УДК 531.35

©2009. **Б.И. Коносевич**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСИ СИММЕТРИИ СНАРЯДА

Предложено интегральное асимптотическое представление угловых колебаний оси симметрии снаряда, движущегося в атмосфере, и дана оценка погрешности этого представления в случаях затухающих и незатухающих колебаний. В обоих случаях погрешность рассматриваемого асимптотического представления значительно меньше погрешности известных представлений.

Введение. В баллистике широко применяются асимптотические представления угловых колебаний оси симметрии снаряда, полученные с помощью метода ВКБ [1, 2]. Однако в рамках этого метода нельзя получить более точные асимптотические представления, так как последующие члены асимптотического разложения перестают убывать. Это вызвано тем, что выражения таких членов содержат производные по времени от быстроосциллирующих функций, зависящих от низших приближений для переменных углового движения.

Указанную трудность можно обойти, если строить уточненное асимптотическое представление угловых колебаний не с помощью операций дифференцирования, а с помощью интегрирования. В настоящей работе предложено интегральное асимптотическое представление угловых колебаний оси симметрии снаряда и даны оценки его погрешности.

1. Исходные соотношения. Для построения асимптотики угловых колебаний оси симметрии снаряда в баллистике обычно пользуются линеаризованной системой дифференциальных уравнений угловых колебаний. При этом предполагают, что найдено приближенное решение остальных уравнений, описывающих поступательное движение и продольное вращение снаряда, но сами эти уравнения не рассматривают. В данной работе используется полная система уравнений движения снаряда, которая получается из исходной нелинейной системы путем ее линеаризации по переменным углового движения q, r, α, β и по углу ψ между вектором скорости центра масс и вертикальной плоскостью. Эта система состоит из подсистемы уравнений поступательного движения и продольного вращения

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \varepsilon^3 v\cos\theta, \quad \dot{y} = \varepsilon^3 v\sin\theta, \quad \varepsilon^2\dot{z} = \varepsilon^5 v\psi,\\
&\dot{v} = \varepsilon^3\frac{v^2}{m}R_1^{(0)}(y,v) - \varepsilon^4 g\sin\theta,\\
&\dot{\theta} = -\varepsilon^4\frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)\alpha - R_3^{(0)}(y,v,p)\beta],\\
&\varepsilon^2\dot{\psi} = \varepsilon^6\frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_3^{(0)}(y,v,p)\alpha + R_2^{(0)}(y,v)\beta],\\
&\dot{p} = \varepsilon^4\frac{p}{I_1}vM_{1D}^{(0)}(y,v)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

и подсистемы уравнений угловых колебаний оси симметрии снаряда

$$\dot\Omega = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta, \quad \dot\Delta = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\psi,\varepsilon). \qquad (2)$$

В подсистеме (2) используются комплексные переменные $\Omega = q + ir$, $\Delta = \alpha + i\beta$ и обозначения

$$\begin{aligned} &a(\xi^{(3)},\varepsilon) = \frac{1}{I_2}[\varepsilon^2 v M_{2D}^{(0)} + iI_1 p], \quad b(\xi^{(3)},\varepsilon) = \frac{v^2}{I_2}[\varepsilon^2 M_2^{(0)} + iM_3^{(0)}],\\ &k(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^2\frac{v}{m}[R_2^{(0)} + iR_3^{(0)}], \quad l(v,\theta,\psi,\varepsilon) = \varepsilon^2\frac{g}{v}(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta). \end{aligned} \qquad (3)$$

Определения параметров и функций, входящих в формулы (1), (3), даны в [3].

Все переменные в уравнениях (1), (2) отнесены к верхним характерным числовым значениям их модулей. В частности, для поперечных компонент q, r угловой скорости снаряда в полусвязанной системе координат в качестве масштаба выбрано значение 1 c^{-1}, а для направляющих косинусов α, β оси симметрии в полускоростной системе координат в качестве масштаба взято значение $0{,}1^2$. Малый параметр ε введен вместо числа 0,1. Система уравнений (1), (2) рассматривается на отрезке времени $[t_0, t_1]$ от момента выстрела t_0 до момента t_1 падения снаряда на землю. Этот отрезок имеет максимальную длину $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ при больших углах стрельбы.

Символы $O(\varepsilon^n)$ $[O^*(\varepsilon^n)]$ обозначают функции фазовых переменных, времени и параметра ε, которые в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени имеют при $\varepsilon \to 0$ порядок не ниже ε^n [равный ε^n]; для положительных функций применяются обозначения $O_+(\varepsilon^n)$ $[O_+^*(\varepsilon^n)]$.

Для сокращения записи используются обозначения $\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^{(4)} = (y, v, \theta, p)$, $\xi^{(3)} = (y, v, p)$.

2. Условия правильности полета. В исходной нелинейной системе медленные переменные $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ ограничены по модулю значениями порядка 1. Отметим, что

$$O_+^*(\varepsilon) \le v^2 \le O_+^*(1), \quad p = O^*(1). \qquad (4)$$

Ограниченность модулей быстрых переменных q, r, α, β в нелинейной системе обеспечивается при выполнении условий, называемых условиями правильности полета. Чтобы сформулировать их, полагаем

$$w = w(\xi^{(4)},\varepsilon) = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot a + \dot k}{2}, \qquad (5)$$

$$\lambda_j = \lambda_j(\xi^{(4)},\varepsilon) = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w},\ \lambda_{j+} = \lambda_{j+}(\xi^{(4)},\alpha,\beta,\varepsilon) = \lambda_j - \frac{\dot w}{4w} \ \ (j = 1, 2). \qquad (6)$$

Здесь $\dot a, \dot k(\xi^{(4)},\varepsilon)$ – производные функций a, k по t в силу уравнений (1), $\sqrt{w} = i\sqrt{_+(-w)}$, $\sqrt{_+}$ – главное значение квадратного корня, верхний и нижний знаки соответствуют $j = 1$ и $j = 2$.

