ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 19

УДК 517.977, 531.36

©2009. **В.В. Грушковская, А.Л. Зуев**

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧИВАЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

В работе рассматривается задача стабилизации положения равновесия системы уравнений Эйлера с ограничением на управляющий момент из множества в виде треугольника. В процессе исследования применяется теория критических гамильтонианов, с помощью которых получены необходимые условия стабилизируемости системы. Основным результатом работы является утверждение о достаточных условиях стабилизируемости.

Введение. Одной из основных задач, рассматриваемых теорией управления, является задача стабилизации особой точки аффинной системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = f_0\,(x) + \sum_{k=1}^{m} u_k f_k\,(x), \tag{1}$$

где x – фазовый вектор системы из области $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_m) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $0 \in X$, $0 \in U$, $f_0\,(0) = 0$, $f_k \in C^1\,(X)$, $k = \overline{0, m}$.

Задача стабилизации для данной системы состоит в нахождении функции $u = u\,(x) \in U$ такой, что решение $x = 0$ системы (1) с $u = u\,(x)$ будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Один из подходов к решению этой задачи предложен в работе [1] для частного случая систем, представимых с помощью двух критических гамильтонианов. Целью данной статьи является распространение такого подхода на более широкий класс управляемых систем. Поскольку свойство асимптотической устойчивости не зависит от способа задания координат в окрестности особой точки, то естественно искать условия стабилизируемости нелинейной системы (1) в терминах ее инвариантов относительно преобразований с обратной связью. Полная система инвариантов для нелинейных управляемых систем получена в работе [2] с помощью построения вспомогательных функций (символов) на кокасательном расслоении фазового пространства. Для определения символов поставим в соответствие каждой точке $x \in X$, элементу p кокасательного пространства T_x^*X и управлению $u \in U$ следующее значение:

$$h\,(p, x, u) = \left\langle p, f_0\,(x) + \sum_{k=1}^{m} u_k f_k\,(x) \right\rangle.$$

Определённая таким образом функция $h:\ T^*X \times U \to \mathbb{R}$ называется гамильтонианом системы (1). Значение $h\,(p, x, u)$ соответствует скорости системы вдоль направления p, в зависимости от управления u. Если ограничивающее множество U

имеет вид выпуклого многогранника $U = \mathrm{co}\,\{u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(\mu)}\} \subset \mathbb{R}^m$, то определим критические гамильтонианы системы (1) следующим образом [3]:

$$H_1\,(p,x) = h\left(p,x,u^{(1)}\right),\ \ldots,\ H_\mu\,(p,x) = h\left(p,x,u^{(\mu)}\right). \tag{2}$$

Тогда системе (1) можно поставить в соответствие конечный набор гамильтоновых динамических систем в кокасательном расслоении T^*X:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_k}{\partial p}\,(p,x)\,,\ \dot{p} = -\frac{\partial H_k}{\partial x}\,(p,x)\,,\quad k = 1,...,\mu.$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что траектории этих гамильтоновых систем определяют экстремальные по времени траектории исходной системы. Для описания инвариантов и симметрий системы (1) в работах [2, 3] введены симметрические функции критических гамильтонианов:

$$S_k(p,x) = (H_1)^k + ... + (H_\mu)^k,\quad k = 1,...,\mu.$$

Функции $S_k : T^*X \to \mathbb{R}$ будем называть символами системы (1). Все S_k являются вещественными аналитическими функциями, если векторные поля f_k аналитичны [2, 3]. Для исследования условий разрешимости задачи стабилизации системы (1) воспользуемся следующей теоремой.

Теорема. (З. Артстейн, [4]) *Стабилизируемость системы (1) с помощью управления с обратной связью $u = u(x)$ класса $C^0(X\setminus\{0\})$ эквивалентна существованию определенно-положительной функции $v(x)$ класса $C^1(X)$, для которой*

$$\inf_{u\in U}\left\langle \nabla v(x), f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x)\right\rangle < 0,\quad \forall x\in X\setminus\{0\}, \tag{3}$$

где $\nabla v(x)$ обозначает градиент функции $v(x)$.

Если система (1) стабилизируема, то по теореме Артстейна условие (3) выполнено для некоторой определённо-положительной функции $v(x)$, т.е. $\inf_{u\in U} h(p,x,u) < 0$ для каждого $x \in X\setminus\{0\}$ при $p = \nabla v(x)$. Поскольку критические гамильтонианы $H_k(p,x)$ соответствуют экстремальным значениям $h(p,x,u)$, то отсюда следует необходимое условие стабилизируемости системы (1):

$$\forall x\in X\setminus\{0\}\ \exists k\le\mu,\ \exists p\in T_x^*X:\ H_k\,(p,x) < 0. \tag{4}$$

В дальнейшем исследуем условия (4) для системы с тремя критическими гамильтонианами.

