УДК 517.9:532

©2009. **О.А. Андронова**

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

Рассматриваются три задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии: задача сопряжения математической физики с поверхностной диссипацией энергии, соответствующая абстрактная проблема и их обобщение в виде многокомпонентных задач сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. Каждая из этих задач приводит к изучению одного и того же линейного пучка операторов, действующего в соответственно подобранном гильбертовом пространстве. Свойства операторных коэффициентов этого пучка для всех трех задач идентичны и изучены ранее при рассмотрении начально-краевых задач с поверхностной диссипацией энергии.

Введение. Следует отметить, что ранее автором данной работы и Копачевским Н.Д. была исследована начально-краевая и спектральная задачи с поверхностной диссипацией энергии (см. [1], [2]). Изучение задач сопряжения с поверхностной диссипацией энергии связано с интересом рассмотрения диссипативных систем и с публикацией [3], посвященной исследованию подобных задач.

1. Задачи сопряжения математической физики с поверхностной диссипацией энергии. Ниже в пунктах 2–5 рассматривается первая из описанных выше задач, а именно спектральная проблема, порожденная стыковыми задачами сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. Формулируется соответствующая проблема, описываются простейшие свойства решений. В следующих пунктах будет исследоваться обобщение этой задачи. Таким образом, все полученные результаты для более общей проблемы будут справедливы для задачи сопряжения математической физики с поверхностной диссипацией энергии.

2. Постановка задачи. Пусть области Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$ пристыковываются друг к другу и имеют липшицевы границы. Пусть Γ – граница стыковки двух областей. Обозначим через $S_i = \partial\Omega_i \backslash \Gamma$, $i = 1, 2$, свободные границы областей Ω_i.

Рассмотрим начально-краевую задачу в областях Ω_1 и Ω_2:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \triangle u_i = f_i \quad (\text{в}\, \Omega_i)\,, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

при краевых условиях

$$u_i = 0 \quad (\text{на}\, S_i)\,, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

и условиях сопряжения

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} + u_1 + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial t} = \psi \quad (\text{на}\, \Gamma)\,,\ \alpha > 0. \tag{3}$$

Здесь $\vec{n}$ – орт нормали к Γ, направленный из Ω_1 в Ω_2. Особенностью задачи является наличие параметра α в граничном условии при первой производной по времени. Он характеризует изменение поверхностной диссипации энергии на общей границе Γ. Соответствующее слагаемое $\alpha(\partial u_1/\partial t)_\Gamma$ при $\alpha > 0$ порождает поверхностную диссипацию полной энергии динамической системы.

3. Формулы Грина для задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. Заметим, что для гладких функций

$$u_i \in C^2(\overline{\Omega_i}), \quad v_i \in C^1(\overline{\Omega_i}), \quad i = 1, 2,$$

удовлетворяющих условию $v_1 = v_2$ (на Γ) и условиям (2), справедливы формулы Грина:

$$-\int\limits_{\Omega_1} \triangle u_1\, v_1\, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1\, d\Omega_1 - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n}\, v_1\, d\Gamma,$$

$$-\int\limits_{\Omega_2} \triangle u_2\, v_2\, d\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2\, d\Omega_2 + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial n}\, v_2\, d\Gamma. \quad (4)$$

Складывая эти формулы Грина, получим соотношение

$$\sum_{n=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} (-\triangle u_i)\, v_i\, d\Omega_i = \sum_{n=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, d\Omega_i -$$

$$- \left\{ \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n}\, v_1\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial n}\, v_2\, d\Gamma \right\}. \quad (5)$$

Добавим к правой части и отнимем выражение $\int\limits_{\Gamma} u_1\, v_1\, d\Gamma$. Сгруппировав слагаемые, получим формулу Грина в виде:

$$\sum_{n=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} (-\triangle u_i)\, v_i\, d\Omega_i = \left\{ \sum_{n=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \nabla u_i\, \nabla v_i\, d\Omega_i + \int\limits_{\Gamma} u_1 v_1\, d\Gamma \right\} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial n} + u_1 \right) v_1\, d\Gamma, \quad (6)$$

которая является формулой Грина для задачи сопряжения математической физики с поверхностной диссипацией энергии.

4. Основные функциональные пространства. Введем в рассмотрение функциональные пространства, необходимые для исследования задачи.

