ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 18

УДК 517.917

©2009. **С.Г. Шагинян**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Метод функций Ляпунова развивается для изучения устойчивости процессов с распределенными параметрами, т.е. процессов, параметры которых, кроме времени, зависят от пространственных координат и описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных, системами интегро-дифференциальных уравнений и т.д. В работах [1–7] рассматриваются некоторые вопросы устойчивости решения уравнений колебаний струны и мембраны, теплопроводности, химических и ядерных реакторов и т.п. В книге [8] дается систематическое изложение результатов применения метода функций Ляпунова к изучению устойчивости систем с распределенными параметрами. В работе рассматривается задача устойчивости динамических систем с распределенными параметрами, когда на систему на конечном интервале времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Дано определение устойчивости при интегрально малых возмущениях по мере ρ. Поставлены и решены задачи устойчивости в этом смысле. Получены достаточные условия, при которых системы с распределенными параметрами устойчивы при интегрально малых возмущениях.

1. Постановка задачи и определения. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = f_i(x, \varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}), \quad x \in \tau; \quad t > t_0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

и граничными условиями

$$A_j(x, \varphi, \varphi_x) = 0, \quad x \in S, \quad t > t_0 \quad (j = 1, ..., n). \tag{2}$$

Здесь $x \equiv (x_1, ..., x_m)$; $x_1, ..., x_m$ – координаты точки области τ m-мерного евклидова пространства E_m, где протекает процесс

$$\varphi \equiv (\varphi_1, ..., \varphi_n); \quad \varphi_x = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m}\right); \quad \varphi_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_m^2}\right);$$

S – граница области $\tau \subset E_m$.

Предположим, что $f_i(x, 0, 0, 0) \equiv 0$; $A_j(x, 0, 0) \equiv 0$; вектор-функция $\varphi(x, t) \equiv 0$ является решением системы (1), (2) и соответствует невозмущенному процессу (все предположения и рассуждения, приведенные в этом параграфе, сделаны следуя Т.К.Сиразетдинову [8], где указаны и соответствующие первоисточники).

Вместе с системой (1), (2) рассмотрим также систему

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = f_i(x, \varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}) + \overline{g}_i(t, x); \quad x \in \tau, \quad t > t_0 \quad i = (1, 2, ..., n) \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\overline{A}_j(x, \varphi, \varphi_x, \overline{g}) = 0, \quad x \in S, \quad t > t_0 \quad (j = 1, ..., n), \tag{4}$$

где функции $\overline{g}_i(t, x) : R^1 \times R^m \to R^1$ считаются возмущениями, распределенными по области τ и по границе S области τ, $\overline{g} \equiv (\overline{g}_1, ..., \overline{g}_n)$, причем

а) $\int\limits_{t_0}^{T} \overline{g}_i(t, x)dt = h_i(x) < \infty \quad (i = 1, ..., n)$;

б) $\overline{g}_i(t, x) \equiv 0$ при $t \geq T$ для любого $x \in \tau \subset E_m$ ($T > t_0$ – заданная величина).

Отсутствие возмущений $\overline{g}_i(t, x)$ соответствуют $\overline{g}_i(t, x) \equiv 0$ при $t > t_0$, и при этом предполагается, что системы (3), (4) и (1), (2) совпадают.

Процесс возмущается, т.е. отклоняется от заданного $\varphi(x, t) \equiv 0$, за счет начальных возмущений $\varphi_0 = \varphi_0(x)$ при $t = t_0$, принадлежащих заданному классу Φ_{H} и возмущений $\overline{g}_i(t, x)$ $(i = 1, ..., n)$, действующих на систему в (t_0, T) и удовлетворяющих условиям а) и б).

Эти вектор-функции $\varphi_0 = \varphi_0(x)$ и $\overline{g} = \overline{g}(t, x) \equiv (\overline{g}_1, ..., \overline{g}_n)$, назовем допустимыми. Следуя [8], введем важную гипотезу, которую считаем всегда выполненной: существуют и рассматриваются только неукороченные процессы систем (1), (2) и (3), (4), т.е. существуют и неограниченно продолжимы решения соответствующей краевой задачи (при любых рассматриваемых начальных данных) вправо.