1. Вычисление критических гамильтонианов. Предположим, что ограничивающее множество $U\subset\mathbb{R}^m$ для системы (1) является треугольником с вершинами $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, ..., u_m^{(j)})$, $(j = 1,2,3)$:

$$U = \mathrm{co}\,\{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\} \subset \mathbb{R}^m,\quad (m\ge 2).$$

Тогда критические гамильтонианы и символы системы (1) имеют вид:

$$H_j(p,x) = \langle p, f_0(x)\rangle + \sum_{k=1}^{m} u_k^{(j)} \langle p, f_k(x)\rangle,$$

$$S_j(p,x) = {H_1}^j(p,x) + {H_2}^j(p,x) + {H_3}^j(p,x), \quad (j = 1,2,3). \tag{5}$$

Если задано инвариантное описание системы (1) с помощью символов S_1, S_2, S_3, то для анализа условия стабилизируемости (4) исследуем вопрос о существовании вещественного решения (H_1, H_2, H_3) с хотя бы одной отрицательной компонентой H_j у следующей системы уравнений:

$$H_1 + H_2 + H_3 = S_1,\ {H_1}^2 + {H_2}^2 + {H_3}^2 = S_2,\ {H_1}^3 + {H_2}^3 + {H_3}^3 = S_3. \tag{6}$$

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема. (О. Перрон, [5, с.5]) *Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ – корни многочлена*

$$H^n + a_1 H^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{7}$$

с вещественными коэффициентами a_1, a_2,..., a_n, и пусть $S_m = H_1^m + H_2^m + \ldots + H_n^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Предположим, что числа $\alpha < \beta$ не являются корнями уравнения (7), и что сигнатуры квадратичных форм

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha S_{\lambda+j-2} - S_{\lambda+j-1})x_\lambda x_j, \quad \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\beta S_{\lambda+j-2} - S_{\lambda+j-1})x_\lambda x_j$$

равны σ_α и σ_β, соответственно. Тогда в интервале (α, β) содержится в точности $\frac{1}{2}(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)$ различных корней уравнения (7).

В случае $\beta = 0$ приведенные выше квадратичные формы имеют вид

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\alpha S_{\lambda+j-2} - S_{\lambda+j-1})\, x_\lambda x_j, \tag{8}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-S_{\lambda+j-1})\, x_\lambda x_j. \tag{9}$$

Будем искать условия, при которых в интервале $(-\infty, 0)$ нет корней уравнения (7), то есть $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ при $\sigma_\alpha \to -\infty$. Очевидно, что если хотя бы один $S_i < 0$, то система (6) либо не имеет решений со всеми вещественными компонентами H_i, либо имеет вещественное решение с хотя бы одной отрицательной компонентой H_i. Будем предполагать, что все $S_i \geq 0$. Запишем матрицы A и B квадратичных форм (8) и (9) при $\alpha \to -\infty$:

$$A = \begin{pmatrix} 3\alpha - S_1 & \alpha S_1 - S_2 & \alpha S_2 - S_3 \\ \alpha S_1 - S_2 & \alpha S_2 - S_3 & \alpha S_3 - S_4 \\ \alpha S_2 - S_3 & \alpha S_3 - S_4 & \alpha S_4 - S_5 \end{pmatrix} = -\alpha \left\{ \begin{pmatrix} -3 & -S_1 & -S_2 \\ -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_2 & -S_3 & -S_4 \end{pmatrix} + o\,(1) \right\},$$

$$B = \begin{pmatrix} -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_2 & -S_3 & -S_4 \\ -S_3 & -S_4 & -S_5 \end{pmatrix},$$

где $-\alpha > 0$. Таким образом, для исследования квадратичной формы (8) при $\alpha \to -\infty$ можно рассматривать матрицу $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -S_1 & -S_2 \\ -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_2 & -S_3 & -S_4 \end{pmatrix}$, и в невырожденном случае сигнатуры σ_α, σ_β определяются с помощью матриц $\tilde{A}$, B: $\sigma_\alpha = \sigma_A = \sigma_{\widetilde{A}}$, $\sigma_\beta = \sigma_B$. Возможны следующие случаи.

1) $H = 0$ не является решением уравнения (7). Приведём квадратичную форму (8) к каноническому виду методом Якоби: $\Delta_1 = -3$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -S_1 \\ -S_1 & -S_2 \end{vmatrix} = 3S_2 - S_1^2 = (H_1 - H_2)^2 + (H_2 - H_3)^2 + (H_1 - H_3)^2 \geq 0.$$

$\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow H_1 = H_2 = H_3$, и в этом случае $H_i > 0 \ \forall \ i = \overline{1,3}$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -S_1 & -S_2 \\ -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_2 & -S_3 & -S_4 \end{vmatrix} = S_2^3 + S_1^2 S_4 - 2S_1S_2S_3 + 3S_3^2 - 3S_2S_4 =$$
$$= -(H_1 - H_2)^2 (H_2 - H_3)^2 (H_1 - H_3)^2 \leq 0.$$

а) $\Delta_3 < 0$. Квадратичная форма имеет вид $\frac{1}{\Delta_1}x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}x_3^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$, $\lambda_i < 0 \forall i = \overline{1,3}$. Следовательно, $\sigma_\alpha = -3$ и $\sigma_\beta = \sigma_\alpha = -3$.

