geq 2)$, $d_0 = dist(x_0, \partial D)$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. В дальнейшем мы предполагаем, что приведенное ниже геодезическое кольцо является достаточно малым, таким, что оно попадает в нормальную окрестность соответствующей точки. Положим

$$A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D : r_1 < d(x, x_0) < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in D : d(x, x_0) = r_i\}, i = 1, 2.$$

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D_*$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если

$$M\left(\Delta(fS_1, fS_2, D_*)\right) \leq \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \tag{4}$$

для любого геодезического кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть D – область на $(\mathbb{M}^n, g)$ $(n \geq 2)$, где g – метрический тензор класса C^1, $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция и Q определена над геодезической сферой $S(x_0, r)$. Полагаем

$$I = I(r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \tag{6}$$

и $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in D : d(x, x_0) = r_i\}, i = 1, 2$, где $x_0 \in D$ и $0 < r_1 < r_2 < d_0 = dist(x_0, \partial D)$. Тогда

$$M\left(\Delta(fS_1, fS_2, D_*)\right) \leq \frac{1}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{I^{n-1}} \tag{7}$$

всякий раз, когда $f : D \to \mathbb{M}^n_*$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно ввести координаты, нормальные в любой точке риманова пространства, см. теорему 1 с. 213 [22]. Тогда $g^0_{ij} = g_{ij}|_{M_0} = g_{ij}(0, ..., 0) = \delta_{ij}$ по определению на с.213 в [22]. Рассмотрим нормальную координатную карту с центром в точке M_0 (U, φ), где U – открытое множество в $\mathbb{M}^n$, содержащее точку M_0, которую мы хотим выбрать за начало координат Римана, а $\varphi : \mathbb{R}^n \to U$ – гомеоморфизм. Так как мы работаем в фиксированной карте, то можно считать, что геодезические сферы S_i с центром в точке M_0 – это геодезические сферы в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Таким образом, геодезические сферы являются гладкими поверхностями, см. [21] с. 77. Так как, по определению выше, $|det\ g_{ij}| = 1$, тогда элемент площади $\mathcal{A}_U = \int\limits_U \sqrt{|det\ g_{ij}|}\ dx^1 ... dx^n$ определяется аналогично элементу объема, см. с.388 [26].

Также не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (7), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (7) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$.

Условие $I \neq \infty$ подразумевает, в частности, что $\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A} \neq 0$ п.в. на $(r_1\,, r_2)$. Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[\int\limits_{d(x,x_0)=t} Q(x)\ d\mathcal{A}]^{\frac{1}{n-1}}\ , & t \in (r_1, r_2)\ , \\ 0\ , & t \notin (r_1, r_2)\ . \end{cases} \tag{8}$$

Так как понятие кольцевого $Q-$гомеоморфизма в точке M_0 носит локальный характер, то есть является инвариантным относительно преобразований локальных координат, то

$$\int\limits_{A} Q(x) \cdot \psi^n\left(d(x,x_0)\right)\ dv(x)\ = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = I, \tag{9}$$

где

$$A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}.$$

Равенство имеет смысл, так как мы работаем в фиксированной нормальной карте, а значит, верна и теорема Фубини по сферическим координатам [33].

Пусть далее Γ – семейство всех кривых, соединяющих окружности S_1 и S_2 в A. Пусть также ψ^* – борелевская функция, такая, что $\psi^*(t) = \psi(t)$ для п.в. $t \in [0, \infty]$. Такая функция ψ^* существует по теореме Лузина, см. 2.3.5. в [33] с. 69 и [36].

$$M(\Delta(fS_1, fS_2, D_*)) \leq \frac{1}{I^n} \int\limits_{A} Q(x) \cdot \psi^{*n}\left(d(x,x_0)\right)\ dv(x)\ = \frac{1}{I^{n-1}} \tag{10}$$

Лемма 2. Пусть $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = dist(x_0, \partial D)$, $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Полагаем

$$\eta_0(t) = \frac{1}{I \cdot \left(\int\limits_{d(x,x_0)=t} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}}, \tag{11}$$

где Q определена над геодезической сферой $S(x_0, r)$ и I – величина, определенная в Лемме 1. Тогда

$$\frac{1}{I^{n-1}} = \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta_0^n\left(d(x,x_0)\right)\ dv(x) \leq \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^n\left(d(x,x_0)\right)\ dv(x) \tag{12}$$

для любой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1 вводим нормальные координаты и далее работаем в фиксированной карте.