Для различных допустимых начальных и действующих в (t_0, T) возмущений, вообще говоря, получаются различные решения систем (1), (2) и (3), (4), т.е., соответственно, некоторые классы Φ и Φ_g допустимых решений. В дальнейшем рассматриваются решения или процессы из этих допустимых классов Φ и Φ_g. Введем вектор-функцию $h(x) \equiv (h_1(x), ..., h_n(x))$.

Пусть $\rho[\varphi] = \rho[(\varphi_1, ..., \varphi_n)]$ – некоторая мера отклонения ([8], с.30), и пусть она удовлетворяет свойствам нормы ([9], с.139).

Определение 1. Процесс $\varphi \equiv 0$, определяемый системой (1), (2), называется устойчивым при интегрально малых возмущениях по мере ρ, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого t_0, можно указать число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ и момент времени $t_* \geq T$ такие, что для любого допустимого распределения $\varphi(x, t) \in \Phi_g$, удовлетворяющего системе (3), (4), будет выполнено условие $\rho[\varphi(\cdot, t)] < \varepsilon$ при $t \geq t_*$, если $\rho[\varphi(\cdot, t_0)] < \delta$ и $\rho[h(x)] < \delta$.

В противном случае процесс $\varphi \equiv 0$ называется неустойчивым при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

Определение 2. Процесс $\varphi \equiv 0$, определяемый системой (1), (2), называется асимптотически устойчивым при интегрально малых возмущениях по мере ρ, если он устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ, и существует такое $\delta_0 > 0$, что для любого допустимого начального распределения с $\rho[\varphi(\cdot, t_0)] < \delta_0$ все допустимые процессы, удовлетворяющие уравнениям (3), (4), удовлетворяют условию $\lim\limits_{t \to \infty} \rho[\varphi(\cdot, t_0)] = 0$.

Установим достаточные условия, при которых процесс $\varphi \equiv 0$, определяемый системой (1), (2), будет устойчивым при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

2. Решение задач для линейных систем. Рассмотрим сначала систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными, т.е.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_{xi}(\varphi_1, ..., \varphi_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{5}$$

и с граничными условиями

$$\sum_{j=1}^{n} \left[A_{ij}(x)\varphi_j + \sum_{p=1}^{m} A_{ij}^{p}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} \right]_S = 0 \quad (i = 1, ..., n), \tag{6}$$

где

$$L_{xi}(\varphi_1, ..., \varphi_n) = \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij}(x)\varphi_j + \sum_{p=1}^{m} b_{ij}^{p}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} + \sum_{p,q=1}^{m} c_{ij}^{pq}(x) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_p \partial x_q} \right]. \tag{7}$$

Здесь $a_{ij}(x)$ – непрерывные, $b_{ij}^{p}(x)$ – непрерывно-дифференцируемые, c_{ij}^{pq} – дважды непрерывно-дифференцируемые функции по $x \in \tau \subset R^m$. Коэффициенты $A_{ij}(x)$ – непрерывные, а $A_{ij}^{p}(x)$ – непрерывно-дифференцируемые по x, S – поверхность, ограничивающая область τ, где протекает процесс. Область τ считается выпуклой, а поверхность S – гладкой [8].

Вместе с системой (5), (6) рассмотрим также систему

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_{xi}(\varphi_1, ..., \varphi_n) + \overline{g}_i(t, x) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\sum_{j=1}^{n} \left[A_{ij}(x)\varphi_j + \sum_{p=1}^{m} A_{ij}^{p}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} + A_i(x)\overline{g}_i(t, x) \right]_S = 0 \quad (i = 1, ..., n), \tag{9}$$

где функции $A_i(x)$ – или непрерывные, или тождественно равны нулю.

Система (5), (6) при некоторых предположениях, наложенных на $c_{ij}^{pq}(x)$, может стать параболической, гиперболической или эллиптической. Считается, что для систем (5), (6) и (8), (9) имеют место все предположения, сделанные в п.1.