Приведём к каноническому виду квадратичную форму (9): ${\Delta'}_1 = -S_1 < 0$;

$${\Delta'}_2 = \begin{vmatrix} -S_1 & -S_2 \\ -S_2 & -S_3 \end{vmatrix} = S_1 S_3 - S_2^2;$$

$${\Delta'}_3 = \begin{vmatrix} -S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_2 & -S_3 & -S_4 \\ -S_3 & -S_4 & -S_5 \end{vmatrix} = S_1S_3S_5 + S_2S_3S_4 - S_3^3 - S_2^2 S_5 - S_1 S_4^2.$$

Канонический вид квадратичной формы (9): $\frac{1}{{\Delta'}_1}x_1^2 + \frac{{\Delta'}_1}{{\Delta'}_2}x_2^2 + \frac{{\Delta'}_2}{{\Delta'}_3}x_3^2 = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2$. $\sigma_\beta = -3$, следовательно,

$$\begin{cases} \mu_1 < 0; \\ \mu_2 < 0; \\ \mu_3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{{\Delta'}_1} < 0; \\ \frac{{\Delta'}_1}{{\Delta'}_2} < 0; \\ \frac{{\Delta'}_2}{{\Delta'}_3} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {\Delta'}_1 < 0; \\ {\Delta'}_2 > 0; \\ {\Delta'}_3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S_1 > 0; \\ S_1S_3 - S_2^2 > 0; \\ S_1S_3S_5 + 2S_2S_3S_4 - S_2^2S_5 - S_1S_4^2 - S_3^3 < 0. \end{cases}$$

Выразив S_4 и S_5 через S_1, S_2, S_3, получаем

$$S_4 = \frac{1}{2}S_2^2 + \frac{1}{6}S_1^4 + \frac{4}{3}S_1S_3 - S_1^2S_2,$$
$$S_5 = \frac{1}{12}S_1^5 + \frac{5}{6}S_2S_3 + \frac{1}{2}S_1S_4 + \frac{1}{6}S_1^2S_3 - \frac{1}{3}S_1^3S_2 - \frac{1}{4}S_1S_2^2,$$

и третье условие принимает вид

$$-S_1^9 + 6S_2^3S_3 - 9S_1S_2^4 - 10S_1^6S_3 + 12S_1^7S_2 - 34S_1^3S_3^2 - 36S_3^2 - 48S_1^5S_2^2 + 66S_1^3S_2^3 +$$
$$+78S_1^4S_2S_3 + 126S_1S_2S_3^2 - 150S_1^2S_2^2S_3 < 0.$$

Кроме того, с учётом полученного выражения для S_4,

$$\Delta_3 = \frac{1}{6}\left(S_1^6 - 3S_2^3 + 18S_3^2 - 9S_1^4S_2 + 8S_1^3S_3 + 21S_1^2S_2^2 - 36S_1S_2S_3\right).$$

b) $\Delta_3 = 0$. Тогда $\exists i \neq j \left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3}\right) : H_i = H_j$. Пусть для определённости $H_3 = H_2$. Тогда получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} H_1 + 2H_2 = S_1, \\ H_1^2 + 2H_2^2 = S_2, \\ H_1^3 + 2H_2^3 = S_3. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$H_1 = \frac{1}{3}S_1 \pm \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{3S_2 - S_1^2}, H_2 = \frac{1}{3}S_1 \mp \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{3S_2 - S_1^2}.$$

Найдём, при каких условиях найденные H_1, H_2 удовлетворяют третьему уравнению системы.

Если $H_1 = \frac{1}{3}S_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3S_2 - S_1^2}$, $H_2 = \frac{1}{3}S_1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{3S_2 - S_1^2}$, то условие разрешимости имеет вид $4S_1^3 - \sqrt{2}\left(3S_2 - S_1^2\right)^{\frac{3}{2}} - 18S_1S_2 + 18S_3 = 0$. При этом $H_1 > 0$; $H_2 < 0$ при выполнении условия $S_1^2 < S_2$.

Если $H_1 = \frac{1}{3}S_1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3S_2 - S_1^2}$, $H_2 = \frac{1}{3}S_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{3S_2 - S_1^2}$, то условие разрешимости имеет вид $4S_1^3 + \sqrt{2}\left(3S_2 - S_1^2\right)^{\frac{3}{2}} - 18S_1S_2 + 18S_3 = 0$. При этом $H_2 > 0$; $H_1 < 0$ при выполнении условия $S_1^2 < 2S_2$.

