УДК 51-74:536.2

©2009. **О.В. Литовченко**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Рассматривается некорректная задача идентификации параметра конвективного теплообмена, зависящего от времени. Предлагается использование сплайнов для аппроксимации функций с множеством локальных экстремумов. Устойчивость решения будет обеспечивать минимизация квадратичного функционала невязки для всех отрезков сплайнов и условия сопряжения в узлах сплайнов.

Постановка задачи. Для построения более точной модели теплофизического процесса необходимо некоторые параметры считать распределенными по координате либо во времени. Неизвестная функция может иметь множество локальных экстремумов, чтобы отобразить такую зависимость предлагается аппроксимация отрезками полиномов невысокой степени, т.е. сплайнами. Для кубического сплайна требуется выполнение условий сопряжения в узлах, а именно: непрерывность функции и первых двух ее производных во всех внутренних точках. В таком случае нет разрывов и резких перегибов функции, связь между числом узловых точек и степенью полинома отсутствует.

Основная цель такой аппроксимации – получить устойчивое, достаточно точное представление функции искомого параметра. Сама идея сплайн-аппроксимации не снимает проблему неустойчивости решения, т.е. отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных. Поэтому на каждом отрезке сплайна для $z >> 4$ измерений будет минимизироваться квадратичный функционал невязки. Количество измерений на одном отрезке времени, значительно превышающее количество неизвестных коэффициентов полинома на этом отрезке, и выполнение условий сопряжения в узлах повышает устойчивость к ошибкам во входных данных.

Постановка задачи. Математическая модель процесса выглядит следующим образом

$$\frac{\partial\ T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(\tau,x)}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le l \tag{1}$$

с граничными условиями третьего рода

$$-\lambda \frac{\partial\ T(\tau,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha_1(\tau)\left[T_{gr.}(\tau) - T(\tau,o)\right], \tag{2}$$

$$\lambda\ \frac{\partial\ T(\tau,x)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \alpha_2(\tau)\left[T_{gr.}(\tau) - T(\tau,l)\right], \tag{3}$$

и начальным условием

$$T(0,x) = t_0(x), \tag{4}$$

где $T(\tau, x)$ – температура тела, $T_{gr.}(\tau)$ – температура греющей среды, λ – коэффициент теплопроводности среды, $\alpha_1,\ \alpha_2$ – коэффициенты конвективного теплообмена сверху и снизу.

Известна температура тела на границе с внешней средой в r моментах времени:

$$T(\tau_d, 0) = f_d,\ d = \overline{1, r}. \tag{5}$$

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha(\tau)$.

Временная область $0 \le \tau \le \widetilde{\tau}$ разбивается на m равных отрезков, на каждом из которых содержится $z >> 4$ измерений температуры тела на границе с внешней средой. Задача состоит в нахождении функции $F(\tau)$, которая образована m кубическими полиномами

$$P_k(\tau) = A_{k-1} + B_k(\tau - \tau_{k-1}) + C_k(\tau - \tau_{k-1})^2 + D_k(\tau - \tau_{k-1})^3, \quad k = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Коэффициенты полиномов будем искать путем минимизации квадратичного функционала невязки $\mathbb{S}$ [1], при выполнении условий сопряжения в узлах сплайна: непрерывность

$$P_k(\tau_k) = P_{k+1}(\tau_k), \tag{7}$$

непрерывность производной

$$P_k^{'}(\tau_k) = P_{k+1}^{'}(\tau_k), \tag{8}$$

непрерывность второй производной

$$P_k^{''}(\tau_k) = P_{k+1}^{''}(\tau_k). \tag{9}$$

Таким образом, сформулированная задача (1)–(6) сводится к задаче нахождения условного экстремума квадратичного функционала $\mathbb{S}$, с условиями (7)–(9).

Решение задачи идентификации. Решив задачу Дирихле, получим температуры $T(\tau_i, x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии [5]. Для решения задачи Дирихле используем метод конечных разностей.