Это пространство $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} := L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2).$$

Пространство

$$F := \left\{ u = (u_1; u_2),\, u_i \in H^1(\Omega_i),\, i = 1, 2,\; u_i = 0 \;(\text{на}\, S_i)\,,\; u_1 = u_2 \;(\text{на}\, \Gamma) \right\},$$

с нормой, определенной по закону

$$\|u\|_F^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2\, d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma} |u_1|^2\, d\Gamma. \quad (7)$$

А также пространство $G := L_2(\Gamma)$, в котором скалярное произведение имеет вид

$$(\varphi, \psi)_\Gamma := \int\limits_\Gamma \varphi\bar{\psi}\, d\Gamma, \quad \varphi, \psi \in L_2(\Gamma). \tag{8}$$

5. Простейшие свойства решений спектральной задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. При отыскании решений u_i однородной ($f_i = 0$, $\psi = 0$) задачи (1)–(3) с зависимостью от времени по закону $e^{-\lambda t}$ приходим к спектральной задаче сопряжения с поверхностной диссипацией энергии

$$\lambda^2 u_i - \triangle u_i = 0 \quad (\text{в}\,\Omega_i)\,, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$u_i = 0 \quad (\text{на}\,S_i)\,, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} + u_1 - \alpha\lambda u_1 = 0 \quad (\text{на}\,\Gamma)\,,\, \alpha > 0. \tag{11}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр.

Заметим, что для решений этой задачи искомые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ совпадают на "границе стыковки" Γ, в то время как их нормальные производные терпят разрыв.

Получим некоторые свойства решений задачи (9)–(11). Домножим уравнение (9) для функции u_i, $i = 1, 2$ на $\bar{u}_i$, $i = 1, 2$ и проинтегрируем каждое по области Ω_i, $i = 1, 2$ соответственно. Далее, применим к каждому равенству формулу Грина для оператора Лапласа. Складывая левые и правые части полученных равенств и используя первое условие в (11), получим

$$\lambda^2 \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} |u_k|^2\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2\, d\Omega_k - \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \bar{u}_1\, d\Gamma = 0. \tag{12}$$

Использование второго условия в (11) приводит к соотношению

$$\lambda^2 \left\{ \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} |u_k|^2\, d\Omega_k \right\} - \alpha\lambda \int\limits_\Gamma |u_1|^2\, d\Gamma + \\ + \left\{ \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2\, d\Omega_k + \int\limits_\Gamma |u_1|^2\, d\Gamma \right\} = 0. \tag{13}$$

Вспоминая введенные в пункте 4 нормы и скалярные произведения в пространствах $\mathcal{H}$, F, G, последнее равенство запишем в следующей форме:

$$\lambda^2 \|u\|^2_{\mathcal{H}} - \alpha\lambda \|\gamma u\|^2_G + \|u\|^2_F = 0. \tag{14}$$

Далее будем считать, что параметр диссипации α является неотрицательным и может принимать, в частности, значения $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$. Опишем простейшие свойства решений спектральной задачи (9)–(11).

1^0. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением спектральных задач.

2^0. При $\alpha > 0$ все собственные значения задачи расположены в правой комплексной полуплоскости.

В самом деле, пусть λ – собственное значение и u – соответствующий собственный элемент, тогда из (14) имеем

$$\lambda\|u\|^2_{\mathcal{H}} - \alpha\|\gamma u\|^2_G + \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}\|u\|^2_F = 0.$$

Отсюда следует равенство:

$$\mathrm{Re}\lambda\, \|u\|^2_{\mathcal{H}} - \alpha\|\gamma u\|^2_G + \frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|^2}\, \|u\|^2_F = 0. \qquad (15)$$

Из последнего равенства получаем:

$$\mathrm{Re}\lambda = \frac{\alpha\|\gamma u\|^2_G}{\|u\|^2_{\mathcal{H}} + |\lambda|^{-2}\, \|u\|^2_F} \geqslant 0. \qquad (16)$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = i\omega$, $\omega \neq 0 \in \mathbb{R}$ – чисто мнимое число, т.е. $\mathrm{Re}\lambda = 0$. Тогда из (15) имеем

$$\alpha\lambda\|\gamma u\|^2_G = 0.$$

Из последнего соотношения и (9)–(11) при $\alpha > 0$ следует, что $u_k = 0$, $(k = 1, 2)$. Следовательно, числа вида $\lambda = i\omega$, $\omega \neq 0 \in \mathbb{R}$ не являются собственными значениями задачи (9)–(11).