Если $I = \infty$, то левая часть в соотношении (12) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I = 0$, то $\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A} = \infty$ для п.в. $r \in (r_1, r_2)$ и обе части неравенства (12) равны бесконечности. Предположим, что $0 < I < \infty$. Тогда из (11) и (13) следует, что $\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A} \neq 0$ и $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в (r_1, r_2). Положим

$$\alpha(r) = \left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \eta, \quad \omega(r) = \left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A} \right)^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Будем иметь:

$$\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$$

п.в. в (r_1, r_2) и

$$C := \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^n \left(d(x, x_0) \right)\ dv(x) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^n(r)\omega(r) dr. \tag{14}$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см. Теорему 2.6.2 в [25], к выпуклой функции $\varphi(t) = t^n$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, с вероятнностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_{E} \omega(r) dr,$$

получаем

$$\left(\fint \alpha^n(r)\omega(r) dr \right)^{\frac{1}{n}} \geq \fint \alpha(r)\omega(r) dr = \frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (13). Отсюда получаем

$$C \geq \frac{1}{I^{n-1}}, \tag{15}$$

что и доказывает (12).

Теорема. Пусть D – область на $(\mathbb{M}^n, g)$ $(n \geq 2)$, где g – метрический тензор класса C^1, $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{M}^n_*$

является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для каждого $0 < r_1 < r_2 < d_0 = dist(x_0, \partial D)$,

$$M(\Delta(fS_1, fS_2, D_*)) \leq \frac{1}{I^{n-1}},$$

где

$$I = I(r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}},$$

$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in D : d(x, x_0) = r_i\}, i = 1, 2$. Более того, инфинум в правой стороне неравенства (4) достигается для функции

$$\eta(t) = \frac{1}{I \cdot \left(\int\limits_{d(x,x_0)=r} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

1. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets. – ActaMath, 1950. V. 83. – P. 101-129.
2. *Ahlfors L.* Conformal invariants (Topics in Geometric Function theory). – McGrow-Hill, New. York, 1973.
3. *Anderson G. D., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M.* Conformal invariants, quasiconformal maps and special functions. – Lecture Notes in Math. 1992. V. 1508. – P. 1-19.
4. *Белинский П. П.* О непрерывности пространственных квазиконформных отображений и о теореме Лиувилля. – Докл. АН СССР, 1962, Т.147, N.5. – С.1003-1004.
5. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space. – Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 1961. V. 298. – P. 1-36.
6. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings of a ball. – Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 1961. V. 304. – P. 1-17.
7. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in sace. – Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. – P. 353-393.
8. *Gehring F.W.* Symmetrization of rings in space. – Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. – P. 499-519.
9. *Gehring F.W., Väisälä J.* The coefficients of quasiconformality of domains in space. – ActaMath. 1965. V. 114. – P. 1-70.
10. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space. – Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. – P. 353-393.
11. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. – М.: Мир 1971. – 343с.
12. *Гольдштейн В. М., Водопьянов С. К.* Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях. – ДАН СССР, 1978, Т.238, N.5. – С.1040-1042.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Эдиториал УРСС, 1998, Т.2. – 280с.
14. *Зорич В. А.* Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий. – Успехи математических наук, 2002, Т.57, N.3, (345). – С.3-28.
15. *Зорич В. А.* О конформном типе риманового многообразия. – Функциональный анализ и его приложения, 1996, Т.30, N.2. – С.40-45.