Подставив выражения (3) в (5), получаем формулу

$$w(\xi^{(4)},\varepsilon) = -\frac{p^2 I_1^2}{4I_2^2}\left(1 - \frac{4v^2 I_2 M_3^{(0)}}{p^2 I_1^2}\right) - \varepsilon^2 vp\frac{I_1 R_3^{(0)}}{2mI_2} + \\ + i\varepsilon^2\left[vp\frac{I_1}{2I_2}\left(\frac{M_{2D}^{(0)}}{I_2} + \frac{R_2^{(0)}}{m}\right) - v^2\frac{M_2^{(0)}}{I_2}\right] + O(\varepsilon^4). \tag{7}$$

Предположим, что здесь выражение в первых круглых скобках положительно, и обозначим его через σ^2:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{4v^2 I_2 M_3^{(0)}(y,v)}{p^2 I_1^2} > 0. \tag{8}$$

Неравенство (8) называется условием Маиевского. Снаряд и орудие конструируются таким образом, что в момент выстрела t_0 выполняется условие Маиевского, а величина $\sigma(t_0)$ лежит в пределах $0{,}6 < \sigma(t_0) < 0{,}7$. Согласно (4), квадрат скорости v принимает свое максимальное значение порядка 1 в момент выстрела, а затем v^2 убывает до значений порядка ε. Угловая скорость p на всей траектории сохраняет значение порядка 1. Тогда условие Маиевского выполняется на всей траектории, а коэффициент гироскопической устойчивости σ заключен в пределах

$$\sigma(t_0) \le \sigma \le 1 - O_+^*(\varepsilon), \quad \sigma(t_0) = O_+^*(1). \tag{9}$$

Полагая $\lambda_j = n_j + i\omega_j$ $(j = 1,2)$, потребуем, чтобы выполнялись еще два неравенства

$$n_1,\, n_2 \le O_+^*(\varepsilon^4). \tag{10}$$

Сформулируем теперь условия правильности полета снаряда [4]. Пусть в нелинейной системе уравнений движения снаряда переменные Ω, Δ имеют в момент выстрела t_0 порядок не ниже 1, то есть Ω, $\Delta(t_0,\varepsilon) = O(1)$. Если на траектории полета снаряда выполнены условия (8), (9), (10), то эти переменные имеют порядок не ниже 1 на всей траектории:

$$\Omega,\, \Delta(t,\varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{11}$$

В [3] дана общая оценка погрешности решения системы (1), (2) по сравнению с решением исходной нелинейной системы при одинаковых начальных условиях в момент выстрела. В частности, для переменных ξ погрешность имеет порядок ε^3. Отсюда следует, что и в системе (1), (2) медленные переменные ξ ограничены по модулю значениями порядка 1. С учетом полученных в [3] оценок, из выполнения условий правильности полета для решений нелинейной системы уравнений движения снаряда следует выполнение этих условий и оценок (11) для решений системы (1), (2).

В формулах (1), (3) и далее функции, обозначенные большими латинскими буквами, при $y, z, \theta, \psi, p = O(1)$ равны $O(1)$ вместе со своими частными производными по компонентам $\xi^{(5)}$. При этом функции $R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, M_3^{(0)}$, характеризующие лобовое сопротивление, подъемную силу и опрокидывающий момент, равны $O^*(1)$.

С помощью формул (3), (6), (7) получаем

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{pI_1}{2I_2}(1 \pm \sigma) + \varepsilon^2 v \frac{R_3^{(0)}}{2m}(-1 \pm \frac{1}{\sigma}) + O(\varepsilon^4), \\ n_j &= \varepsilon^2 v \frac{M_{2D}^{(0)}}{2I_2}(1 \pm \frac{1}{\sigma}) + \varepsilon^2 v \frac{R_2^{(0)}}{2m}(-1 \pm \frac{1}{\sigma}) \mp \varepsilon^2 v^2 \frac{M_2^{(0)}}{p\sigma I_1} + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда с учетом (9) следует, что $\omega_1 = O_+^*(1)$, $O_+^*(\varepsilon) \le \omega_2 \le O_+^*(1)$. Частота ω_2 равна $O_+^*(1)$ только на начальном участке траектории. Из (12) вытекают также представления

$$\lambda_1 = \Lambda_1,\ \lambda_2 = v^2\Lambda_2, \quad \lambda_1 + k = L_1,\ \lambda_2 + k = v^2 L_2 \quad (\Lambda_1, \Lambda_2, L_1, L_2 = O^*(1)). \tag{13}$$

В общем случае при выполнении неравенств (10) колебания оси симметрии снаряда, вообще говоря, не являются затухающими, и справедливы соотношения

$$\exp \int_\tau^t \lambda_j(\tau_1, \varepsilon)\, d\tau_1 = O(1), \quad j = 1,2, \quad t_0 \le \tau \le t \le t_1. \tag{14}$$

Однако возможны случаи, когда колебания с одной или обеими частотами ω_j ($j = 1,2$) затухают. Наименьшие отрицательные значения величин n_j равны $-O_+^*(\varepsilon^2)$, так как $|n_j| = O(\varepsilon^2)$ согласно (12).

3. Основное асимптотическое представление угловых колебаний. Пусть ξ, Ω, $\Delta(t,\varepsilon)$ – точное решение системы (1), (2) при начальных условиях, заданных в момент выстрела. Рассматривая зависимость $\xi^{(5)}(t,\varepsilon)$ как известную, запишем подсистему (2) уравнений углового движения в виде

$$\dot\Omega = a(t,\varepsilon)\Omega + b(t,\varepsilon)\Delta, \quad \dot\Delta = -i\Omega - k(t,\varepsilon)\Delta + l(t,\varepsilon), \tag{15}$$

где $a, b, k, l(t,\varepsilon) = a, b, k, l(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon)$ – известные функции времени.