Таким образом, свойство 2^0 установлено.

3^0. При $\alpha = 0$ спектр задачи находится на мнимой оси (гиперболический случай).

4^0. Пусть α формально равно $+\infty$, т.е. рассматриваются предельные задачи

$$-\triangle u_i = \lambda^2 u_i \ (\text{в } \Omega_i),\ u_i = 0 \ (\text{на } \partial\Omega_i),\ i = 1, 2, \qquad (17)$$

вместо (9)–(11).

Отсюда следует, что при $\alpha \to +\infty$ задача (9)–(11) распадается на две задачи (17) с условиями Дирихле на $\partial\Omega_i$. В этом случае спектр задачи (17) находится на мнимой оси.

6. Абстрактные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. В пунктах 7–10 рассматривается абстрактный аналог задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии, сформулированной в пункте 2. Описывается метод исследования, который позволяет привести исходную задачу к эквивалентной спектральной проблеме для линейного операторного пучка в соответствующем гильбертовом пространстве. Базой для изучения этой проблемы является абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, введенная в [4], [5].

7. Формулировка задач. Будем считать, что заданы гильбертовы пространства E_1, F_1, G и оператор следа $\gamma_1 : F_1 \to G_+ \subset G$, для которых справедлива абстрактная формула Грина

$$\langle \eta_1, L_1 u_1 \rangle_{E_1} = (\eta_1, u_1)_{F_1} - \langle \gamma_1 \eta_1, \partial_1 u_1 \rangle_G, \qquad \forall \eta_1 \in F_1,\ \forall u_1 \in F_1. \qquad (18)$$

Пусть также заданы гильбертовы пространства E_2, F_2, G и оператор следа $\gamma_2 : F_2 \to G_+ \subset G$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина:

$$\langle \eta_2, L_2 u_2 \rangle_{E_2} = (\eta_2, u_2)_{F_2} - \langle \gamma_2 \eta_2, \partial_2 u_2 \rangle_G, \qquad \forall \eta_2 \in F_2, \forall u_2 \in F_2. \tag{19}$$

Формулировка абстрактной задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии, обобщающая задачу (1)–(3), имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + L_i u_i = f_i \quad (\text{в } E_i\,), \tag{20}$$

$$\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 \quad (\text{в } G\,), \tag{21}$$

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \gamma_1 u_1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \gamma_1 u_1 = 0 \quad (\text{в } G\,),\ \alpha > 0. \tag{22}$$

Здесь, как и ранее, λ – спектральный параметр, а искомые элементы u_i, $i = 1, 2$, связаны граничными условиями (21), (22) в пространстве G.

При $f_k \equiv 0$ приходим к спектральной задаче сопряжения с поверхностной диссипацией энергии в абстрактной форме:

$$L_1 u_1 + \lambda^2 u_1 = 0 \quad (\text{в } E_1\,), \quad u_1 \in F_1, \tag{23}$$

$$L_2 u_2 + \lambda^2 u_2 = 0 \quad (\text{в } E_2\,), \quad u_2 \in F_2, \tag{24}$$

$$\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 \quad (\text{в } G\,), \tag{25}$$

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \gamma_1 u_1 - \alpha\lambda\gamma_1 u_1 = 0 \quad (\text{в } G\,),\ \alpha > 0. \tag{26}$$

Введем искомый объект u в виде упорядоченной пары

$$u := (u_1; u_2) \in E_1 \oplus E_2, \quad u_k \in E_k.$$

Если $u \in F_1 \oplus F_2$, то справедливы формулы Грина (18) и (19). Складывая левые и правые части этих выражений будем иметь "общую" формулу Грина

$$\sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, L_k u_k \rangle_{E_k} = \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_k)_{F_k} - \sum_{k=1}^{2} \langle \gamma_k \eta_k, \partial_k u_k \rangle_G, \tag{27}$$

$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2) \in F_1 \oplus F_2.$$

8. Основные функциональные пространства. Основными функциональными пространствами, необходимыми при исследовании задачи (20)–(22), являются пространства $E := E_1 \oplus E_2$, $F := F_1 \oplus F_2$ со скалярными произведениями, введенными по формулам

$$(u, v)_E = \sum_{k=1}^{2} (u_k, v_k)_{E_k}, \quad (u, v)_F = \sum_{k=1}^{2} (u_k, v_k)_{F_k}, \tag{28}$$

и пространство G.