В области $0 \le x \le l,\ 0 \le \tau \le \widetilde{\tau}$ введем равномерную сетку $\omega_{i,j}$, т.е. будем рассматривать не $T(\tau, x)$, а $T(i\Delta\tau, j\Delta x)$, где $\Delta x = \frac{l}{n}$, i и j шаги по времени и по координате. Условие сходимости метода $0 \le a\frac{\Delta\tau}{\Delta x} \le \frac{1}{2}$. Применив явную конечноразностную схему, получим представление уравнения теплопроводности в виде:

$$T_{i+1,j} = c_1 T_{i,j-1} + (1 - 2 \cdot c_1) T_{i,j} + c_1 T_{i,j+1},$$

где $c_1 = \frac{\Delta\tau a}{\Delta x^2}$.

Теперь в граничном условии $\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\big|_{x=0} = F(\tau)\,[T_{gr.}(\tau) - T(\tau, 0)]$ неизвестным является только функция конвективного теплообмена $F(\tau)$ [6, 7].

Имеем систему уравнений граничных условий в $r = mz$ моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x}(T(\tau_{(k-1)z+i}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+i}, x_0)) = P_k(\tau_{(k-1)z+i})[T_{gr.} - T(\tau_{(k-1)z+i}, x_0)], \tag{10}$$

$i=\overline{1,z},\ k=\overline{1,m}.$

Или в матричной форме

$$\frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_{(k-1)z+1},x_1)-T(\tau_{(k-1)z+1},x_0)\\ T(\tau_{(k-1)z+2},x_1)-T(\tau_{(k-1)z+2},x_0)\\ ...\\ ...\\ T(\tau_{kz},x_1)-T(\tau_{kz},x_0)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1})\cdot(T_{gr.}-T(\tau_{(k-1)z+1},x_0))\\ P_k(\tau_{(k-1)z+2})\cdot(T_{gr.}-T(\tau_{(k-1)z+2},x_0))\\ ...\\ ...\\ P_k(\tau_{kz})\cdot(T_{gr.}-T(\tau_{kz},x_0))\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & ... & 0\\ 0 & P_k(\tau_{(k-1)z+2}) & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & P_k(\tau_{kz})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} T_{gr.}-T(\tau_{(k-1)z+1},x_0)\\ T_{gr.}-T(\tau_{(k-1)z+2},x_0)\\ ...\\ ...\\ T_{gr.}-T(\tau_{kz},x_0)\end{pmatrix}.$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме [2]

$$\begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & ... & 0\\ 0 & P_k(\tau_{(k-1)z+2}) & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & P_k(\tau_{kz})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{k-1} & 0 & ... & 0\\ 0 & A_{k-1} & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & A_{k-1}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} B_k & 0 & ... & 0\\ 0 & B_k & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & B_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & ... & 0\\ 0 & 2\Delta\tau & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z\Delta\tau\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} C_k & 0 & ... & 0\\ 0 & C_k & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & C_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\Delta\tau^2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 2^2\Delta\tau^2 & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z^2\Delta\tau^2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} D_k & 0 & ... & 0\\ 0 & D_k & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & D_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\Delta\tau^3 & 0 & ... & 0\\ 0 & 2^3\Delta\tau^3 & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z^3\Delta\tau^3\end{pmatrix}=$$

$$=A_{k-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}+B_k\cdot\begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & ... & 0\\ 0 & 2\Delta\tau & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z\Delta\tau\end{pmatrix}+$$

$$+C_k\cdot\begin{pmatrix} 1\Delta\tau^2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 2^2\Delta\tau^2 & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z^2\Delta\tau^2\end{pmatrix}+D_k\cdot\begin{pmatrix} 1\Delta\tau^3 & 0 & ... & 0\\ 0 & 2^3\Delta\tau^3 & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z^3\Delta\tau^3\end{pmatrix}.$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения:

$$Q^d = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^d & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2^d\Delta\tau^d & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & z^d\Delta\tau^d \end{pmatrix}, \qquad H_k = \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ ... \\ ... \\ T_{gr} - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix},$$

$$d = \overline{0,3}, \qquad G_k = \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_{(k-1)z+1}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T(\tau_{(k-1)z+2}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ ... \\ ... \\ T(\tau_{kz}, x_1) - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P_k} = \begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & ... & 0 \\ 0 & P_k(\tau_{(k-1)z+2}) & ... & 0. \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & P_k(\tau_{(k-1)z+z}) \end{pmatrix}.$$

G_i и H_i – i-тые элементы столбцов.