Эффективным средством построения приближенных решений линейных дифференциальных уравнений, содержащих большой или малый параметр, является метод ВКБ (см. [2]). Формальное применение этого метода к уравнениям (15) приводит к формулам

$$\begin{aligned} \Omega_+^{[0]}(t,\varepsilon) &= i\sum_{j=1}^{2} [\lambda_{j+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)]\, \widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) + e_1(t,\varepsilon), \\ \Delta_+^{[0]}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2} \widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) + d_1(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $e_1, d_1(t,\varepsilon) = e_1, d_1(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon)$, функции

$$e_1 = e_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{bl}{ib - ak}, \quad d_1 = d_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = -\frac{al}{ib - ak} \tag{17}$$

определены из условия равенства нулю правых частей уравнений (2). Функции $\widetilde{u}_{j+}^{[0]}$ $(j=1,2)$ заданы формулами

$$\widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon)=C_{j+}^{[0]}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau=C_{j+}^{[0]}\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j}(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \tag{18}$$

а комплексные постоянные $C_{1+}^{[0]}, C_{2+}^{[0]}$ определяются начальными условиями в момент выстрела.

Величины λ_{j+} $(j=1,2)$ заданы формулами (6), в которых производная $\dot{w}$ зависит от неизвестных α,β. Согласно (18), в выражениях функций $\widetilde{u}_{j+}^{[0]}$ $(j=1,2)$ члены с $\dot{w}$ интегрируются. Но такие члены присутствуют в формуле (16) для $\Omega_{+}^{[0]}$. Поэтому функции (16) уместно назвать приближенным квазирешением уравнений (15). Квазирешение и связанные с ним величины отмечаются индексом $+$ (плюс). Поскольку начальные значения всех фазовых переменных расматриваются как известные, то функции (18) в квазирешении являются известными. Поэтому, чтобы получить из квазирешения (16) приближенное решение уравнений (15), не содержащее неизвестных α,β, достаточно в формуле (16) для $\Omega_{+}^{[0]}$ вместо функций λ_{j+} взять λ_j $(j=1,2)$. Таким образом, имеем приближенное решение

$$\begin{aligned}\Omega^{[0]}(t,\varepsilon)&=i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\widetilde{u}_{j}^{[0]}(t,\varepsilon)+e_1(t,\varepsilon),\\ \Delta^{[0]}(t,\varepsilon)&=\sum_{j=1}^{2}\widetilde{u}_{j}^{[0]}(t,\varepsilon)+d_1(t,\varepsilon),\end{aligned} \tag{19}$$

в котором функции

$$\widetilde{u}_{j}^{[0]}(t,\varepsilon)=C_{j}^{[0]}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau=C_{j}^{[0]}\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j}(\tau,\varepsilon)\,d\tau \tag{20}$$

отличаются от функций (18) только значениями постоянных $C_{j}^{[0]}$ $(j=1,2)$.

Введем переменные u_{1+}, u_{2+} (комплексные моды) по формулам

$$\begin{aligned}\Omega&=i\sum_{j=1}^{2}\left[\lambda_{j+}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)\right]u_{j+}+e_1(t,\varepsilon),\\ \Delta&=\sum_{j=1}^{2}u_{j+}+d_1(t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{21}$$

Подставив выражения (21) в (15), получаем для этих переменных систему двух дифференциальных уравнений. С учетом начальных условий она эквивалентна системе двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned}u_{j+}(t,\varepsilon)=\widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon)\pm\int\limits_{t_0}^{t}\Big\{\rho(u_{1+}+u_{2+})+\frac{1}{2w^{1/2}}[i\dot{e_1}+(\lambda_{3-j,+}+k)\dot{d_1}]\Big\}\times&\\ \times\Big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{j+}\,d\tau_1\Big)\,d\tau,\quad j=1,2,&\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\rho = \frac{\ddot{w}}{8w^{3/2}} - \frac{5\dot{w}^2}{32w^{5/2}}. \tag{23}$$

Чтобы определить порядки разностей $u_{j+} - \widetilde{u}_{j+}^{[0]}$, достаточно оценить интегралы в правых частях уравнений (22). После этого, вычитая равенства (19) из (21), найдем погрешность квазирешения (16). Пользуясь изложенной в [3] техникой оценок, получаем для общего случая незатухающих колебаний

$$u_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad \dot{u}_{j+}(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{u}}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1,2; \tag{24}$$

$$u_j(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_j^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \qquad \dot{u}_j(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{u}}_j^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \qquad j = 1,2. \tag{25}$$

Из оценок (24), (25) для $u_{j+} - \widetilde{u}_{j+}^{[0]}$, $u_j - \widetilde{u}_j^{[0]}$ следуют квадратичные по ε оценки погрешности приближенного квазирешения (16) и соответствующего приближенного решения (19):

$$\begin{aligned} &\Omega(t,\varepsilon) - \Omega_+^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta_+^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1]; \\ &\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \tag{26}$$

Что касается оценок (24), (25) для производных, то они не находят применения, так как являются достаточно грубыми. В дальнейшем при оценке интегральных выражений, зависящих от Ω, Δ, вместо комплексных мод удобнее пользоваться другими переменными – комплексными амплитудами, – так как для них погрешности производных имеют более высокие порядки по ε, чем в (24), (25).