Рассмотрим в пространстве F множество V пар, которые удовлетворяют условиям

$$V := \{u = (u_1; u_2) \in F : \ \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 \ (\text{в } G)\}. \tag{29}$$

Так как операторы $\gamma_i : F_i \to (G_+)$, $i = 1, 2$ ограничены, то V – подпространство пространства F.

Идея введения подпространства V при рассмотрении подобных задач описана в работе [3] и связана с особенностью исследуемых задач. Подпространство V будет играть важную роль при отыскании слабых решений задачи (20)–(22).

Дальнейшие построения основаны на следующем предположении:

$$\overline{N_i} = E_i, \quad N_i := \operatorname{Ker} \gamma_i, \ i = 1, 2. \tag{30}$$

Лемма 1. *Имеет место ортогональное разложение*

$$F = V \oplus V^{\perp}, \tag{31}$$

$$V^{\perp} := \{u = (u_1; u_2) \in F : \, L_i u_i = 0 \, (\textit{в } E_i), \, i = 1, 2, \ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0 \ (\textit{в } G)\}. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $\eta = (\eta_1; \eta_2) \in V$, а $u \in F$ ортогонально η в скалярном произведении (28) пространства F. Тогда, согласно формуле (27), с учетом (29), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, L_k u_k \rangle_{E_k} + \langle \gamma_1 \eta_1, \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 \rangle_G = 0. \tag{33}$$

Полагая $\eta = (\eta_1; 0)$, $\eta_1 \in N_1$, убеждаемся, в силу предположения (30), что $L_1 u_1 = 0$. Аналогично получаем, что $L_2 u_2 = 0$.

Тогда в выражении (33) первая сумма равна нулю.

Далее, используя тот факт, что $\gamma_i \eta_i \, (\eta_i \in F_i)$ пробегает все G_+, убеждаемся, что

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Воспользуемся далее формулой Грина для элементов из пространства V. Она получается из (27) с учетом краевого условия в (29). Имеем

$$\sum_{i=1}^{2} \langle \eta_i, L_i u_i \rangle_{E_i} = \sum_{i=1}^{2} (\eta_i, u_i)_{F_i} - \langle \gamma_1 u_1, \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 \rangle_G. \tag{34}$$

Выделим в V подпространство

$$N := N_1 \oplus N_2 \subset V \subset F \subset E.$$

В силу предположения (30) получаем свойства плотности

$$\overline{N} = \overline{V} = E.$$

Лемма 2. *В скалярном произведении в F имеет место ортогональное разложение*

$$V = N \oplus N^{\perp},$$
$$N^{\perp} := \{u = (u_1; u_2) \in V : \, L_i u_i = 0 \, (E), \, i = 1, 2\}. \tag{35}$$

Доказательство. Оно следует непосредственно из формулы Грина (34) с учетом того, что для элементов из N имеет место равенство

$$\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 = 0,$$

а также из формулы (33). □

Введём в пространстве V скалярное произведение, определяемое по закону

$$(\eta, u)_V := \sum_{i=1}^{2} (\eta_i, u_i)_{F_i} + (\gamma_1 \eta_1, \gamma_1 u_1)_G. \tag{36}$$

Замечание 1. Можно показать, что нормы, определяемые скалярными произведениями (28) и (36), эквивалентны.

Преобразуем формулу Грина (34), выделив в ней в явной форме скалярное произведение $(\eta, u)_V$, введенное по закону (36). Это даёт тождество

$$\sum_{i=1}^{2} \langle \eta_i, L_i u_i \rangle_{E_j} = (\eta, u)_V - \langle \gamma_1 \eta_1, \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \gamma_1 u_1 \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in V. \tag{37}$$

Для элементов η и u из V введём обозначения

$$Lu := (L_1 u_1; L_2 u_2) \in V^*, \tag{38}$$

$$\gamma \eta := (\gamma_1 \eta_1) \in G_+ \subset\to G, \tag{39}$$

$$\partial u := \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \gamma_1 u_1 \, \in (G_+)^*, \quad G_+ \subset\to G \subset\to (G_+)^* := G_-. \tag{40}$$

Тогда формулу (37) можно кратко записать в виде

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_V - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in V. \tag{41}$$

В такой форме она имеет тот же вид, что и формула Грина для одного набора пространств E, V и G, а также оператора следа γ (см. (18), (19)).