2) Осталось рассмотреть случай, когда $H = 0$ является решением уравнения (7), то есть $H_i = 0$ для некоторого $i = 1, 2, 3$. Очевидно, что уравнение (7) может иметь только один нулевой корень, так как в противном случае нет отрицательных корней. Из того, что $H_1H_2H_3 = \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{6}S_1^3 - \frac{1}{2}S_1S_2$ следует условие существования нулевых корней системы (6): $S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 = 0 \Leftrightarrow \exists H_i = 0, i = \overline{1,3}$. Тогда условие разрешимости системы имеет вид $S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 = 0$, а условие существования отрицательных корней – $S_1^2 < S_2$.

Обобщая все найденные условия, получаем следующий результат: для существования отрицательных корней системы (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия разрешимости

1. $S_2 > 0$,
2. $S_1^2 < 3S_2$;

и одно из следующих условий:

1. $(S_1 \leq 0) \cup (S_3 \leq 0)$,
2. $\begin{cases} S_i > 0,\ \forall i = \overline{1,3}, \\ 1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 = 0, \\ S_1^2 < S_2; \end{cases}$

3. $$\begin{cases} S_i > 0,\ \forall i = \overline{1,3}, \\ S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 \neq 0, \\ S_1^6 - 3S_2^3 + 18S_3^2 - 9S_1^4S_2 + 8S_1^3S_3 + 21S_1^2S_2^2 - 36S_1S_2S_3 = 0, \\ 4S_1^3 - \sqrt{2}\big(3S_2 - S_1^2\big)^{\frac{3}{2}} - 18S_1S_2 + 18S_3 = 0, \\ S_1^2 < S_2; \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} S_i > 0,\ \forall i = \overline{1,3}, \\ S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 \neq 0, \\ S_1^6 - 3S_2^3 + 18S_3^2 - 9S_1^4S_2 + 8S_1^3S_3 + 21S_1^2S_2^2 - 36S_1S_2S_3 = 0, \\ 4S_1^3 + \sqrt{2}\big(3S_2 - S_1^2\big)^{\frac{3}{2}} - 18S_1S_2 + 18S_3 = 0, \\ S_1^2 < 2S_2; \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} S_i > 0,\ \forall i = \overline{1,3}, \\ S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 \neq 0, \\ S_1^6 - 3S_2^3 + 18S_3^2 - 9S_1^4S_2 + 8S_1^3S_3 + 21S_1^2S_2^2 - 36S_1S_2S_3 < 0, \\ S_1S_3 - S_2^2 \leq 0; \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} S_i > 0,\ \forall i = \overline{1,3}, \\ S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 \neq 0, \\ S_1^6 - 3S_2^3 + 18S_3^2 - 9S_1^4S_2 + 8S_1^3S_3 + 21S_1^2S_2^2 - 36S_1S_2S_3 < 0, \\ -S_1^9 + 6S_2^3S_3 - 9S_1S_2^4 - 10S_1^6S_3 + 12S_1^7S_2 - 34S_1^3S_3^2 - 36S_3^2 - 48S_1^5S_2^2 + \\ +66S_1^3S_2^3 + 78S_1^4S_2S_3 + 126S_1S_2S_3^2 - 150S_1^2S_2^2S_3 \geq 0. \end{cases}$$

2. Стабилизация системы с тремя критическими гамильтонианами. Рассмотрим систему уравнений Эйлера с управлением (см., напр. [5]):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{A_2 - A_3}{A_1} x_2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= \tfrac{A_3 - A_1}{A_2} x_1x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= \tfrac{A_1 - A_2}{A_3} x_2x_3 + u_3, \end{aligned} \tag{10}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3) \in \Omega$,

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = \lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \lambda_3 v^{(3)}, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1\}. \tag{11}$$

Вопросам исследования задачи управляемости и стабилизации системы вида (10) посвящено множество работ, в частности, в работах [6], [7] рассматривалась задача стабилизации системы с одним управлением, в [8] – с двумя управлениями, в [9] – с тремя.

В данной работе к исследованию системы (10) применяется теория критических гамильтонианов. Вычислим гамильтониан и критические гамильтонианы (2) системы (10) при $p = (A_1x_1, A_2x_2, A_3x_3)$:

$$h\,(p, x, u) = \langle p, f\,(x, u)\rangle = A_1x_1u_1 + A_2x_2u_2 + A_3x_3u_3. \tag{12}$$

В силу того, что ограничивающее множество Ω имеет вид (11), критические гамильтонианы для системы (10) можно записать следующим образом:

$$H_i = A_1 x_1 v_1^{(i)} + A_2 x_2 v_2^{(i)} + A_3 x_3 v_3^{(i)} = \left\langle x, e^{(i)} \right\rangle. \qquad (13)$$

Здесь $\left(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}\right)$ – координаты i-й вершины множества Ω,

$$e^{(i)} = \left(A_1 v_1^{(i)}, A_2 v_2^{(i)}, A_3 v_3^{(i)}\right).$$

Утверждение 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1. *векторы* $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ *компланарны;*
2. $\left\langle e^{(2)}, e^{(3)} \right\rangle \geq 0$, $\left\langle e^{(1)}, e^{(2)} \right\rangle \leq 0$, $\left\langle e^{(1)}, e^{(3)} \right\rangle \leq 0$*;*
3. $\angle\left(e^{(1)}, e^{(2)}\right) + \angle\left(e^{(1)}, e^{(3)}\right) = \angle\left(e^{(2)}, e^{(3)}\right)$.