Для оценки погрешности приближенных квазирешения и решения (16), (19) комплексные амплитуды s_{j+}, s_j $(j = 1,2)$ вводятся по формулам

$$u_{j+} = s_{j+} \exp i\varphi_j(t,\varepsilon), \quad u_j = s_j \exp i\varphi_j(t,\varepsilon), \quad j = 1,2, \tag{27}$$

где

$$\varphi_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} \omega_j(\tau,\varepsilon)\, d\tau, \quad j = 1,2.$$

При этом формулы (18), (20) удобно записать в виде

$$\widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = \widetilde{s}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) \exp i\varphi_j(t,\varepsilon), \quad \widetilde{u}_j^{[0]}(t,\varepsilon) = \widetilde{s}_j^{[0]}(t,\varepsilon) \exp i\varphi_j(t,\varepsilon), \quad j = 1,2, \tag{28}$$

где функции

$$\begin{aligned} &\widetilde{s}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = C_{j+}^{[0]} \frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)} \exp \int_{t_0}^{t} n_j(\tau,\varepsilon)\, d\tau, \\ &\widetilde{s}_j^{[0]}(t,\varepsilon) = C_j^{[0]} \frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)} \exp \int_{t_0}^{t} n_j(\tau,\varepsilon)\, d\tau, \quad j = 1,2, \end{aligned} \tag{29}$$

являются приближениями для точных комплексных амплитуд s_{j+}, s_j $(j = 1,2)$.

В случае незатухающих колебаний оси симметрии нетрудно вывести следующие оценки погрешностей функций (29) по сравнению со "своими" комплексными амплитудами s_{j+}, s_j $(j = 1, 2)$:

$$s_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{s}^{[0]}_{j+}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^3); \\ O(\varepsilon^2); \end{cases} \quad \dot{s}_{j+}(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{s}}^{[0]}_{j+}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^5), & j = 1, \\ O(\varepsilon^4), & j = 2; \end{cases} \tag{30}$$

$$s_j(t,\varepsilon) - \widetilde{s}^{[0]}_j(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^3), & j = 1; \\ O(\varepsilon^2), & j = 2; \end{cases} \quad \dot{s}_j(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{s}}^{[0]}_j(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3),\ j = 1, 2. \tag{31}$$

Последняя пара оценок (31) имеет более низкий порядок, чем аналогичная пара оценок (30). Оценки более высокого порядка для производных от комплексных амплитуд $\widetilde{s}^{[0]}_j$ можно получить, если сравнивать их с точными комплексными амплитудами s_{j+} в приближенном квазирешении. При таком подходе в случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда получаем

$$s_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{s}^{[0]}_{j}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^3); \\ O(\varepsilon^2); \end{cases} \quad \dot{s}_{j+}(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{s}}^{[0]}_{j}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^5), & j = 1, \\ O(\varepsilon^4), & j = 2. \end{cases} \tag{32}$$

В случае затухания колебаний с низкой частотой ω_2 вторая пара оценок (32) сохраняется, а вместо первой пары имеем

$$s_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{s}^{[0]}_{j}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \tag{33}$$

4. Интегральное асимптотическое представление угловых колебаний. Рассмотрим снова интегральные уравнения (22), но теперь воспользуемся ими не для оценки погрешности приближенных комплексных мод $\widetilde{u}^{[0]}_{j+}$ $(j = 1, 2)$ в квазирешении (16), а для получения более точной, чем $\widetilde{u}^{[0]}_{j+}$, аппроксимации переменных u_{j+}. Обозначим через $\widetilde{u}^{[1]}_{j+}(t,\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ приближенные выражения комплексных мод u_{j+}, которые определяются равенствами (22) при подстановке в их правые части функций $\widetilde{u}^{[0]}_{j}(t,\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ вместо явно входящих комплексных мод u_{j+} и функций $q^{[0]}, r^{[0]}, \alpha^{[0]}, \beta^{[0]}(t,\varepsilon)$, соответствующих приближенному решению $\Omega^{[0]}, \Delta^{[0]}(t,\varepsilon)$ – вместо значений $q, r, \alpha, \beta(t,\varepsilon)$, соответствующих точному решению. Таким образом, функции $\widetilde{u}^{[1]}_{j+}$ $(j = 1, 2)$ определяются как результат первой итерации метода последовательных приближений для системы интегральных уравнений (22), когда в качестве нулевой итерации принимаются функции $\widetilde{u}^{[0]}_{j}$ $(j = 1, 2)$ и соответствующее им приближенное решение (19).

Переменные α, β входят в выражения функций $\lambda_{j+}, \dot{e}_1, \dot{d}_1$, а переменные q, r, α, β – в выражение функции ρ. Функции $\rho, \lambda_{j+}, \dot{e}_1, \dot{d}_1$, вычисленные при $\xi^{(5)} = \xi^{(5)}(t,\varepsilon)$ и значениях $q^{[0]}, r^{[0]}, \alpha^{[0]}, \beta^{[0]}(t,\varepsilon)$ переменных q, r, α, β, обозначим через

$\rho^{[1]}$, $\lambda_{j+}^{[1]}$, $\dot{e}_1^{[1]}, \dot{d}_1^{[1]}(t,\varepsilon)$. Тогда данное выше определение функций $\widetilde{u}_{j+}^{[1]}$ $(j=1,2)$ эквивалентно формулам

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = \widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) \pm \frac{1}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t}\big\{w^{1/4}\rho^{[1]}(\widetilde{u}_1^{[0]}+\widetilde{u}_2^{[0]})+ \\ +\frac{1}{2w^{1/4}}[i\dot{e}_1^{[1]}+(\lambda_{3-j,+}^{[1]}+k)\dot{d}_1^{[1]}]\big\}\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1\big)\,d\tau, \quad j=1,2.\end{aligned} \tag{34}$$

Подставим выражения (34) вместо u_{j+} в формулы замены (21). В первой из этих формул вместо функций λ_{j+} возьмем известные функции $\lambda_{j+}^{[1]}$. В результате приходим к следующему приближенному представлению угловых колебаний оси симметрии снаряда

$$\begin{aligned}\Omega^{[1]}(t,\varepsilon) &= i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon)+e_1(t,\varepsilon), \\ \Delta^{[1]}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2}\widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon)+d_1(t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку функции $\widetilde{u}_{j+}^{[1]}$ $(j=1,2)$ здесь выражаются по формулам (34) через интегралы, назовем представление (34), (35) интегральным представлением угловых колебаний оси симметрии снаряда. Из полученных ниже оценок погрешности этого представления виден его асимптотический характер.