9. Вспомогательные абстрактные краевые задачи. При исследовании задачи (23)–(26) будем использовать метод введения вспомогательных краевых задач. Будем разыскивать ее решение в виде суммы

$$u = (u_1; u_2) = v + w = (v_1; v_2) + (w_1; w_2), \tag{42}$$

где $v = (v_1; v_2)$ – решение первой вспомогательной задачи:

$$L_i v_i = f_i := -\lambda^2 u_i, \ i = 1, 2, \tag{43}$$

$$\gamma_1 v_1 = \gamma_2 v_2 \ (\text{в } G_+), \quad \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \gamma_1 v_1 = 0 \ (\text{в } G_-). \tag{44}$$

С учетом обозначений (38)–(40) коротко первую вспомогательную задачу можно переписать в виде

$$Lv = f, \quad \partial v = 0, \quad f := (f_1; f_2). \tag{45}$$

Определение. Элемент $v = (v_1; v_2) \in V$ называется слабым решением первой вспомогательной задачи (43)–(44), если

$$(\eta, v)_V = \langle \eta, f \rangle_E := \sum_{i=1}^{2} \langle \eta_i, f_i \rangle_{E_i}, \quad \forall \eta = (\eta_1; \eta_2) \in V. \tag{46}$$

Лемма 3. *Если выполнено условие $f \in V^*$, то задача (43)–(44) имеет единственное обобщенное решение $v \in V$, выражаемое формулой*

$$v = A^{-1} f, \quad \mathcal{D}(A) = V, \quad \mathcal{R}(A) = V^*.$$

Сужение A оператора A на E, такое что $\mathcal{D}(A) \subset E$, $\mathcal{R}(A) \subset E$, обладает свойством $A = A^* \gg 0$ в E. Если $V \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to E$, то A^{-1} – компактный положительный оператор.

Доказательство. Оно полностью повторяет схему доказательства подобных утверждений в работе [5], см. также [6]. □

Рассмотрим теперь вторую вспомогательную задачу. Для решения $w = (w_1; w_2)$ второй вспомогательной задачи возникает проблема:

$$L_i w_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{47}$$

$$\gamma_1 w_1 = \gamma_2 w_2 \ (\text{в } G_+), \quad \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \gamma_1 w_1 = \psi := \alpha\lambda\gamma_1 u_1 \ (\text{в } G_-). \tag{48}$$

Используя обозначения (38)–(40), задачу (47)–(48) можно переписать в виде

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi. \tag{49}$$

Определение. Назовем элемент $w = (w_1; w_2) \in V$ слабым решением второй вспомогательной задачи (47)–(48), если для него выполнено тождество

$$(\eta, w)_V = \langle \gamma_1 \eta_1, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta = (\eta_1; \eta_2) \in V. \tag{50}$$

Лемма 4. *Если выполнено условие $\psi \in (G_+)^* = G_-$, то задача (47)–(48) имеет единственное слабое решение $w \in V$. При этом*

$$w = T_M \psi,$$

и оператор T_M ограниченно действует из пространства G_- в подпространство "гармонических" элементов M пространства V

$$M := \{w = T_M\psi :\ \psi \in (G_+)^*\}\,.$$

Доказательства лемм 3 и 4 стандартны, потому здесь не приводятся. Аналогичную схему доказательства для близких задач можно найти, например, в [4], параграф 1.3.

10. Общая теорема о дискретности спектра. Вспоминая, что решение исходной задачи (23)–(26) искалось в виде суммы $u = v + w$, и используя утверждения лемм 3 и 4, приходим к соотношению

$$u = A^{-1}f + T_M\psi = -\lambda^2 A^{-1}u + \alpha\lambda T_M\gamma u,$$

так как $f = (-\lambda^2 u_1; -\lambda^2 u_2) = -\lambda^2 u$, $\psi = \alpha\lambda\gamma_1 u_1 = \alpha\lambda\gamma u$, (см.(45), (48)).