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad \exists i = \overline{1,3}: \quad H_i \leq 0.$

Доказательство. Для вектора $x \neq 0$ возможны следующие варианты расположения:

1. $\angle\left(x, e^{(2)}\right) - \angle\left(x, e^{(3)}\right) = -\angle\left(e^{(2)}, e^{(3)}\right)$, $\left\langle x, e^{(2)} \right\rangle > 0$, $\left\langle x, e^{(3)} \right\rangle < 0$;
2. $\angle\left(x, e^{(1)}\right) - \angle\left(x, e^{(3)}\right) = -\angle\left(e^{(1)}, e^{(3)}\right)$, $\left\langle x, e^{(1)} \right\rangle > 0$, $\left\langle x, e^{(3)} \right\rangle < 0$;
3. $\angle\left(x, e^{(1)}\right) - \angle\left(x, e^{(2)}\right) = -\angle\left(e^{(1)}, e^{(2)}\right)$, $\left\langle x, e^{(1)} \right\rangle > 0$, $\left\langle x, e^{(2)} \right\rangle < 0$;
4. $\angle\left(x, e^{(3)}\right) - \angle\left(x, e^{(2)}\right) = -\angle\left(e^{(2)}, e^{(3)}\right)$, $\left\langle x, e^{(2)} \right\rangle < 0$, $\left\langle x, e^{(3)} \right\rangle > 0$;
5. $\angle\left(x, e^{(3)}\right) - \angle\left(x, e^{(1)}\right) = -\angle\left(e^{(1)}, e^{(3)}\right)$, $\left\langle x, e^{(1)} \right\rangle < 0$, $\left\langle x, e^{(3)} \right\rangle > 0$;
6. $\angle\left(x, e^{(2)}\right) - \angle\left(x, e^{(1)}\right) = -\angle\left(e^{(1)}, e^{(2)}\right)$, $\left\langle x, e^{(1)} \right\rangle < 0$, $\left\langle x, e^{(2)} \right\rangle < 0$.

Рассмотрим эти случаи.
1)$\angle\left(x, e^{(2)}\right) + \left(\pi - \angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) = \pi - \angle\left(e^{(2)}, e^{(3)}\right)$ и $\left\langle x, e^{(2)} \right\rangle > 0$, $\left\langle x, e^{(3)} \right\rangle < 0$.
Тогда

$$\cos\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right) - \angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) = \cos\left(\angle\left(e^{(2)}, e^{(3)}\right)\right) = \frac{\left\langle e^{(2)}, e^{(3)} \right\rangle}{\left|e^{(2)}\right| \left|e^{(3)}\right|}$$

и, по условию утверждения, $\cos\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right) - \angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) \leq 0$. Отсюда

$$\cos\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right)\right) \cdot \cos\left(\angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) + \sin\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right)\right) \cdot \sin\left(\angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) \leq 0.$$

Но $\sin\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right)\right) \cdot \sin\left(\angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) > 0$, значит

$$\cos\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right)\right) \cdot \cos\left(\angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) \leq 0,$$

или $\frac{\langle x,e^{(2)}\rangle\cdot\langle x,e^{(3)}\rangle}{|x|^4\left|e^{(2)}\right|^2\left|e^{(3)}\right|^2} \le 0 \Leftrightarrow \left\langle x,e^{(2)}\right\rangle \cdot \left\langle x,e^{(3)}\right\rangle \le 0 \Leftrightarrow H_2 \cdot H_3 \le 0$. Таким образом, либо $H_2 \le 0$, либо $H_3 \le 0$. Следовательно, $\exists H_i \le 0$. Аналогичным образом рассматриваются случаи 2) – 6). $\square$

Замечание. Условие 1) в утверждении опустить нельзя, так как в противном случае определитель системы (12) отличен от нуля, и, по правилу Крамера, для любого набора H_i найдётся решение $x \in \mathbb{R}^3$. В частности, если все $H_i > 0,\ i = \overline{1,3}$, то найдётся ненулевое решение $x \in \mathbb{R}^3$.