5. Вспомогательные соотношения. Подставив выражения (3) в формулы (17), находим представления

$$\begin{aligned}e_1(\xi^{(5)},\varepsilon) &= \varepsilon^2 v^{-1}E(\xi^{(3)},\varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta), \\ d_1(\xi^{(5)},\varepsilon) &= \varepsilon^2 v^{-3}D(\xi^{(3)},\varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta),\end{aligned} \tag{36}$$

в которых $E, D(\xi^{(3)},\varepsilon) = O^*(1)$, поскольку порядок единица имеют функции $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}, M_3^{(0)}$, характеризующие лобовое сопротивление, подъемную силу и опрокидывающий момент. Частные производные функций $E, D(\xi^{(3)},\varepsilon)$ по компонентам вектора $\xi^{(3)}$ равны $O(1)$. Дифференцирование выражений (36) по t в силу уравнений (1) приводит к формулам, содержащим α,β. Выделяя в них переменную Δ, получаем представления

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon) &= \varepsilon^5\dot{E}_{50}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-2}\dot{E}_{6,-2}(\xi^{(5)},\varepsilon)+ \\ &+\varepsilon^6\Delta\dot{E}_{60}^{\Delta}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^8\alpha\psi\dot{E}_{80}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^8\beta\psi\dot{E}_{80}^{\beta\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon), \\ \dot{d}_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-2}\dot{D}_{5,-2}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-4}\dot{D}_{6,-4}(\xi^{(5)},\varepsilon)+ \\ &+\varepsilon^6 v^{-2}\Delta\dot{D}_{6,-2}^{\Delta}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^8 v^{-2}\alpha\psi\dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^8 v^{-2}\beta\psi\dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon).\end{aligned} \tag{37}$$

В соответствии с (4), $v^{-1} = O(\varepsilon^{-1/2})$. Поэтому из (36), (37) вытекают оценки

$$e_1 = O(\varepsilon^{3/2}),\ d_1 = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \dot{e}_1 = O(\varepsilon^5),\ \dot{d}_1 = O(\varepsilon^4). \tag{38}$$

Из формулы (5) для функции w следует, что переменные α, β появляются в выражении ее производной $\dot{w}$ в результате дифференцирования величины $\sin\theta$, входящей в выражения $\dot{a}, \dot{k}$. Поэтому, записав w в виде

$$w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = W_{00}(\xi^{(3)}, \varepsilon) + \varepsilon^5 v^2 W^s_{52}(\xi^{(3)}, \varepsilon)\sin\theta + \varepsilon^6 W^s_{60}(\xi^{(3)}, \varepsilon)\sin\theta, \tag{39}$$

где $W_{00} = O^*(1)$, $W^s_{52}, W^s_{60} = O(1)$, после дифференцирования в силу уравнений (1) получаем представление

$$\dot{w}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon) = \varepsilon^3\dot{W}_{30} + \varepsilon^3 v\dot{W}^s_{31}\sin\theta + \varepsilon^8 v\dot{W}^{s^2}_{81}\sin^2\theta + \\ +\varepsilon^9(v\dot{W}^{c^2}_{91} + \varepsilon v^{-1}\dot{W}^{c^2}_{9,-1})\cos^2\theta + \varepsilon^9 v\dot{W}^{\alpha c}_{91}\alpha\cos\theta + \varepsilon^9 v\dot{W}^{\beta c}_{91}\alpha\cos\theta, \tag{40}$$

где функции, обозначенные буквой W с индексами, зависят от $\xi^3 = (y, v, p)$. Формулу (40) можно также записать в виде

$$\dot{w} = \varepsilon^3\dot{W}_0 + \varepsilon^9\dot{W}_\alpha\alpha + \varepsilon^9\dot{W}_\beta\beta. \tag{41}$$

Для $\ddot{w}$ из (1), (2), (40) находим представление

$$\ddot{w}(y, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon) = \varepsilon^6\ddot{W}_0 + \varepsilon^7\ddot{W}_\alpha\alpha + \varepsilon^7\ddot{W}_\beta\beta + \varepsilon^9\ddot{W}_q q + \varepsilon^9\ddot{W}_r r + \\ +\varepsilon^{13}\ddot{W}_{\alpha^2}\alpha^2 + \varepsilon^{13}\ddot{W}_{\alpha\beta}\alpha\beta + \varepsilon^{13}\ddot{W}_{\beta^2}\beta^2, \tag{42}$$

где $\ddot{W}_0$ зависит от $\xi^{(5)}, \varepsilon$, а все остальные величины, обозначенные буквой W с индексами, зависят от $\xi^{(4)}, \varepsilon$. Из формул (39), (41), (42) следуют оценки

$$w = O^*(1),\ \dot{w} = O(\varepsilon^3),\ \ddot{w} = O(\varepsilon^6). \tag{43}$$

Пользуясь соотношениями (39), (41), (42), получаем для функции (23) представление, аналогичное (42):

$$\rho(y, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon) = \varepsilon^6 R_0 + \varepsilon^7 R_\alpha\alpha + \varepsilon^7 R_\beta\beta + \varepsilon^9 R_q q + \varepsilon^9 R_r r + \\ +\varepsilon^{13}R_{\alpha^2}\alpha^2 + \varepsilon^{13}R_{\alpha\beta}\alpha\beta + \varepsilon^{13}R_{\beta^2}\beta^2. \tag{44}$$