Последнее равенство приводит к операторному уравнению

$$\lambda^2 A^{-1}u - \alpha\lambda T_M\gamma u + u = 0. \tag{51}$$

Преобразуем это уравнение, осуществляя замену

$$u = A^{-1/2}\eta, \quad \eta \in E. \tag{52}$$

После замены (52) для новой искомой функции $\eta \in E$ получаем уравнение

$$\lambda^2 A^{-1}A^{-1/2}\eta - \alpha\lambda T_M\gamma A^{-1/2}\eta + A^{-1/2}\eta = 0, \tag{53}$$

которое, после формального применения слева оператора $A^{1/2}$, приобретает вид

$$\lambda^2 A^{-1}\eta - \alpha\lambda(A^{1/2}T_M)(\gamma A^{-1/2})\eta + \eta = 0. \tag{54}$$

Уравнение (54), после введения замен

$$Q := \gamma A^{-1/2} : E \to G_+, \quad Q^* := A^{1/2}T_M :\ G_- \to E_0 := A^{1/2}M \subset E, \tag{55}$$

примет вид

$$\lambda^2 A^{-1}\eta - \alpha\lambda Q^*Q\eta + \eta = 0, \quad \eta \in E. \tag{56}$$

Замечание 2. Операторы Q и Q^* взаимно сопряжены и ограничены. Если считать, что G_+ компактно вложено в G и $Q : E \to G$, то Q компактен. Сужение $Q^*|_G$ – также компактный оператор. Поэтому

$$B := Q^*Q : E \to E \tag{57}$$

является самосопряженным неотрицательным компактным оператором.

Таким образом, используя эти обозначения, приходим к уравнению

$$\lambda^2 A^{-1}\eta - \alpha\lambda B\eta + \eta = 0. \tag{58}$$

Теорема 1. *Спектральная задача* (23)–(26) *равносильна спектральной задаче*

$$L(\lambda) := (\lambda^2 A^{-1} - \alpha\lambda B + I)\eta = 0, \quad \eta = A^{-1/2}u, \quad \eta \in E, \tag{59}$$

$$B = Q^*Q, \quad Q = \gamma A^{-1/2} : E \to G_+, \quad Q^* = A^{1/2}T_M : G_- \to E_0 := A^{1/2}M \subset E. \tag{60}$$

При этом оператор A^{-1} – положительный, а B – неотрицательный. Если пространство V компактно вложено в E, то A^{-1} – компактный оператор. Если G_+ компактно вложено в G, то операторы Q и Q^* компактны, а потому компактен и оператор B.

Замечание 3. Свойства спектра пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} - \alpha\lambda B + I,$$

$$0 \leqslant B \in \mathfrak{S}_\infty(E), \qquad 0 < A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(E)$$

изучены ранее (см. [2], п.3.6, теорема 3.3) при рассмотрении спектральной задачи, порожденной проблемами с поверхностной диссипацией энергии. На основе одного результата Т.Я. Азизова в пункте 3.6 из [2] доказано, что спектр такого операторного пучка дискретен с предельной точкой на бесконечности.

11. Многокомпонентные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. До сих пор рассматривались задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии только для двух областей в $\mathbb{R}^m$ таких, что одна область пристыковывается к другой на части общей границы. Оказывается, что удается исследовать аналогичные проблемы и в случае, когда имеются несколько областей в $\mathbb{R}^m$, произвольным образом пристыкованных одна к другой на различных частях их границ. Аналогичный подход можно использовать и для соответствующих абстрактных задач сопряжения с поверхностной диссипацией энергии, получив предварительно аналог "стыковой" абстрактной формулы Грина. Исследованию задач такого типа посвящен настоящий пункт. Схема получения "стыковой" абстрактной формулы Грина разработана Копачевским Н.Д. и описана в [3]. Абстрактная формула Грина, которая существенно использовалась выше, обобщается на случай задач сопряжения, когда искомые функции заданы в разных областях и удовлетворяют тем или иным условиям сопряжения.

Пусть в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ имеется q ограниченных областей Ω_j, $j = \overline{1,q}$, с липшицевыми границами $\Gamma_j = \partial\Omega_j$. Эти области примыкают друг к другу по некоторым частям их границ, кроме того, могут быть такие части границ, которые являются свободными, т.е. не контактируют с соседними областями.