Пусть решения системы (5), (6) удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(x)\varphi_j(x, t) = c_i(x) \quad (i = 1, ..., k; \;\; 0 < k \le n), \tag{10}$$

где $D = (d_{ij}(x))$ – $k \times n$-матрица, элементы которой непрерывные ограниченные функции от x, а $\operatorname{rank} D = k$ для любого $x \in \tau \subset R^m$. Покажем, что в этом случае существует такая невырожденная матрица $G(x)$, что с помощью линейного преобразования $\psi = G(x)\varphi$ систему (5) можно привести к виду

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, ..., k; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = L^*_{xj}(c_1, ..., c_k, \psi_{k+1}, ..., \psi_n), \quad j = k+1, ..., n. \tag{12}$$

Действительно, пусть матрица $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \begin{pmatrix} d_{11}(x) & ... & d_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{k1}(x) & ... & d_{kn}(x) \\ q_{k+11}(x) & ... & q_{k+1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1}(x) & ... & q_{nn}(x) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Так как $\operatorname{rank} D = k$, то всегда можно выбрать такие непрерывные и ограниченные в τ функции q_{ij} $(i = k+1, ..., n;\ j = 1, ..., n)$, что $\det G(x) \neq 0$ при $x \in \tau$. Тогда после преобразования $\psi = G(x)\varphi$ система (5) примет вид

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = L^*_{xi}(\psi_1, ..., \psi_n) \quad (i = 1, ..., n). \tag{14}$$

Из (10) вытекает, что

$$0 = L^*_{xi}(c_1, ..., c_k, \psi_{k+1}, ..., \psi_n), \quad (i = 1, ..., k)$$

для любых $c_1, ..., c_k, \psi_{k+1}, ..., \psi_n$. Следовательно,

$$L^*_{xi}(c_1, ..., c_k, \psi_{k+1}, ..., \psi_n) \equiv 0, \quad \text{при } \ i = 1, ..., k.$$

Таким образом, после преобразования $\psi = G(x)\varphi$ система (5) принимает вид (11), (12).

Система (8) после преобразования $\psi = G(x)\varphi$ примет следующий вид

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = g_i(t, x) \quad i = 1, ..., k, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = L^*_{xj}(c_1, ..., c_k, \psi_{k+1}, ..., \psi_n) + g_j(t, x), \quad j = k+1, ..., n, \tag{16}$$

где вектор $g(t, x) = G(x)\overline{g}(t, x)$, и если $\rho[h(x)] < \delta_1$, то

$$\rho\left[\left(\int_{t_0}^{T} G(x)\overline{g}(t, x)dt\right)^*\right] = \rho\left[\left(G(x)\int_{t}^{T} \overline{g}(t, x)dt\right)^*\right] =$$

$$= \rho\left[\left(\int_{t}^{T} \overline{g}(t, x)dt\right)^* G^*(x)\right] = \rho[h(x) \cdot \backslash G(x)] \leq \rho[h(x)]\rho[G^*(x)].$$

Здесь $*$ – знак транспонирования, $\rho[G^*(\cdot)] = \sup\limits_{||z|| \leq 1} ||G^* z|| = C$ – норма оператора G^* ([9], с.223), G^* – $n \times n$-матрица, элементы которой непрерывные, ограниченные в τ функции. Предполагается, что $\rho[G^*(\cdot)] = C < \infty$, следовательно,

$$\rho\left[\left(\int_{t_0}^{T} g(t, x)dt\right)\right] < C\delta_1 < \delta.$$

После преобразования $\psi = G(x)\varphi$ граничные условия (6) и (9) примут вид

$$\sum_{j=1}^{n}\left[B_{ij}(x)\psi_j + \sum_{p=1}^{m} B_{ij}^{p}(x)\frac{\partial \psi_j}{\partial x_p}\right]_S = 0 \quad (i = 1, ..., n) \tag{17}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\left[B_{ij}(x)\psi_j + \sum_{p=1}^{m} B_{ij}^{p}(x)\frac{\partial \psi_j}{\partial x_p} + A_i(x)\overline{g}_i(t,x)\right]_S = 0 \quad (i = 1, ..., n), \tag{18}$$

соответственно, где функции $B_{ij}(x)$ и $B_{ij}^{p}(x)$ являются линейными комбинациями произведений функции $A_{ij}(x)$ и $A_{ij}^{p}(x)$ с элементами матрицы $G^{-1}(x)$ соответственно.