Тогда уравнение (10) в матричной форме будет иметь вид

$$G_k = \widetilde{P_k} H_k. \tag{11}$$

Введем квадратичный функционал, оценивающий невязку уравнения (11) [4]

$$\mathbb{S} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=(k-1)z+1}^{zk} (G_{k,i-(k-1)z} - P_k(\tau_i) H_{k,i-(k-1)z})^2. \tag{12}$$

Используя введенные обозначения $\widetilde{P_k}$, можно записать как

$$\widetilde{P_k} = A_{k-1}Q^0 + B_kQ^1 + C_kQ^2 + D_kQ^3. \tag{13}$$

Тогда квадратичный функционал будет иметь вид

$$\mathbb{S} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=(k-1)z+1}^{zk} (G_{k,i-(k-1)z} - P_k(\tau_i) H_{k,i-(k-1)z})^2 = \left(G_k - \widetilde{P_k} H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P_k} H_k\right) =$$

$$= \left(G_k - (A_{k-1}Q^0 + B_kQ^1 + C_kQ^2 + D_kQ^3)H_k\right)^T (G_k - (A_{k-1}Q^0 + B_kQ^1 + C_kQ^2 +$$
$$+ D_kQ^3)H_k).$$

Для получения неизвестных коэффициентов сплайнов [8, 9] необходимо найти условный экстремум функционала $\mathbb{S}$ относительно $3(m-1)$ ограничений (7)–(9). Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим условия сопряжения в узлах сплайнов. Продифференцировав 2 раза функцию P_k и подставив соответствующие выражения в (7)–(9), получим следующие ограничения:

$$\varphi_p = \begin{cases} A_{p-1} + tB_p + t^2C_p + t^3D_p - A_p = 0, & p = \overline{1, m-1}, \\ B_p + 2tC_p + 3t^2D_p - B_{p+1} = 0, & p = \overline{m, 2(m-1)}, \\ C_p - C_{p+1} + 3tD_p = 0, & p = \overline{2m-1, 3(m-1)}, \end{cases} \tag{14}$$

где $t = z\Delta$, Δ – промежуток времени между измерениями температуры на поверхности тела.

Составим функцию Лагранжа в виде линейной комбинации функции $\mathbb{S}$ и функций $\varphi_p \quad p = \overline{1, 3(m-1)}$, взятыми с коэффициентами, называемыми множителями Лагранжа – λ_p:

$$L = \mathbb{S} + \sum_{p=1}^{3(m-1)} \lambda_p \varphi_p. \tag{15}$$

Составим систему из $4m + 3(m-1)$ уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа L по неизвестным $A_{k-1}, B_k, C_k, D_k, \lambda_p$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, 3(m-1)}$

$$\begin{cases} \frac{dL}{dA_{k-1}} = 0, \\ \frac{dL}{dB_k} = 0, \\ \frac{dL}{dC_k} = 0, \\ \frac{dL}{dD_k} = 0, \\ \frac{dL}{d\lambda_n} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Если полученная система имеет решение, то $\hat{A}_{k-1}, \hat{B}_k, \hat{C}_k, \hat{D}_k$ определяют условный экстремум поставленной задачи.