3. Достаточные условия стабилизируемости твёрдого тела с ограничением на управление. Найдём функцию $u = u\,(x) \in \Omega$ такую, что решение $x = 0$ системы (10) с $u = u\,(x)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. Определим следующие множества:

$$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} : H_1\,(x) \le 0\right\},$$
$$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} : (H_1\,(x) > 0) \cap (H_2\,(x) \le 0)\right\},$$
$$M_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} : (H_1\,(x) > 0) \cap (H_2\,(x) > 0)\right\}.$$

Заметим, что если выполняются условия утверждения 1, то $\bigcup\limits_{i=1}^{3} M_i = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $M_i \cap M_j = \varnothing$, и если $x \in M_3$, то $H_3\,(x) \le 0$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия утверждения 1, все A_1, A_2, A_3 различны, и пусть функция $u\,(x) : \mathbb{R}^3 \to \Omega$, имеет вид:*

$$u = \begin{cases} -g\,(x) \cos\left(\angle\left(x, e^{(1)}\right)\right) v^{(1)}, \quad x \in M_1; \\ -g\,(x) \cos\left(\angle\left(x, e^{(1)}\right)\right) \cos\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right)\right) v^{(2)},\ x \in M_2; \\ -g\,(x) \cos\left(\angle\left(x, e^{(1)}\right)\right) \cos\left(\angle\left(x, e^{(2)}\right)\right) \cos\left(\angle\left(x, e^{(3)}\right)\right) v^{(3)},\ x \in M_3; \\ 0, \qquad x = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $g\,(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. *$g \in C^0\left(\mathbb{R}^3\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}\right)$;*
2. *$0 \le g\,(x) \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^3$;*
3. *$g\,(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$.*

Тогда нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем, что для системы (10) с управлением вида (14) существует определенно-положительная функция $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая условиям:

1. $V\,(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$;
2. $\dot V\,(x) \le 0$;
3. множество $M = \left\{x :\ \dot V\,(x) = 0\right\}$ не содержит целых полутраекторий, кроме $x = 0$.

Тогда, по теореме Барбашина-Красовского [10], следует, что нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво. В качестве $V(x)$ возьмём определенно-положительную функцию

$$V(x)=\frac{1}{2}\left(A_1x_1^2+A_2x_2^2+A_3x_3^2\right).$$

Тогда производная этой функции в силу системы (10) имеет вид

$$\dot V=\frac{d}{dt}V(x(t))=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{dt}=(\nabla V(x),f(x))=\sum_{i=1}^{3}A_ix_iu_i. \tag{15}$$

Очевидно, что $V(x)$ удовлетворяет условию 1). Докажем, что она удовлетворяет также и условиям 2) – 3).

2) Проверим, что $\dot V(x)\le 0$.

Сравнивая (12) и (15) видим, что

$$\dot V(x)\le 0\Leftrightarrow h(x,p,u)\le 0\Leftrightarrow \lambda_1H_1+\lambda_2H_2+\lambda_3H_3\le 0.$$

Функции $\lambda_i(x)$ $(i=1,2,3)$ получаем из представления функции (13) в виде

$$u(x)=\lambda_1(x)v^{(1)}+\lambda_2(x)v^{(2)}+\lambda_3(x)v^{(3)}, \text{т.е.}$$

$$\lambda_1(x)=\begin{cases}-g(x)\cos\left(\angle\left(x,e^{(1)}\right)\right), & \text{если } x\in M_1;\\ 0, & \text{если } x\notin M_1;\end{cases}$$

$$\lambda_2(x)=\begin{cases}-g(x)\cos\left(\angle\left(x,e^{(1)}\right)\right)\cos\left(\angle\left(x,e^{(2)}\right)\right), & \text{если } x\in M_2;\\ 0, & \text{если } x\notin M_2;\end{cases}$$

$$\lambda_3(x)=\begin{cases}-g(x)\cos\left(\angle\left(x,e^{(1)}\right)\right)\cos\left(\angle\left(x,e^{(2)}\right)\right)\cos\left(\angle\left(x,e^{(3)}\right)\right), & \text{если } x\in M_3;\\ 0, & \text{если } x\notin M_3.\end{cases}$$

Заметим, что $0<\lambda_i\le 1$ $(i=1,2,3)$, $u(x)$ – непрерывно дифференцируема, $u(x)\in\Omega$.

Таким образом,

$$\dot V(x)=\begin{cases}\frac{-g(x)}{|x|\left|e^{(1)}\right|}\left(x,e^{(1)}\right)^2, & \text{если } x\in M_1;\\ \frac{-g(x)}{|x|^2\left|e^{(1)}\right|\left|e^{(2)}\right|}\left(x,e^{(1)}\right)\left(x,e^{(2)}\right)^2, & \text{если } x\in M_2;\\ \frac{-g(x)}{|x|^3\left|e^{(1)}\right|\left|e^{(2)}\right|\left|e^{(3)}\right|}\left(x,e^{(1)}\right)\left(x,e^{(2)}\right)\left(x,e^{(3)}\right)^2, & \text{если } x\in M_3;\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Следовательно, $\dot V(x)\le 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}^3$ и условие 2) выполнено.