Из него вытекает оценка

$$\rho = O(\varepsilon^6). \tag{45}$$

6. Формулы для оценки погрешности интегрального представления. Вычтем равенства (35) из соответствующих равенств (21) и запишем полученные формулы в следующем виде

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[1]}(t,\varepsilon) = i\sum_{j=1}^{2}\big[\lambda_{j+}(t,\varepsilon) - \lambda^{[1]}_{j+}(t,\varepsilon)\big]u_{j+}(t,\varepsilon) + \\ +i\sum_{j=1}^{2}\big[\lambda^{[1]}_{j+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)\big]\big[u_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}^{[1]}_{j+}(t,\varepsilon)\big], \tag{46}$$

$$\Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[1]}(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2}\big[u_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}^{[1]}_{j+}(t,\varepsilon)\big].$$

Разрешив формулы замены (21) относительно переменных u_{j+}, находим для этих переменных выражения, из которых с учетом равенств (11), (13), (38), (43) следует, что $u_{j+} = O(1)$ $(j = 1, 2)$. Далее, в соответствии с (6) имеем $\lambda_{j+} - \lambda_{j+}^{[1]} = -(\dot w - \dot w^{[1]})/(4w)$. Отсюда с помощью формулы (41) при учете определений функций $\dot w, \dot w^{[1]}$ и оценки (26) для $\Delta - \Delta^{[0]}$ получаем

$$\lambda_{j+} - \lambda_{j+}^{[1]} = O(\varepsilon^{11}), \quad j = 1, 2. \tag{47}$$

Поэтому первая сумма в формуле (46) для $\Omega - \Omega^{[1]}$ равна $O(\varepsilon^{11})$. Во второй сумме имеем $\lambda_{j+}^{[1]} + k = O(1)$. Следовательно, для определения погрешности приближенного решения $\Omega^{[1]}, \Delta^{[1]}$ остается найти оценки разностей $u_{j+} - \widetilde u_{j+}^{[1]}$ $(j = 1, 2)$.

Вычитая равенства (34) из (22), получаем для этих разностей формулы

$$u_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde u_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = h_{1j}(t,\varepsilon) + h_{2j}(t,\varepsilon) + h_{3j}(t,\varepsilon), \quad j = 1, 2, \tag{48}$$

в которых

$$\begin{aligned}
h_{1j}(t,\varepsilon) &= \pm\frac{1}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t} w^{1/4}\big[\rho(u_{1+}+u_{2+}) - \rho^{[1]}(\widetilde u_1^{[0]} + \widetilde u_2^{[0]})\big]\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1\big)\,d\tau,\\
h_{2j}(t,\varepsilon) &= \pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{w^{1/4}}\big(\lambda_{3-j,+} - \lambda_{3-j,+}^{[1]}\big)\dot d_1\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1\big)\,d\tau,\\
h_{3j}(t,\varepsilon) &= \pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{w^{1/4}}\big[i(\dot e_1 - \dot e_1^{[1]}) + (\lambda_{3-j,+}^{[1]} + k)(\dot d_1 - \dot d_1^{[1]})\big]\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1\big)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{49}$$

Таким образом, для определения порядков разностей $u_{j+} - \widetilde u_{j+}^{[1]}$ $(j = 1, 2)$ достаточно найти порядки интегралов (49).

7. Оценка интегралов h_{1j} $(j = 1, 2)$. Запишем выражение (49) интегралов h_{1j} $(j = 1, 2)$ в виде

$$\begin{aligned}
h_{1j}(t,\varepsilon) = \pm\frac{1}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t} w^{1/4}\big[&(\rho - \rho^{[1]})(u_{1+}+u_{2+}) +\\
&+\rho^{[1]}(u_{1+}+u_{2+} - \widetilde u_1^{[0]} - \widetilde u_2^{[0]})\big]\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1\big)\,d\tau, \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{50}$$

и определим здесь порядки подынтегральных функций.

Разрешив соотношения для постоянных $C_{j+}^{[0]}, C_j^{[0]}$, вытекающие из (16), (19), относительно этих постоянных, выводим оценки $C_{j+}^{[0]} - C_j^{[0]} = O(\varepsilon^3)$, $j = 1, 2$. С их помощью из формул (18), (20) получаем

$$\widetilde u_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) - \widetilde u_j^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \tag{51}$$

Воспользовавшись оценками (24), (51), приходим к соотношениям

$$u_{j+} - \widetilde u_j^{[0]} = u_{j+} - \widetilde u_{j+}^{[0]} + \widetilde u_{j+}^{[0]} - \widetilde u_j^{[0]} = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2,$$

из которых с учетом оценки (45) следует, что

$$\rho^{[1]}(u_{1+}+u_{2+}-\widetilde{u}_1^{[0]}-\widetilde{u}_2^{[0]})=O(\varepsilon^8). \tag{52}$$

Далее, согласно (44), функция ρ имеет по переменным α, β постоянную Липшица порядка ε^7. Поэтому с учетом второй оценки (26) имеем $\rho-\rho^{[1]}=O(\varepsilon^9)$. Из второй формулы замены (21) с учетом оценок (11), (38) следует, что $u_{1+}+u_{2+}=O(1)$. Таким образом, получаем

$$(\rho-\rho^{[1]})(u_{1+}+u_{2+})=O(\varepsilon^9). \tag{53}$$

Из оценок (14), (52), (53) следует, что в общем случае незатухающих колебаний оси симметрии для обоих интегралов (50) подынтегральные функции равны $O(\varepsilon^8)$. После интегрирования по отрезку времени длины $t-t_0=O(\varepsilon^{-3})$ их порядки понижаются максимум на три единицы. Следовательно, в общем случае незатухающих колебаний справедливы оценки

$$h_{1j}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^5), \quad j=1,2. \tag{54}$$