Вычислим векторы первых производных функции L по неизвестным компонентам $A_{k-1}, B_k, C_k, D_k, \lambda_p$ [3]:

первая производная по A_{k-1}

$$\frac{\partial L}{\partial A_{k-1}} = \frac{\partial \left[\sum\limits_{p=1}^{3(m-1)} \lambda_p \varphi_p + \left(G_k - \widetilde{P_k} H_k \right)^T \left(G_k - \widetilde{P_k} H_k \right) \right]}{\partial A_k} =$$

$$= 2A_{k-1} H_k^T Q^0 H_k + 2B_k H_k^T Q^1 H_k + 2C_k H_k^T Q^2 H_k + 2D_k H_k^T Q^3 H_k - 2H_k^T Q^0 G_k +$$

$$+ \begin{cases} \lambda_k, & k = 1, \\ -\lambda_{k-1} + \lambda_k, & 1 \le k \le m, \\ -\lambda_{k-1}, & k = m; \end{cases} \tag{17}$$

первая производная по B_k

$$\frac{\partial L}{\partial B_k} = \frac{\partial\left[\sum\limits_{p=1}^{3(m-1)} \lambda_p\varphi_p + \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)\right]}{\partial A_k} =$$

$$= 2A_{k-1}H_k^T Q^1 H_k + 2B_k H_k^T Q^2 H_k + 2C_k H_k^T Q^3 H_k + 2D_k H_k^T Q^4 H_k - 2H_k^T Q^1 G_k +$$

$$+\begin{cases} t\lambda_k + \lambda_m, & k = 1, \\ t\lambda_k - \lambda_{m+k-2} + \lambda_{m+k-1}, & 1 \le k \le m, \\ -\lambda_{2k-2}, & k = m; \end{cases} \tag{18}$$

первая производная по C_k

$$\frac{\partial L}{\partial C_k} = \frac{\partial\left[\sum\limits_{p=1}^{3(m-1)} \lambda_p\varphi_p + \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)\right]}{\partial A_k} =$$

$$= 2A_{k-1}H_k^T Q^2 H_k + 2B_k H_k^T Q^3 H_k + 2C_k H_k^T Q^4 H_k + 2D_k H_k^T Q^5 H_k - 2H_k^T Q^2 G_k +$$

$$+\begin{cases} t^2\lambda_k + 2t\lambda_m + \lambda_{2m-1}, & k = 1, \\ t^2\lambda_k + 2t\lambda_{m+k-1} - \lambda_{2m+k-3} + \lambda_{2m+k-2}, & 1 \le k \le m, \\ -\lambda_{3(k-1)}, & k = m; \end{cases} \tag{19}$$

первая производная по D_k

$$\frac{\partial L}{\partial D_k} = \frac{\partial\left[\sum\limits_{p=1}^{3(m-1)} \lambda_p\varphi_p + \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)\right]}{\partial A_k} =$$

$$= 2A_{k-1}H_k^T Q^3 H_k + 2B_k H_k^T Q^4 H_k + 2C_k H_k^T Q^5 H_k + 2D_k H_k^T Q^6 H_k - 2H_k^T Q^3 G_k +$$

$$+\begin{cases} t^3\lambda_k + 3t^2\lambda_m + 3t\lambda_{2m-1}, & k = 1, \\ t^3\lambda_k + 3t^2\lambda_{m+k-1} + 3t\lambda_{2m+k-2}, & 1 \le k \le m, \\ 0, & k = m. \end{cases} \tag{20}$$

Производными функции L по неизвестным λ_p являются функции условий сопряжения в узлах сплайнов φ_p

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_p} = \varphi_p. \tag{21}$$

Получили систему из $4m+3(m-1)$ линейных алгебраических уравнений (17)–(21) с $4m+3(m-1)$ неизвестными. Матрица R системы симметрична относительно главной диагонали. Ее структуру можно описать следующим образом. R представима в виде блочной матрицы [2]