Рассмотрим допустимые процессы в некоторой окрестности $\Gamma_R = \{\psi(\cdot,t) : \rho[\psi(\cdot,t)] < R\}$, где $R > 0$ – положительная постоянная.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если удовлетворяются условия (10) и существует непрерывный при $\rho = 0$ и определенно-положительный по ρ в области Γ_R (где R – любое сколь угодно большое положительное число) функционал $V[(c_1, ..., c_k, \psi_{k+1}, ..., \psi_n)]$, производная которого по времени вдоль рассматриваемых процессов, описываемых системой (16), (18) при $\psi_i = c_i(x)$ $(i = 1, ..., k;\ x \in \tau)$ определенно-отрицательна по ρ, а $\lim\limits_{V\to\infty} \rho = \infty$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty} V = \infty$ при $T \le t < \infty$ равномерно по $c_i(x)$ $(i = 1, ..., k;\ x \in \tau)$, то процесс $\varphi \equiv 0$, описываемый системой (5), (6), устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ.*

Доказательство. Пусть выполняются условия (10). Как показано выше, в этом случае систему (5), (6) можно привести к виду (11), (12), (17). Интегрируя возмущенную систему (15), соответствующую системе (11), получим

$$\psi_i(t,x) = \int_{t_0}^{t} g_i(\vartheta,x)d\vartheta + c_i(x) \quad (\psi_i(t_0,x) = c_i(x);\ i = 1, ..., k).$$

Для функций $c_i(x)$ и $g_i(t,x)$ удовлетворяются условия

$$\sum_{j=1}^{k}\left[B_{ij}(x)c_j + \sum_{p=1}^{m} B_{ij}^{p}(x)\frac{\partial c_j}{\partial x_p}\right]_S = 0 \quad (i = 1, ..., k),$$

следовательно,

$$\psi_i(t,x) = \int_{t_0}^{T} g_i(t,x)dt + c_i(x) \;\text{ при }\; t \ge T \;\; (i = 1, ..., k).$$

Тогда при $t \ge T$

$$\rho[\psi(\cdot,x)] = \rho[\overline{h}(x) + c(x)],$$

где $\overline{h}(x) \equiv (h_1(x), ..., h_k(x))$, $c(x) \equiv (c_1(x), ..., c_k(x))$.

Пусть

$$\rho[\psi(\cdot, t_0)] < \delta \quad \text{и} \quad \rho[h(x)] < \delta.$$

Тогда $\rho[c(x)] < \delta$ и $\rho[\overline{h}(x)] < \delta$. Так как мера отклонения $\rho[\psi(\cdot, t)]$ обладает свойством нормы, то используя неравенство треугольника ([9], с.139), получим

$$\rho[h(x) + c(x)] \leq \rho[h(x)] + \rho[c(x)] < \delta + \delta = 2\delta. \tag{20}$$

Из условий теоремы 1 следует, что все условия теоремы об асимптотической устойчивости в целом по мере ρ ([8], с.211) для процессов, описываемых системой (12), (17), выполнены равномерно по $c_i(x)$ $(i = 1, ..., k)$. Следовательно,

$$\rho[\psi(\cdot, t)] \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{21}$$

Тогда, согласно (20) и (21), для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ и момент времени $t_* \geq T$, что $\rho[\psi(\cdot, t)] < \varepsilon$ при $t \geq t_*$, если имеют место соотношения (19), т.е. процесс $\psi \equiv 0$, определяемый системой (11), (12), (17), устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

Так как $\varphi = G^{-1}(x)\psi$, то

$$\rho[\varphi(\cdot, t)] = \rho[G^{-1}(x)\psi(\cdot, t)] < \frac{1}{c}\rho[\psi(\cdot, t)] < \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon_1.$$

Таким образом, процесс $\varphi \equiv 0$, определяемый системой (5), (6), устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

Теорема доказана. □

Замечание. Если в теореме 1 $k = 0$, то процесс $\varphi \equiv 0$ системы (5), (6) будет асимптотически устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