Обозначим через Γ_{jj}, $j = \overline{1,q}$, свободные части границ Γ_j. Через Γ_{jk} обозначим ту часть границы Γ_j, которая стыкуется с частью границы области Ω_k $(k \neq j)$. При этом, очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Возникает матрица границ

$$(\Gamma_{jk})_{j,k=1}^{q},$$

её элементы считаем $(m-1)$-мерными измеримыми многообразиями с краем.

Приведём теперь формулировку абстрактной многокомпонентной задачи сопряжения, опирающуюся на "стыковую" абстрактную формулу Грина (см. [3]), отвечающую краевым задачам смешанного типа.

Пусть имеется набор пространств E_j, F_j и $G_j,\ j = \overline{1,q}$, и операторов следа γ_j таких, что имеются q абстрактных формул Грина для каждого набора с номером j:

$$\langle \eta_j, L_j u_j \rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j \eta_j, \partial_j u_j \rangle_{G_j}, \quad \forall \eta_j, u_j \in F_j,\ j = \overline{1,q}. \tag{61}$$

Будем считать также, что выполнены условия, описанные в [3], обеспечивающие справедливость существования "стыковых" формул Грина для каждого набора пространств с номером j.

Итак, будем считать, что:

1. Имеют место ортогональные разложения

$$G = \bigoplus_{j=1}^{q} G_j, \qquad G_j = \bigoplus_{k=1}^{q} G_j k,\ j = \overline{1,q}, \qquad G_j k = \bigoplus_{l} G_j kl,$$
$$l = 1\ (k > j), \quad l = \overline{1,3}\ (k = j). \tag{62}$$

2. Имеют место прямые разложения

$$(G_+)_j = \sum_{k=1}^{q} (\dot{+})(G_+)_{jk},\ j = \overline{1,q}, \quad (G_+)_{jk} = \sum_{l} (\dot{+})(G_+)_{jkl},$$
$$l = 1\ (k > j), \quad l = \overline{1,3}\ (k = j). \tag{63}$$

   При $k > j$ третий индекс $l = 1$ обозначает постановку условий первой задачи сопряжения, а при $k = j$ изменение третьего индекса обозначает разбиение свободных от стыковки границ на три части и постановку на каждой из частей одного из трех различных граничных условий.

3. Каждое из пространств в разложении (63) имеет оснащение, т.е.

$$(G_+)_{jkl} \subset\!\!\!\to G_{jkl} \subset\!\!\!\to (G_+)^*_{jkl}, \quad \forall j, k, l. \tag{64}$$

4. Оснащения (64) совпадают при перемене местами индексов j и k.

Пусть

$$\gamma_{jkl}:\ F_j \to (G_+)_{jkl}, \quad \partial_{jkl}:\ F_j \to (G_+)^*_{jkl} \tag{65}$$

– соответствующие ограниченные абстрактные операторы следа на часть границы и оператор дифференцирования по внешней нормали, определённые на части границы. Подробное построение приведенных выше операторов описано в [3].

С учетом введенных обозначений сформулируем постановку абстрактной многокомпонентной задачи сопряжения. Она состоит в нахождении совокупности элементов $\{u_j\}_{j=1}^{q},\ u_j \in F_j$, таких, что выполнены уравнения

$$L_j u_j + \lambda^2 a_j u_j = 0, \quad j = \overline{1,q}, \tag{66}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $a_j \in \mathcal{L}\left(F_j, F_j^*\right)$ – линейные ограниченные положительно определённые операторы:

$$\langle u_j, a_j u_j \rangle_{E_j} \geq c_j \|u_j\|^2_{E_j}, \quad c_j > 0, \quad j = \overline{1, q}. \tag{67}$$

Решения уравнений (66) должны удовлетворять также следующим абстрактным граничным условиям. При $k > j$ эти условия имеют следующий вид:

$$\gamma_{jk1} u_j = \gamma_{kj1} u_k, \quad \partial_{jk1} u_j + \partial_{kj1} u_k + \delta_{jk1} \gamma_{jk1} u_j = \alpha\lambda\, b_{jk1} \gamma_{jk1} u_j. \tag{68}$$