8. Оценка интегралов $\boldsymbol{h_{2j}}$ $\boldsymbol{(j=1,2)}$. Принимая во внимание оценку (38) для $\dot{d}_1$ и оценку (47), заключаем, что в случае незатухающих колебаний подынтегральные функции в формуле (49) для h_{2j} $(j=1,2)$ равны ε^{15}. В результате их интегрирования по отрезку времени длины $t-t_0=O(\varepsilon^{-3})$ получаем

$$h_{2j}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{12}), \quad j=1,2. \tag{55}$$

9. Оценка интегралов $\boldsymbol{h_{3j}}$ $\boldsymbol{(j=1,2)}$. Рассмотрим разности $\dot{e}_1-\dot{e}_1^{[1]}$, $\dot{d}_1-\dot{d}_1^{[1]}$, входящие в выражения (49) интегралов h_{3j} $(j=1,2)$. Воспользовавшись представлениями (37), приходим к формулам

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(\tau,\varepsilon)-\dot{e}_1^{[1]}(\tau,\varepsilon)&=\varepsilon^6\dot{E}_{60}^{\Delta}(\xi^{(5)},\varepsilon)\left(\Delta-\Delta^{[0]}\right)+\\
&+\varepsilon^8\psi[\dot{E}_{80}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon)\left(\alpha-\alpha^{[0]}\right)+\dot{E}_{80}^{\beta\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon)\left(\beta-\beta^{[0]}\right)],\\
\dot{d}_1(\tau,\varepsilon)-\dot{d}_1^{[1]}(\tau,\varepsilon)&=\varepsilon^6 v^{-2}\dot{D}_{6,-2}^{\Delta}(\xi^{(5)},\varepsilon)\left(\Delta-\Delta^{[0]}\right)+\\
&+\varepsilon^8 v^{-2}\psi[\dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon)\left(\alpha-\alpha^{[0]}\right)+\dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon)\left(\beta-\beta^{[0]}\right)],
\end{aligned}$$

в правых частях которых для краткости не написаны аргументы τ, ε входящих в них функций. Отсюда с учетом вытекающей из (26) квадратичной оценки разностей $\alpha-\alpha^{[0]}$, $\beta-\beta^{[0]}$ следуют выражения

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(\tau,\varepsilon)-\dot{e}_1^{[1]}(\tau,\varepsilon)&=\varepsilon^6\dot{E}_{60}^{\Delta}\left(\Delta-\Delta^{[0]}\right)+O(\varepsilon^{10}),\\
\dot{d}_1(\tau,\varepsilon)-\dot{d}_1^{[1]}(\tau,\varepsilon)&=\varepsilon^6 v^{-2}\dot{D}_{6,-2}^{\Delta}\left(\Delta-\Delta^{[0]}\right)+O(\varepsilon^{9}).
\end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в определения (49) интегралов h_{3j}, приходим при $t-t_0=O(\varepsilon^{-3})$ к формулам

$$\begin{aligned}
h_{3j}(t,\varepsilon)=\pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon^6}{w^{1/4}}\big[i\dot{E}_{60}^{\Delta}+(\lambda_{3-j,+}^{[1]}+k)v^{-2}\dot{D}_{6,-2}^{\Delta}\big]\times\\
\times\big(\Delta-\Delta^{[0]}\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1\big)\,d\tau+O(\varepsilon^6), \quad j=1,2.
\end{aligned} \tag{56}$$

С учетом определения (6) функций λ_{j+} и оценок (43) для $w, \dot{w}$ получаем соотношения $\lambda^{[1]}_{3-j,+} + k = \lambda_{3-j} + k + O(\varepsilon^3)$, где функции λ_{3-j}, k не зависят от α, β, а $v^{-2} = O(\varepsilon^{-1})$, $\Delta - \Delta^{[0]} = O(\varepsilon^2)$ согласно (4), (26). После подстановки этих соотношений в формулу (56) их дополнительному члену $O(\varepsilon^3)$ соответствует член $O(\varepsilon^{10})$ в подынтегральной функции. Его интегрирование при $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ даст $O(\varepsilon^7)$. Воспользовавшись затем представлениями (13), приводим формулы (56) к виду

$$
\begin{aligned}
h_{31}(t,\varepsilon) &= \frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)} \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^6 F_1\big(\Delta - \Delta^{[0]}\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_1\, d\tau_1\big)\, d\tau + O(\varepsilon^6), \\
h_{32}(t,\varepsilon) &= -\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)} \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^6 v^{-2} F_2\big(\Delta - \Delta^{[0]}\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_2\, d\tau_1\big)\, d\tau + O(\varepsilon^6),
\end{aligned}
\tag{57}
$$

где $F_j(\tau,\varepsilon) = F_j(\xi^{(5)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$,

$$
F_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = w^{-1/4}(i\dot{E}^{\Delta}_{60} + L_2 \dot{D}^{\Delta}_{6,-2}), \quad F_2(\xi^{(5)},\varepsilon) = w^{-1/4}(iv^2 \dot{E}^{\Delta}_{60} + L_1 \dot{D}^{\Delta}_{6,-2}),
$$

причем $F_j(\xi^{(5)},\varepsilon) = O(1)$, $\dot{F}_j(\xi^{(5)},\varepsilon) = O(\varepsilon^3)$ $(j = 1,2)$.