3. Решение задач для нелинейных систем. Рассмотрим снова систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида (1) и граничными условиями вида (2). Пусть

$$f_i(x, \varphi, \varphi_x, \varphi_{xx})|_{\varphi=(0,...,0,\varphi_{k+1},...,\varphi_n)} \equiv 0, \quad x \in \tau \ \ (i = 1, ..., n); \tag{22}$$

$$f_i(x, \varphi, \varphi_x, \varphi_{xx})|_{\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_k,0,...,0,)} \equiv 0, \quad x \in \tau \ \ (i = k+1, ..., n); \tag{23}$$

$$A_j(x, \varphi, \varphi_x)|_{\varphi=(0,...,0,\varphi_{k+1},...,\varphi_n)} \equiv 0, \quad x \in S \ \ (j = 1, ..., n); \tag{24}$$

$$A_j(x, \varphi, \varphi_x)|_{\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_k,0,...,0)} \equiv 0, \quad x \in S \ \ (j = k+1, ..., n); \tag{25}$$

и имеют место все предположения, сделанные в п.1.

Рассмотрим допустимые процессы в некоторой окрестности $\Gamma_R = \{\varphi(\cdot, t) : \rho[\varphi(\cdot, t)] < R\}$, где $R > 0$ – положительная постоянная. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Если существует непрерывный при $\rho > 0$ и определенно-положительный по ρ в области Γ_R (где R – любое сколь угодно большое положительное число) функционал $V[\varphi]$, производная которого по времени вдоль рассматриваемых* *процессов системы (1), (2) – знакопостоянный функционал отрицательного знака* $\dot{V} = W[\varphi] = W[(\varphi_1, ..., \varphi_k)]$ *по мере* ρ*, причем* $W[\varphi]$ *– определенно-отрицательный по мере* ρ *в подпространстве* $\{(\varphi_1, ..., \varphi_n) : \varphi_i \in \Gamma_R,\ i = 1, ..., k;\ \varphi_{k+1} = ... = \varphi_n \equiv 0\}$*, где имеют место соотношения* $\lim\limits_{V\to\infty} \rho[\varphi] = \infty$ *и* $\lim\limits_{\rho\to\infty} V[\varphi] = \infty$*, то процесс* $\varphi \equiv 0$ *устойчив при интегрально малых возмущениях по мере* ρ*.*

Доказательство. Пусть для системы (1), (2) имеют место все условия теоремы 2. По условию теоремы, $W[\varphi] < 0$ в подпространстве $\{(\varphi_1, ..., \varphi_n) : \varphi_i \in \Gamma_R,\ i = 1, ..., k;\ \varphi_{k+1} = ... = \varphi_n \equiv 0\}$, где система (1), (2) по условиям (23), (25) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = f_i(x, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}_x, \overline{\varphi}_{xx}) \quad (i = 1, ..., k), \\ &A_j(x, \varphi, \varphi_x) = 0, \quad x \in S \quad (j = 1, ..., k); \end{aligned} \tag{26}$$

$$\overline{\varphi} \equiv (\varphi_1, ..., \varphi_k), \quad \overline{\varphi}_x \equiv \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m}\right), \quad \overline{\varphi}_{xx} \equiv \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_m^2}\right).$$

Тогда процесс $\varphi \equiv 0$ системы (26) асимптотически устойчив в целом по мере ρ, ([8], с.211). Следовательно, он устойчив асимптотически и при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

По условию теоремы 2 $W[\varphi] = 0$ в подпространстве $\{(\varphi_1, ..., \varphi_n) : \varphi_i = 0,\ i = 1, ..., k;\ \varphi_j \in \Gamma_R,\ \ j = k+1, ..., n\}$, где система (1), (2) по условиям (22), (24) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0 \quad (i = k+1, ..., n)$$

с нулевыми граничными условиями.