Здесь и ниже b_{jkl} и δ_{jkl} – операторы из $\mathcal{L}\left((G_+)_{jkl}, (G_+)^*_{jkl}\right)$, причём операторы b_{jkl} – положительно определённые, а δ_{jkl} – неотрицательные, т.е.

$$\langle \gamma_{jkl} u_j, b_{jkl} \gamma_{jkl} u_j \rangle_{G_{jkl}} \geq c_{jkl} \|\gamma_{jkl} u_j\|^2_{G_{jkl}}, \quad c_{jkl} > 0, \tag{69}$$

$$\langle \gamma_{jkl} u_j, \delta_{jkl} \gamma_{jkl} u_j \rangle_{G_{jkl}} \geq 0. \tag{70}$$

При $k = j$ имеем три типа условий.

1. Условие Ньютона-Неймана с параметром:

$$\partial_{jj1} u_j + \delta_{jj1} \gamma_{jj1} u_j = \lambda b_{jj1} \gamma_{jj1} u_j. \tag{71}$$

2. Условие Ньютона-Неймана без параметра:

$$\partial_{jj2} u_j + \delta_{jj2} \gamma_{jj2} u_j = 0. \tag{72}$$

3. Условие Дирихле:

$$\gamma_{jj3} u_j = 0. \tag{73}$$

Далее, задача (66)–(73) исследуется с использованием абстрактных формул Грина для набора пространств с номером j, $j = \overline{1, q}$, методом введения вспомогательных абстрактных краевых задач.

Следует отметить, что как и при исследовании абстрактной задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии, здесь вместо основного пространства

$$F := \bigoplus_{j=1}^{q} F_j \tag{74}$$

рассматривается подпространство

$$V := \left\{ u = (u_1, \ldots, u_q) \in F : \gamma_{jk1} u_j = \gamma_{kj1} u_k,\ (k > j);\ \gamma_{jj3} u_j = 0,\ j = \overline{1, q} \right\}, \tag{75}$$

в котором и разыскиваются слабые решения вспомогательных краевых задач. Так как все операторы $\gamma_{jkl} : \ F_j \to (G_+)_{jkl}$ ограничены, то V – подпространство пространства F.

Приведем без доказательства основной результат.

Теорема 2. *Многокомпонентная абстрактная спектральная задача сопряжения с поверхностной диссипацией энергии* (66)–(73) *равносильна задаче*

$$\mathcal{M}(\lambda)\eta := (I - \alpha\lambda\mathcal{B} + \lambda^2\mathcal{A})\eta = 0, \quad \eta \in E. \tag{76}$$

При этом операторные коэффициенты имеют следующие свойства:

$$0 \leqslant \mathcal{B} \in \mathfrak{S}_\infty(E), \qquad 0 < \mathcal{A} \in \mathfrak{S}_\infty(E), \quad \eta = A^{-1/2}u.$$

Замечание 4. Рассмотрение многокомпонентной абстрактной спектральной задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии свелось к исследованию свойств операторного пучка $\mathcal{M}(\lambda)$. Свойства спектра такого пучка идентичны свойствам спектра операторного пучка, полученного в пункте 10 данной работы, см. теорему 1.

Заключение. В данной работе приведены три задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии: задача сопряжения математической физики с поверхностной диссипацией энергии, соответствующая абстрактная проблема и их обобщение в виде многокомпонентных задач сопряжения с поверхностной диссипацией энергии. Все они могут быть заменены эквивалентными проблемами для одного и того же линейного операторного пучка. Свойства спектра пучка всех трех задач идентичны и изучены ранее.

1. *Андронова О.А.* Начально-краевые задачи математической физики с поверхностной диссипацией энергии // Труды ИПММ НАН Украины. – Донецк, 2008. – Т.16. – С.13-25.
2. *Андронова О.А., Копачевский Н.Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – Т.29. – С.11-28.
3. *Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач // Ученые записки Таврического Национального Университета им. В.И.Вернадского, Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика". – Симферополь, 2007. – Т.20 (59). – 2. – С.3-12.
4. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416с.
5. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский математ. вестник, Т.1, №1 (2004). – С.69-97.
6. *Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ), Симферополь, №2, 2004. – С.52-80.

Таврический национальный ун-т им.В.И. Вернадского
o.andronova@list.ru

Получено 25.02.09