16. *Лаврентьев М. А.* Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей. – Докл. АН СССР, 1938, Т.20. – С.241-242.
17. *Лаврентьев М. А.* Устойчивость в теореме Лиувилля. – Докл. АН СССР, 1954, Т.95. – С.925-926.
18. *Лаврентьев М. А.* К теории пространственных отображений. – Сиб. матем. журн., 1962, Т.3, N.5. – С.710-714.
19. *Лаврентьев М. А.* К теории отображений трехмерных областей. – Сиб. матем. журн., 1964, Т.5, N.3. – С.596-602.
20. *Lelong-Ferrand J.* Invariant conform globaux sur les varietes Riemanniennes. – J. Diff. Geom. 1973. V. 8. – P. 487-510.
21. *John M. Lee* Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. – New York: Springer, 1997.
22. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. – М.: Изд-во. МГУ, 1990. – 384с.
23. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – Springer, New York, 2009.
24. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Современные геометрические структуры и поля. – М.: МЦН-МО, 2005. – 584с.: ил.
25. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane. – Cambridge: Univ. Press, 1995.
26. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Гос. Изд-во. Техн.-Теоретич. лит., 1953. – 636с.
27. *Решетняк Ю. Г.* О конформных отображениях в пространстве. – Докл. АН СССР, 1960, Т.130. – С.1196-1198.
28. *Решетняк Ю. Г.* Об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства. – Докл. АН СССР, 1963, Т.152, N.2. – С.286-287.
29. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory. – Ukrainian Math. Bull., 4 (2007), № 2. – P. 199-234.
30. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q-$гомеоморфизмов. – Сиб. мат. журн., 48 (2007), № 6. – С. 1361-1376.
31. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equations. – J. d'Anal. Math. 2005. V.96. – P. 117-150.
32. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms. – Ukrainian Math. Bull. 4 (2007), no. 1. – P. 79-115.
33. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949, Т.130. – 494с.
34. *Schlesinger E.* Conformal Invariants and Prime Ends. – Amer. J. Math. 1958. V. 80. – P. 83-102.
35. *Schlesinger E., Väisälä J.* Conformal invariants and prime ends. – Amer. J. Math. 1958. V. 80. – P. 83-102.
36. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760с.
37. *Ferrand J.* Conformal capacity and conformally invariant functions on manifolds. – C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 1994. V. 218. – P. 213-216.
38. *Ferrand J.* Conformal capacity and conformally invariant metrics. – Pacific J. Math. (to appear).
39. *Freedman M. H., He Z.-X.* Divergence free fields: Energy and asymptotic crossing number. – Ann. of Math. (2). 1991. V. 134., N.1. – P. 189-229.
40. *Freedman M. H., He Z.-X.* Links of tori and the energy of incompressible flows. – Topology. 1991. V. 30., N.2. – P. 283-287.
41. *Шабат Б. В.* Метод модулей в пространстве. – Докл. АН СССР, 1960, Т.130. – С.1210-1213.
42. *Шабат Б. В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве. – Докл. АН СССР, 1960, Т.132. – С.1045-1048.

O.S. Afanas'eva

Characterization for ring Q-homeomorphisms on Riemannian manifolds.

In this article the criterion for ring Q-homeomorphisms on Riemannian manifolds and a corollary from it is received.

Keywords: *ring Q-homeomorphisms, Riemannian manifolds, Riemannian metric.*

О.С. Афанасьєва

Характеризація кільцевих Q-гомеоморфізмів на ріманових многовидах.

У даній статті отримано критерій для кільцевих Q-гомеоморфізмів на ріманових многовидах та наслідок з нього.

Ключові слова: *кільцеві Q-гомеоморфізми, ріманові многовиди, ріманова метрика.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
smolovayaes@yandex.ru

Получено 30.04.10