УДК 539.3

©2009. **Е.Н. Довбня, В.В. Яртемик, И.В. Гурьева**

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Решена задача определения напряженного состояния упруго-пластической изотропной оболочки произвольной кривизны с поверхностной трещиной с учетом упрочнения материала. Получена система сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно методом механических квадратур. Исследовано влияние упрочнения материала на основные характеристики напряженного состояния.

Введение. Упруго-пластическая изотропная оболочка с трещиной рассмотрена в работах [5, 6]. При этом использовалась модель Леонова-Панасюка-Дагдейла (δ_c-модель) и предполагалось, что распределение напряжений равномерно по всей длине зоны пластичности и равно пределу текучести для квазихрупкого материала.

Однако в ряде случаев материал в зоне пластичности может быть деформирован за предел пластичности, что характерно для упрочняющихся материалов [2, 3, 8, 9]. Современные прикладные проблемы механики деформационного упрочнения материалов рассмотрены в статье [1].

В работе [6] исследована задача о напряженном состоянии пологой изотропной цилиндрической и сферической оболочек со сквозной трещиной, для решения которой использовалась δ_c-модель, обобщенная на материалы с упрочнением [4]. Ниже рассмотрена аналогичная задача для изотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны с поверхностной трещиной.

Постановка задачи. Рассмотрим пологую изотропную оболочку произвольной кривизны постоянной толщины h, на внешней стороне которой расположена поверхностная трещина длиной $2l_0$ вдоль одной из линий главных кривизн. Глубина трещины d, $d_1 = h - d$ (рис.1).

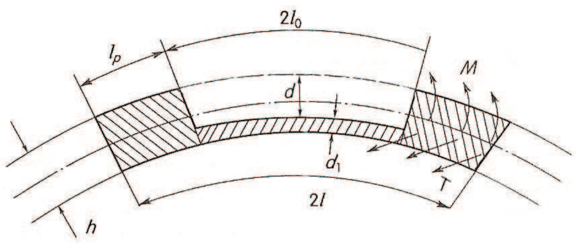

Рис. 1. Поверхностная трещина

Размеры трещины велики по сравнению с толщиной оболочки, но малы по сравнению с другими её линейными размерами, что позволяет рассматривать задачу о равновесии тонкой оболочки с помощью двумерной теории оболочек. В рамках этой теории трещины моделируются как математические разрезы срединной поверхности.

Оболочка отнесена к системе ортогональных координат (x, y, z), выбранной таким образом, что координаты x и y ориентированы вдоль линий главных кривизн срединной поверхности, а координата z направлена по нормали к ней. Будем считать, что оболочка и берега трещины нагружены симметричными относительно линии трещины усилиями и моментами. В процессе деформации оболочки берега трещины не контактируют между собой.

Размеры трещины, уровень внешней нагрузки и свойства материала считаем такими, что в окрестности трещины по всей глубине узкой полосой развиваются пластические деформации. Далее, в соответствии с δ_c-моделью, зоны пластических деформаций моделируем линиями разрыва упругих перемещений и углов поворота на продолжении контура трещины, а реакцию материала пластической зоны считаем распределенной по линейному закону [4, 6]:

$$T(s) = Pb(s), M(s) = Hb(s),$$

$$b(s) = (1 - m^*)\frac{|s| - \tau^*}{2(1 - \tau^*)} + \frac{m^*}{2},$$

где $m^* = \frac{\sigma_B}{\sigma'_\tau}$, σ_B – граница прочности материала, s – координата вдоль которой расположена трещина. P и H – неизвестные постоянные, удовлетворяющие условию пластичности Треска:

$$\frac{P}{h\sigma_\tau} + \frac{6|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1,$$

или пластического шарнира:

$$\left(\frac{P}{h\sigma_\tau}\right)^2 + \frac{2|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1.$$

Также считаем, что на продолжении трещины в глубину, то есть в области $x \in (-l_0; l_0)$, $\gamma \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2} - d\right]$ действуют постоянные напряжения $\sigma'_\tau = \frac{\sigma_B + \sigma_\tau}{2}$.