В этих условиях соответствующая возмущенная система (система (3), (4)) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \overline{g}_i(t, x) \quad (i = k+1, ..., n). \tag{27}$$

При этом граничные условия нулевые. Решение этой системы при начальных условиях $\varphi_i(t_0, x) = \varphi_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ будет

$$\varphi_i(t, x) = \int_{t_0}^{t} \overline{g}_i(\vartheta, x) d\vartheta + \varphi_i(x) \quad (t_0 \le t < T)$$

и

$$\varphi_i(t, x) = \int_{t_0}^{T} \overline{g}_i(t, x) dt + \varphi_i(x) = \varphi_i(x) + h_i(x) \quad (t \ge T, \quad i = k+1, ..., n). \tag{28}$$

Оценим меру отклонения $\rho[\varphi]$ в подпространстве $W[\varphi] = 0$ при $t \ge T$. По условию (28)

$$\rho[\varphi(\cdot, t)] = \rho[\overline{\overline{\varphi}}(x) + \overline{\overline{h}}(x)],$$

где $\overline{\overline{\varphi}}(x) \equiv (\varphi_{k-1}(x), ..., \varphi_n(x))$, $\overline{\overline{h}}(x) \equiv (h_{k+1}(x), ..., h_n(x))$.

Пусть $\rho[\varphi(\cdot,t_0)] < \delta$ и $\rho[h(x)] < \delta$. Тогда $\rho[\overline{\overline{\varphi}}(x)] < \delta$ и $\rho[\overline{\overline{h}}(x) < \delta$. Так как мера отклонения $\rho[\varphi(\cdot,t)]$ обладает свойством нормы, то, используя неравенство треугольника ([9], с.139), получим

$$\rho[\overline{\overline{\varphi}}(x) + \overline{\overline{h}}(x)] \leq \rho[\overline{\overline{h}}(x)] + \rho[\overline{\overline{\varphi}}(x)] < \delta + \delta = 2\delta.$$

Таким образом, в подпространстве $W[\varphi] = 0$ процесс $\varphi \equiv 0$ устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ, а в подпространстве $W[\varphi] < 0$ – асимптотически устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ. Следовательно, в окрестности Γ_R для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что при $t \geq T$ $\rho[\varphi(\cdot,t)] < 2\delta$, если $\rho[\varphi(\cdot,t_0)] < \delta$ и $\rho[h(x)] < \delta$.

Теорема 2 доказана. □

Замечание. Если в теореме 2 $k = n$, то процесс $\varphi \equiv 0$, определяемый системой (1), (2), будет асимптотически устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

4. Примеры.

1. Пусть процесс описывается системой второго порядка

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \quad (x \in (0;l); \quad t > t_0, \quad a \neq 0) \tag{30}$$

с граничными условиями

$$\varphi_i(0,t) = \varphi_i(l,t) = 0 \quad (t > t_0, \quad i = 1,2). \tag{31}$$

Очевидно, что для любой непрерывной, ограниченной функции $b(x)$ ($b(x) \neq 0$ при $x \in [0,l]$) удовлетворяется условие

$$b(x)\varphi_1(t,x) = c(x) = b(x)\overline{c}(x), \tag{32}$$

где $\overline{c}(x) = \varphi_1(t_0, x)$.

Рассмотрим устойчивость процесса $\varphi \equiv 0$ ($\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$) по мере $\rho = \int\limits_0^l (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)dx$. Введем функционал $V = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^l (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)dx$: функционал $V[\varphi]$ непрерывный при $\rho = 0$ и определенно-положительный по ρ.

Тогда имеем

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_0^l \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right) dx = a^2 \int\limits_0^l \varphi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} dx = -a_2 \int\limits_0^l \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 dx \leq -\frac{a^2}{l^2} \int\limits_0^l \varphi_2^2 dx,$$

т.е. полная производная функционала $V[\varphi]$ определенно-отрицательная по ρ при $\varphi_1 = \overline{c}(x)$, $\lim V = \infty$ при $\rho \to \infty$ и $\lim \rho = \infty$ при $V \to \infty$. Следовательно выполняются условия теоремы 1, откуда и следует устойчивость при интегрально малых возмущениях процесса $\varphi \equiv 0$ по мере ρ.