3) Проверим, что множество $M=\left\{x:\ \dot V(x)=0\right\}$ не содержит целых полутраекторий, кроме $x=0$. Предположим противное: пусть

$$\exists\tilde x\in M,\tilde x\ne 0:\ x(t,\tilde x)\in M,\forall t\ge 0. \tag{16}$$

Пусть для определённости $\tilde{x} \in M_1$. Тогда $\dot{V}(x) = \frac{-g(x)}{|x||e^{(1)}|}\left(x, e^{(1)}\right)^2$ и, так как $x \neq 0$, то $\left(x, e^{(1)}\right) \equiv 0$, $\forall t$. Заметим, что в этом случае $u(x) \equiv 0$. Дважды дифференцируя тождество $\left(x, e^{(1)}\right) \equiv 0$, получим $\left(\dot{x}, e^{(1)}\right) = \left(f, e^{(1)}\right) = 0$ и $\left(\ddot{x}, e^{(1)}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} f, e^{(1)}\right) = 0$.

Таким образом, имеем следующую систему уравнений:

$$A_1 v_1^{(1)} x_1 + A_2 v_2^{(1)} x_2 + A_3 v_3^{(1)} x_3 = 0, \tag{17}$$

$$v_1^{(1)}(A_2 - A_3) x_2 x_3 + v_2^{(1)}(A_3 - A_1) x_1 x_3 + v_3^{(1)}(A_1 - A_2) x_1 x_2 = 0, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}(A_2 - A_3) v_1^{(1)} x_1 \left(\frac{A_1 - A_2}{A_3} x_2^2 + \frac{A_3 - A_1}{A_2} x_3^2\right) + (A_3 - A_1) v_2^{(1)} x_2 \left(\frac{A_2 - A_3}{A_1} x_3^2 + \right. \\ \left. + \frac{A_1 - A_2}{A_3} x_1^2\right) + (A_1 - A_2) v_3^{(1)} x_3 \left(\frac{A_2 - A_3}{A_1} x_2^2 + \frac{A_3 - A_1}{A_2} x_1^2\right) = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Согласно свойству (16), система (17)–(19) должна быть разрешима относительно x, и кроме того, все компоненты вектора x отличны от нуля (так как если есть хотя бы одна нулевая координата x_i, то $x = 0$ в силу системы (17)–(19)). Из уравнения (19) получаем:

$$\begin{gathered}(A_2 - A_3) v_1^{(1)} x_1 \left(\frac{A_3 - A_1}{A_2} x_3^2 + \frac{A_1 - A_2}{A_3} x_2^2\right) + (A_3 - A_1)(A_1 - A_2) x_1^2 \left(\frac{v_2^{(1)} x_2}{A_3} + \right. \\ \left. + \frac{v_3^{(1)} x_3}{A_2}\right) + x_2 x_3 \frac{A_2 - A_3}{A_1} \left((A_1 - A_2) v_3^{(1)} x_2 + (A_3 - A_1) v_2^{(1)} x_3\right) = 0.\end{gathered}$$

Из (18) вытекает:

$$x_2 x_3 = -\frac{x_1 \left((A_3 - A_1) v_2^{(1)} x_3 + (A_1 - A_2) v_3^{(1)} x_2\right)}{(A_2 - A_3) v_1^{(1)}},$$

$$\begin{gathered}(A_2 - A_3) v_1^{(1)} x_1 \left(\frac{A_3 - A_1}{A_2} x_3^2 + \frac{A_1 - A_2}{A_3} x_2^2\right) + (A_3 - A_1)(A_1 - A_2) x_1^2 \times \\ \times \left(\frac{v_2^{(1)} x_2}{A_3} + \frac{v_3^{(1)} x_3}{A_2}\right) - \frac{x_1 \left((A_3 - A_1) v_2^{(1)} x_3 + (A_1 - A_2) v_3^{(1)} x_2\right)^2}{A_1 v_1^{(1)}} = 0.\end{gathered}$$

Используя уравнение (17), получим такие соотношения:

$$x_1 = -\frac{A_2 v_2^{(1)} x_2 + A_3 v_3^{(1)} x_3}{A_1 v_1^{(1)}},$$

$$(A_2-A_3)\,v_1^{(1)}\left(\frac{A_3-A_1}{A_2}x_3^2+\frac{A_1-A_2}{A_3}x_2^2\right)-\frac{A_2v_2^{(1)}x_2+A_3v_3^{(1)}x_3}{A_1v_1^{(1)}}\,(A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\times$$
$$\times\left(\frac{v_2^{(1)}x_2}{A_3}+\frac{v_3^{(1)}x_3}{A_2}\right)-\frac{\Big((A_3-A_1)\,v_2^{(1)}x_3+(A_1-A_2)\,v_3^{(1)}x_2\Big)^2}{A_1v_1^{(1)}}=0,$$
$$\Big((A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\,A_3^2v_3^{(1)^2}-A_2A_3(A_3-A_1)^2v_2^{(1)^2}+$$
$$+(A_2-A_3)\,(A_3-A_1)\,A_1A_3v_1^{(1)^2}\Big)\,x_3^2+\Big((A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\,A_2^2v_2^{(1)^2}-$$
$$-A_2A_3(A_1-A_2)^2v_3^{(1)^2}+(A_2-A_3)\,(A_1-A_2)\,A_1A_2v_1^{(1)^2}\Big)\,x_2^2+$$
$$+4\,(A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\,A_2A_3v_2^{(1)}v_3^{(1)}x_2x_3=0.$$