Таким образом, в рамках δ_c-модели вместо трещины длиной $2l_0$ вводится новая фиктивная трещина неизвестной длины $2l$, где $l = l_0 + l_p$, на берегах которой выполняются условия:

$$T_2(ls) = \begin{cases} T(ls) - T_2^*(ls), & \tau^* \le |s| \le 1 \\ T^l - T_2^*(ls), & |s| \le \tau^* \end{cases}$$

$$M_2(ls) = \begin{cases} M(ls) - M_2^*(ls), & \tau^* \le |s| \le 1 \\ M^l - M_2^*(ls), & |s| \le \tau^*, \end{cases}$$

где величинами со звездочкой обозначены компоненты общего напряженного состояния, $T_2^*(ls)$ и $M_2^*(ls)$ – усилие и момент на линии трещины в оболочке без трещины, l_p – длина пластической зоны, $\tau^* = \frac{l_0}{l}$.

T^l и M^l – усилие и момент, являющиеся реакцией материала на разрыв внутренних связей под трещиной. Согласно нашим предположениям о напряжениях в этих зонах, они определяются по формулам:

$$T^l = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{d_1-\frac{h}{2}} \sigma_\tau^{'} dz = \sigma_\tau^{'} d_1, \qquad M^l = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{d_1-\frac{h}{2}} \sigma_\tau^{'} z dz = -\frac{\sigma_\tau^{'}}{2} d_1(h-d_1).$$

Построение системы сингулярных интегральных уравнений. В работе [7] построена система сингулярных интегральных уравнений (СИУ) для решения упругой задачи о напряженном состоянии оболочки произвольной кривизны с трещиной:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} K_{11}(x-t)\psi_1(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} K_{13}(x-t)\psi_3(t)dt = -\pi(T_2(x) - T_2^*) \\ \int\limits_{-1}^{1} K_{31}(x-t)\psi_1(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} K_{33}(x-t)\psi_3(t)dt = -\pi c^2 R_2 (M_2(x) - M_2^*). \end{cases} \tag{1}$$

Ядра системы (1) приведены в работе [7].

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4l}\frac{d[v]}{dt}, \psi_3 = \frac{D(1-v)(3+v)}{4l} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{dt}.$$

Поскольку в нашей задаче правые части системы – разрывные функции, численное решение с помощью метода механических квадратур или любого другого приближенного метода затруднительно. Представим неизвестные функции в виде:

$$\psi_1(t) = g_1(t) + h_1(t) = g_1(t) + Ph_n(t) - T^l h_s(t),$$

$$\psi_3(t) = g_3(t) + h_3(t) = g_3(t) + c^2 R_2 H h_n(t) - c^2 R_2 M^l h_s(t),$$

где $h_1(t)$, $h_3(t)$ – решения уравнений:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{h_i(t)}{t-x} dt = \pi f_i(x), \qquad f_i(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -a_i + b(x), & \tau^* \le |s| \le 1 \\ -a_i, & |s| \le \tau^* \end{array} \right., \quad i = 1,3. \tag{2}$$

Константы a_1 и a_3 определяются из условий существования решений уравнений (2) по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{P}{T_2^*} a^{'} + \frac{T^l}{T_2^*}\frac{2}{\pi} arcsin(\tau^*), \\ a_3 &= \frac{c^2 R_2 H}{T_2^*} a^{'} + \frac{c^2 R_2 M^l}{T_2^*}\frac{2}{\pi} arcsin(\tau^*), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$a' = \frac{1-m^*}{\pi(1-\tau^*)}\sqrt{1-(\tau^*)^2} + \frac{m^*+1-2\tau^*}{\pi(1-\tau^*)}arccos(\tau^*).$$

Формулы (3) – трансцендентные уравнения, которые можно решить относительно τ^* численными методами при конкретных значениях a.