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{pmatrix},$$

где R_1 – это блочно-диагональная матрица размерности $4m \times 4m$, где на главной диагонали располагаюся квадратные матрицы 4×4 вида

$$\begin{pmatrix} 2H_k^T Q^0 H_k & 2H_k^T Q^1 H_k & 2H_k^T Q^2 H_k & 2H_k^T Q^3 H_k \\ 2H_k^T Q^1 H_k & 2H_k^T Q^2 H_k & 2H_k^T Q^3 H_k & 2H_k^T Q^4 H_k \\ 2H_k^T Q^2 H_k & 2H_k^T Q^3 H_k & 2H_k^T Q^4 H_k & 2H_k^T Q^5 H_k \\ 2H_k^T Q^3 H_k & 2H_k^T Q^4 H_k & 2H_k^T Q^5 H_k & 2H_k^T Q^6 H_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, m}.$$

R_2 – это матрица размерностью $4m \times 3(m-1)$, а матрица R_3 нулевая.

Решив матричное уравнение, получаем вектор неизвестных коэффициентов сплайнов, составляющих функцию $F(\tau)$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ \dots \\ A_{m-1} \\ B_m \\ C_m \\ D_m \\ \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_{3(m-1)} \end{pmatrix} = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2H_1^T Q^0 G_1 \\ 2H_1^T Q^1 G_1 \\ 2H_1^T Q^2 G_1 \\ 2H_1^T Q^3 G_1 \\ 2H_2^T Q^0 G_2 \\ 2H_2^T Q^1 G_2 \\ 2H_2^T Q^2 G_2 \\ 2H_2^T Q^3 G_2 \\ \dots \\ 2H_m^T Q^0 G_m \\ 2H_m^T Q^1 G_m \\ 2H_m^T Q^2 G_m \\ 2H_m^T Q^3 G_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (22)$$

Основные результаты и выводы. В статье предложен эффективный метод идентификации распределенного параметра модели теплофизического процесса. Получение более устойчивого решения задачи идентификации обеспечивается двумя факторами. Первый фактор – это требование сопряжений в узлах сплайнов. Второй – получение решения путем минимизации квадратичного функционала, оценивающего невязку уравнения. Метод основан на использовании сплайнов третьей степени с дополнительными требованиями сопряжения сплайнов в узлах. Эти требования подразумевают собой непрерывность функции искомого параметра и первых двух ее производных в узлах сплайна, что обеспечивает достаточно гладкое решение: скорость и ускорение изменения функции при вхождении в узлы сплайна будут равны скорости и ускорению при выходе из него.

Минимизировать квадратичный функционал невязки необходимо по всем измерениям для всех отрезков сплайна, составляющих искомую функцию. При этом желательно, чтобы количество измерений на каждом из отрезков превышало количество неизвестных коэффициентов сплайна на этом отрезке.

Таким образом, какова бы ни была сложность искомой зависимости, можно идентифицировать функцию с любым количеством локальных экстремумов.

Предложенный метод успешно решает поставленную задачу и обладает рядом преимуществ по сравнению с известными методами решения обратных задач на основе идеи регуляризации.

1. *О.М. Алифанов* О методах решения некорректных обратных задач// Инженерно-физический журнал. – 1983. – Т.45. – С.742-752.
2. *Ф.Р. Гантмахер* Теория матриц. Москва: Наука. – 1966. – 576с.
3. *О.В. Литовченко* Идентификация распределенных параметров внешнего теплообмена для нелинейных граничных условий // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т.17. – С.109-118.
4. *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. – С.224
5. *В.Н. Ткаченко* Моделирование тепловых процессов в автоматизированных системах обработки информации // Вісник Донецького національного університету, Серія А. Природничі науки. – 2002. – №2. – С.379-383.
6. *Ю.М. Мацевитый* Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т.: Т.2. Приложения. – Институт проблем машиностроения НАН Украины. – Киев: Наукова думка, 2003.
7. *Л.А. Коздоба, П.Г. Круковский* Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка. – 1982. – 385с.
8. *Дж. Алберг, Э. Нильсен, Дж. Уолш* Теория сплайнов и ее приложения. Москва: Мир. – 1972. – 320с.
9. *Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко* Методы сплайн-функций. Москва: Наука. – 1980. – 352с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
lit.ov@i.ua

Получено 24.11.09