Заменив в формулах (19), (21) для $\Delta^{[0]}, \Delta$ величины $\widetilde{u}^{[0]}_j, u_{j+}$ их выражениями (27), (28) через комплексные амплитуды $\widetilde{s}^{[0]}_j, s_{j+}$, получим выражения $\Delta^{[0]}, \Delta$ через эти комплексные амплитуды. Подстановка таких выражений в соотношения (57) приводит к формулам

$$
h_{3j}(t,\varepsilon) = \pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)} e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)}\big[i^{(1)}_j(t,\varepsilon) + i^{(2)}_j(t,\varepsilon)\big] + O(\varepsilon^6), \quad j = 1,2, \tag{58}
$$

в которых

$$
\begin{aligned}
i^{(1)}_1(t,\varepsilon) &= \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^6 F_1\big(s_{1+} - \widetilde{s}^{[0]}_1\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t} n_1\, d\tau_1\big)\, d\tau, \\
i^{(2)}_1(t,\varepsilon) &= \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^6 F_1\big(s_{2+} - \widetilde{s}^{[0]}_2\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t} n_1\, d\tau_1\big) e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\, d\tau, \\
i^{(1)}_2(t,\varepsilon) &= \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^6 v^{-2} F_2\big(s_{2+} - \widetilde{s}^{[0]}_2\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t} n_2\, d\tau_1\big)\, d\tau, \\
i^{(2)}_2(t,\varepsilon) &= \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^6 v^{-2} F_2\big(s_{1+} - \widetilde{s}^{[0]}_1\big)\big(\exp\int\limits_{\tau}^{t} n_2\, d\tau_1\big) e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\, d\tau.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

9.1. Оценка величин $i^{(1)}_j$ $(j = 1,2)$. Подынтегральные функции в формулах (59) для интегралов $i^{(1)}_j$ $(j = 1,2)$ не являются осциллирующими. Поэтому оценки порядков этих интегралов непосредственно следут из оценок их подынтегральных функций. Рассмотрим сначала общий случай незатухающих колебаний, когда экспоненты под знаками интегралов $i^{(1)}_j$ $(j = 1,2)$ равны $O(1)$. В этом случае с учетом оценок (32) для комплексных амплитуд и вытекающей из (4) оценки

$v^{-2} = O(\varepsilon^{-1})$ подынтегральные функции для $i_1^{(1)}, i_2^{(1)}$ имеют порядки ε^9 и ε^7. Интегрируя эти функции на отрезке времени длины $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, получаем

$$i_1^{(1)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^6), \quad i_2^{(1)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4). \tag{60}$$

Рассмотрим теперь случай, когда колебания с низкой частотой ω_2 затухают, так что $n_2 = -O_+^*(\varepsilon^2)$, а для n_1 остается в силе соотношение (10). В этом случае для комплексных амплитуд справедливы оценки (33), и поэтому выполнены неравенства $n_2 \leq -\varepsilon^2 N$, $|\varepsilon^6 v^{-2} F_2(s_{2+} - \widetilde{s}_2^{[0]})| \leq \varepsilon^8 K$, где $N, K > 0$ – постоянные порядка единицы. Пользуясь этими неравенствами, получаем

$$|i_2^{(1)}(t,\varepsilon)| \leq \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^8 K \exp[-\varepsilon^2 N(t-\tau)]\, d\tau = O(\varepsilon^6). \tag{61}$$

9.2. Оценка величин $\boldsymbol{i_j^{(2)}}$ $\boldsymbol{(j = 1, 2)}$. Для оценки интегралов $i_j^{(2)}$ $(j = 1, 2)$ выделим под знаками этих интегралов дифференциалы экспонент от $\pm i(\varphi_2 - \varphi_1)$ и применим формулу интегрирования по частям. Поскольку, согласно (4), (9), $p = O^*(1)$, $\sigma = O_+^*(1)$, то из формул (12) получаем $\omega_2 - \omega_1 = O^*(1)$. Тогда с учетом соотношений $\dot{v} = O(\varepsilon^3)$, $\dot{F}_j = O(\varepsilon^3)$, $\dot{\omega}_j = O(\varepsilon^3)$, $n_j = O(\varepsilon^3)$ $(j = 1, 2)$ и оценок (32) для комплексных амплитуд и их производных в общем случае незатухающих колебаний имеем

$$i_j^{(2)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^7), \quad j = 1, 2. \tag{62}$$

9.3. Итоговые оценки интегралов $\boldsymbol{h_{3j}}$ $\boldsymbol{(j = 1, 2)}$. В случае незатухающих колебаний из формул (58) на основании оценок (60), (62) следует, что

$$h_{31}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^6), \quad h_{32}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4). \tag{63}$$

При затухании колебаний с частотой ω_2 на основании оценок (61), (62) имеем

$$h_{3j}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^6), \quad j = 1, 2. \tag{64}$$

10. Оценки погрешности интегрального представления. Вернемся теперь к формулам (48). Для интегралов (49) в правых частях этих формул в случае незатухающих колебаний установлены оценки (54), (55), (63), из которых вытекают следующие оценки погрешности комплексных мод

$$u_{1+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{1+}^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad u_{2+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4).$$

Отсюда на основании формул (46), (47) следует искомая оценка погрешности интегрального представления (34), (35) для случая незатухающих колебаний оси симметрии снаряда

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Ее порядок определяется порядком оценки (63) функции h_{32}.

В случае затухания колебаний с низкой частотой ω_2 для интегралов в правых частях формул (48) справедливы оценки (54), (55), (64), с помощью которых получаем

$$u_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad j = 1, 2.$$

Отсюда на основании формул (46), (47) вытекает следующая оценка погрешности интегрального представления (34), (35) для случая затухания низкочастотных колебаний

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Ее порядок определяется порядком оценок (54) для h_{1j}.

1. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып.70. – 90с.
2. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380с.
3. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып.6. – С.930-941.
4. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып.30. – С.109-119.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 20.10.09