Решение уравнений (2) соответствует изотропной пластине с поверхностной трещиной с учетом упрочнения материала и имеет вид:

$$\psi_1(t) = \left(-\frac{T^l}{\pi} + \frac{P}{\pi}\frac{m^*+1-2\tau^*}{2(1-\tau^*)}\right)\ln\left|\frac{\tau^*-t}{\tau^*+t}\cdot\frac{1+t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}{1-t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}\right| +$$
$$+\frac{Pt}{\pi}\frac{m^*-1}{2(1-\tau^*)}ln\left|\frac{(1+t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)})(1-t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)})}{(\tau^*-t)(\tau^*+t)}\right|$$
$$\psi_3(t) = \left(-\frac{M^l}{\pi} + \frac{H}{\pi}\frac{m^*+1-2\tau^*}{2(1-\tau^*)}\right)\ln\left|\frac{\tau^*-t}{\tau^*+t}\cdot\frac{1+t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}{1-t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}\right| +$$
$$+\frac{Ht}{\pi}\frac{m^*-1}{2(1-\tau^*)}ln\left|\frac{(1+t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)})(1-t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)})}{(\tau^*-t)(\tau^*+t)}\right|.$$

Перепишем систему (1) относительно искомых функций $\psi_1(t)$ и $\psi_1(t)$, разделив оба её уравнения на T_2^* (учитывая то, что $M_2^* = 0$ по постановке задачи). Итак, теперь $\psi_1(t)$, $\psi_3(t)$ и константы a_1, a_3 будут иметь вид:

$$\psi_1(t) = g_1(t) + th_n(t) - t^l h_s(t), \quad \psi_3(t) = g_3(t) + mh_n(t) - m^l h_s(t),$$
$$a_1 = ta' + t^l\frac{2}{\pi}\arcsin(\tau^*), \quad a_3 = ma' + m^l\frac{2}{\pi}\arcsin(\tau^*),$$

где $t = \frac{P}{T_2^*}$, $t^l = \frac{T^l}{T_2^*}$, $m = \frac{c^2R_2H}{T_2^*}$, $m^l = \frac{c^2R_2M^l}{T_2^*}$

$$h_s(t) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\tau^*-t}{\tau^*+t}\cdot\frac{1+t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}{1-t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}\right|$$
$$h_n(t) = \frac{m^*+1-2\tau^*}{2(1-\tau^*)}h_s(t) + \frac{t}{\pi}\frac{m^*-1}{2(1-\tau^*)ln}\ln\left|\frac{(1-(t\tau^*+\sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}))^2}{(\tau^*-t)(\tau^*+t)}\right|.$$

Получим систему СИУ (4) с непрерывными правыми частями относительно неизвестных t, m, $g_1(t)$, $g_3(t)$, которую будем сводить к системе линейных алгебраических уравнений методом механических квадратур относительно значений неизвестных функций в определенных точках (узлах интерполяционного полинома). Решив её и построив интерполяционный полином, мы сможем найти значение подынтегральных функций в любых точках промежутка интегрирования, включая и вершины трещины.

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} K_{11}(x-t)g_1(t)dt + t\left[\int\limits_{-1}^{1} K_{11}^{r}(x-t)h_n(t)dt + \pi a^{'}\right] + \\ + \int\limits_{-1}^{1} K_{13}(x-t)g_3(t)dt + m\int\limits_{-1}^{1} K_{13}(x-t)h_n(t)dt = \\ = \pi + t^{l}\left[\int\limits_{-1}^{1} K_{11}^{r}(x-t)h_s(t)dt - 2\arcsin(\tau^{*})\right] + m^{l}\int\limits_{-1}^{1} K_{13}(x-t)h_s(t)dt \\ \\ \int\limits_{-1}^{1} K_{31}(x-t)g_1(t)dt + t\int\limits_{-1}^{1} K_{31}(x-t)h_n(t)dt + \\ + \int\limits_{-1}^{1} K_{33}(x-t)g_3(t)dt + m\left[\int\limits_{-1}^{1} K_{33}^{r}(x-t)h_n(t)dt + \pi a^{'}\right] = \\ = t^{l}\int\limits_{-1}^{1} K_{31}(x-t)h_s(t)dt + m^{l}\left[\int\limits_{-1}^{1} K_{33}^{r}(x-t)h_s(t)dt - 2\arcsin(\tau^{*})\right]. \end{cases} \tag{4}$$