2. Рассмотрим процесс, описываемый системой

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = 0. \tag{33}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = a\varphi_2 + b\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \quad (x \in (0,l); \quad t \in (0,\infty)). \tag{34}$$

$$\varphi_1(0,t) = \varphi_1(l,t) = 0, \quad \varphi_2(0,t) = \gamma\varphi_2(l,t), \tag{35}$$

где a, b, γ – постоянные. Для системы (33), (34) также выполняется условие (32). Устойчивость процесса $\varphi \equiv 0$ ($\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$) будем рассматривать по мере $\rho = \int\limits_0^l (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)dx$. Введем функционал $V = \int\limits_0^l (\varphi_1^2 + V_0(x)\varphi_2^2)dx$. Если

$$V_0(x) = \frac{1-\gamma^2}{2a}\frac{\exp\left(\frac{2a}{b}(x-l)\right)}{\exp\left(\frac{2a}{b}l\right) - \gamma^2} - \frac{1}{2a},$$

то имеет место [8] соотношение $\dfrac{dV}{dt} = -\int\limits_0^l \varphi_2^2 dx$. Функция $V_0(x) > 0$, если $\exp\left(\dfrac{2a}{b}l\right) - \gamma^2 > 0$ или $l \le \dfrac{b}{a}\ln\gamma$.

Условия теоремы 1 выполняются и решение $\varphi \equiv 0$ является устойчивым при интегрально малых возмущениях по мере ρ, если $l \le \dfrac{b}{a}\ln\gamma$; $\gamma < 1$.

3. Пусть процесс описывается системой третьего порядка

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\varphi_1,\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \varphi_2\varphi_3^2\varphi_1 f(\varphi_x, \varphi_{xx}, x),\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial t} = -\varphi_2^2\varphi_3\varphi_1 f(\varphi_x, \varphi_{xx}, x)\end{gathered} \tag{36}$$

с граничными условиями

$$A_j(x, \varphi, \varphi_x) = 0, \quad t > t_0; \quad j = 1,2,3, \tag{37}$$

где $x \in \tau \subset R^m$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\varphi_x \equiv \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2}, ..., \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x_m}\right)$,
$\varphi_{xx} \equiv \left(\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_m^2}\right)$.

Пусть функция $f(\varphi_x, \varphi_{xx}, x)$ такая, что решения системы (36), (37) существуют и неограниченно продолжимы вправо (при любых рассматриваемых начальных данных). Введем функционал $V[\varphi] = \dfrac{1}{2}\int_\tau(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)d\tau$, который является непрерывным при $\rho = 0$, где $\rho[\varphi] = \dfrac{1}{2}\int_\tau(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)d\tau$, и определенно-положительным по мере ρ в области Γ_R (здесь R – любое сколь угодно большое число).

Производная $V(\varphi]$ по времени в силу системы (36) будет

$$\dot{V} = -\int_{\tau} \varphi_1^2 d\tau \leq 0.$$

Очевидно, что в подпространстве $\dot{V}[\varphi] = 0$ имеет место $\lim\limits_{\rho\to\infty} V = \infty$ и $\lim\limits_{V\to\infty} \rho = \infty$. Тогда выполняются все условия теоремы 2. Следовательно, процесс $\varphi \equiv 0$ ($\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$) системы (36), (37) устойчив при интегрально малых возмущениях по мере ρ.

1. *Байрамов Ф.Д.* О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих параметрах // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1974. – №2. – С.5-11.
2. *Горяченко В.Д.* Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1971. – 264с.
3. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю.С.* О единственности и устойчивости стационарных режимов работы проточных химических реакторов // ПМТФ. – 1969. – №4. – С.86-90.
4. *Домшлак Ю.И.* Об асимптотической устойчивости решения нелинейной параболической системы // ПММ. – 1963. – **27**, вып.1. – С.166-167.
5. *Зайцев Ю.М.* Применение прямого метода Ляпунова для исследования стационарного режима работы химического реактора // Техническая кибернетика. – 1970. – Вып.3. – С.81-84.
6. *Костандян Б.А.* Об устойчивости решения нелинейного уравнения теплопроводности // ПММ. – 1960. – **24**, вып.6. – С.1112-1114.
7. *Слабодкин А.М.* Об устойчивости равновесия консервативных систем с бесконечным числом степеней свабоды // ПММ. – 1962. – **26**, вып.2. – С.356-358.
8. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 232с.
9. *Колмогоров А.И., Фомин С.В.* Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544с.

Ереванский государственный ун-т
shahinyan@ysu.am

Получено 25.03.09