Сделаем следующие замены:

$$a_1=-\,(A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\,A_3^2v_3^{(1)^2}-A_2A_3(A_3-A_1)^2v_2^{(1)^2}+$$
$$+(A_2-A_3)\,(A_3-A_1)\,A_1A_3v_1^{(1)^2},$$
$$c_1=-\,(A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\,A_2^2v_2^{(1)^2}-A_2A_3(A_1-A_2)^2v_3^{(1)^2}+$$
$$+(A_2-A_3)\,(A_1-A_2)\,A_1A_2v_1^{(1)^2},$$
$$b_1=-4\,(A_3-A_1)\,(A_1-A_2)\,A_2A_3v_2^{(1)}v_3^{(1)},\ \tau=\frac{x_3}{x_2}.$$

Тогда получаем квадратное уравнение:

$$a_1\tau^2-b_1\tau+c_1=0. \tag{20}$$

С другой стороны, аналогичным образом из (18) и (19) получаем

$$a_2\tau^2-b_2\tau+c_2=0, \tag{21}$$

где

$$a_2=A_3\,(A_3-A_1)\,v_2^{(1)}v_3^{(1)},\ c_2=A_2\,(A_1-A_2)\,v_2^{(1)}v_3^{(1)},$$
$$b_2=A_1\,(A_2-A_3)\,v_1^{(1)^2}-A_2\,(A_3-A_1)\,v_2^{(1)^2}-A_3\,(A_1-A_2)\,v_3^{(1)^2}.$$

Следовательно, система (17)–(19) разрешима тогда и только тогда, когда уравнения (20) и (21) имеют хотя бы один общий корень, а это, в свою очередь, эквивалентно условию $4a_1^2a_2^2D_1D_2=\Big(a_2^2D_1+a_1^2D_2-(a_2b_1-a_1b_2)^2\Big)^2$. Таким образом, при

$$4a_1^2a_2^2D_1D_2\neq\Big(a_2^2D_1+a_1^2D_2-(a_2b_1-a_1b_2)^2\Big)^2$$

система (17)–(19) неразрешима относительно x, а это приводит к противоречию с условием (16). Аналогично доказывается, что M не содержит целых траекторий при $x \in M_1$ и $x \in M_2$. Следовательно, условие 3) доказано. Таким образом, все условия теоремы Барбашина-Красовского выполнены и нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво. $\square$

Заключение. В результате исследования задачи стабилизации положения равновесия системы уравнений Эйлера (10) с управлением построена функция обратной связи (13), значения которой принадлежат множеству в виде треугольника (11), при этом нулевое решение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову. Дальнейший интерес представляет исследование задачи стабилизации с более общими ограничениями на вектор управления, а также рассмотрение дополнительных кинематических уравнений, определяющих ориентацию твёрдого тела.

Работа частично поддержана грантом НАН Украины для молодых ученых.

1. *Jakubczyk B., Zuyev A.* Stabilizability conditions in terms of critical Hamiltonians and symbols // Systems and Control Letters. – 2005. – Vol.54. – P.597-606.
2. *Jakubczyk B.* Critical Hamiltonians and Feedback Invariants // Geometry of Feedback and Optimal Control: (B. Jakubczyk, W. Respondek eds.) – New York: Marcel Dekker, 1998. – P.219-256.
3. *Jakubczyk B.* Symmetries of nonlinear control systems and their symbols // Geometric control and non-holonomic mechanics: (V. Jurdjevic et al. eds.) – Providence, RI: AMS, 1998. – P.183-198.
4. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. – 1983. – Vol.7. – No.11. – P.1163-1173.
5. *Perron O.* Algebra. II: Theorie der algebraischen Gleichungen. – Berlin: W. de Gruyter & Co., 1933. – 261с.
6. *Аграчёв А.А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. – М.: Физматлит, 2005. – 392с.
7. *Ковалёв А.М., Исса Салем Абдалла* Стабилизация равномерных вращений твёрдого тела вокруг главной оси // Прикладная механика. – 1992. – Т.28 (38). – №9. – С.73-79.
8. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1991. – 288с.
9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496с.
10. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240с.

Донецкий национальный ун-т
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
v_grushkovskaya@mail.ru

Получено 29.10.09