Численное решение системы СИУ. Каждое уравнение СИУ (4) методом механических квадратур сводится к системе $n+1$ уравнения, каждое из которых соответствует значению интегрального уравнения в точках $x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(n+1)}\right)$, $m = \overline{1, n+1}$ (внешние узлы), $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = \overline{1, n}$ (внутренние узлы).

Схематически представим матрицу полученной системы следующим образом:

$A(x_1, y_1)..A(x_1, y_n)$ $\vdots$ $A(x_{n+1}, y_1)..A(x_{n+1}, y_n)$	$B(x_1)$ $\vdots$ $B(x_{n+1})$	$C(x_1, y_1)..C(x_1, y_n)$ $\vdots$ $C(x_{n+1}, y_1)..C(x_{n+1}, y_n)$	$D(x_1)$ $\vdots$ $D(x_{n+1})$	$P(x_1)$ $\vdots$ $P(x_{n+1})$
$E(x_1, y_1)..E(x_1, y_n)$ $\vdots$ $E(x_{n+1}, y_1)..E(x_{n+1}, y_n)$	$F(x_1)$ $\vdots$ $F(x_{n+1})$	$G(x_1, y_1)..G(x_1, y_n)$ $\vdots$ $G(x_{n+1}, y_1)..G(x_{n+1}, y_n)$	$H(x_1)$ $\vdots$ $H(x_{n+1})$	$R(x_1)$ $\vdots$ $R(x_{n+1})$

где

$$A(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} K_{11}(x_m - y_k)(1 - y_k^2),$$

$$B(x_m) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{11}^{r}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + a^{'},$$

$$C(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} K_{13}(x_m - y_k)(1 - y_k^2),$$

$$D(x_m) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{13}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2},$$

$$E(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} K_{31}(x_m - y_k)(1 - y_k^2),$$

$$F(x_m) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{31}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1-y_k^2},$$

$$G(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1}K_{33}(x_m - y_k)(1-y_k^2),$$

$$H(x_m) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{33}^{r}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1-y_k^2} + a^{'},$$

$$P(x_m) = 1 + t^l\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{11}^{r}(x_m - y_k)h_s(y_k)\sqrt{1-y_k^2} - \frac{2}{\pi}\arcsin(\tau^*)\right] +$$

$$+\frac{m^l}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{13}(x_m - y_k)h_s(y_k)\sqrt{1-y_k^2}$$

$$R(x_m) = \frac{t^l}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{31}(x_m - y_k)h_s(y_k)\sqrt{1-y_k^2} +$$

$$+m^l\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} K_{33}^{r}(x_m - y_k)h_s(y_k)\sqrt{1-y_k^2} - \frac{2}{\pi}\arcsin(\tau^*)\right].$$

Система совместна и не вырождена, для её решения можно применить метод Гаусса.

Решаем систему СИУ методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения выбираем значение τ^*, соответствующее аналогичной задаче для тонкой пластины. Если погрешность при проверке условия пластичности превышает требуемую точность ($\varepsilon = 10^{-5}$), уточняем значение τ^*, решаем задачу в новом приближении.

Результаты численных исследований. На рисунке 2 изображена зависимость размера зоны пластичности $\tau^* = \frac{l_0}{l}$ от относительного уровня внешней нагрузки $n_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_\tau}$ для цилиндрической оболочки с поверхностной трещиной при различных значениях параметра $m^* = 1; 1,5; 2$, характеризующего упрочнение материала, при этом $\frac{l_0}{R_2} = 0,2$, $\frac{d_1}{h} = 0,1$. Заметим, что если в выражение для $b(x)$ подставить значение $m^* = 1$, получим случай идеально упруго-пластического материала.

На рисунке 3 изображена зависимость параметра τ^* от кривизны оболочки λ, при этом $\frac{l_0}{R_2} = 0,05$, $\frac{d_1}{h} = 0,1$, $n_0 = 0,3$ для различных значений $m^* = 1; 1,5; 2$.

На рисунке 4 изображена зависимость τ^* от $\frac{d_1}{h}$ для цилиндрической оболочки при $\frac{l_0}{R_2} = 0,05$, $n_0 = 0,6$ при различных значениях $m^* = 1; 1,5; 2$.

Исследовано влияние уровня внешней нагрузки, глубины трещины и кривизны оболочки на размер пластической зоны для идеально упруго-пластического ($m^* = 1$) и упрочняющегося ($m^* = 1,5; 2$) материалов. Как видим, вследствие упрочнения материала, длина пластической зоны уменьшается.

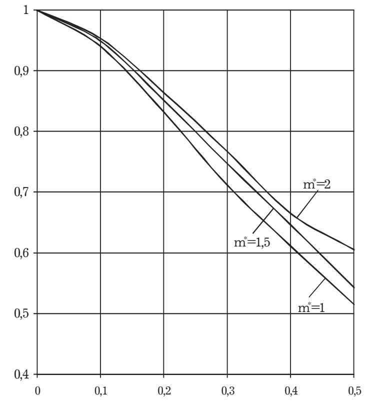

Рис. 2. Зависимость τ_* от n_0

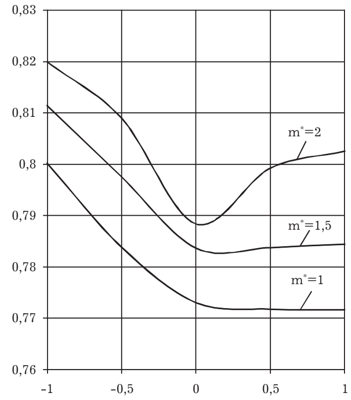

Рис. 3. Зависимость τ_* от λ

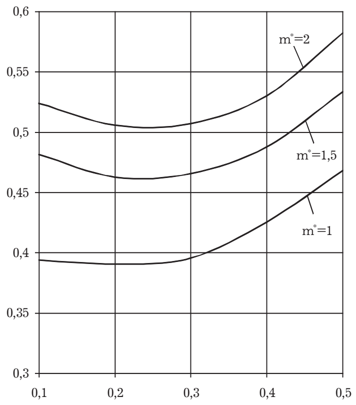

Рис. 4. Зависимость τ_* от $\frac{d_1}{h}$

1. *Бастун В.Н.* Прикладные проблемы механики процессов деформационного упрочнения конструкционных металлических материалов // Прикладная механика. – 2005. – Т.41. – №10. – С.12-51.
2. *Данилов В.Л.* К формулировке закона деформационного упрочнения // Известия АН СССР, Механика твердого тела. – 1971. – №6. – С.146-150.
3. *Ишлинский А.Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украинский математический журнал. – 1954. – 6, №3. – С.314-317.
4. *Каминский А.А.* Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением // Прикладная механика. – 1984. – 20, №4. – С.54-60.
5. *Корохіна О.А.* Напружено-деформований стан пружно-пластичної оболонки з тріщиною : дис. на здоб. наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Наук. кер. К.М.Довбня. – Донецьк : ДонНУ, 2005. – С.133-158.
6. *Кушнір Р.М.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами // Львів : НАНУ, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача. Вид-во "Сполом". – 2003. – 320с.
7. *Шевченко В.П.* Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Механика композитов : в 12т. – Т.7. – К.: А.С.К., 1998. – С.212-249.
8. *Golub V.P.* An approach to constructing a rheological model of a strain-hardening medium // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, №7. – P.776-784.
9. *Khan A.* On the evolution of isotropic and kinematic hardening with finite plastic deformation. Part 1 // Int. O. Plasticity. – 1999. 15. – P.1265-1275.

Донецкий национальный ун-т
`gurieva.irina@gmail.com`

Получено 30.10.09