УДК 517.91

©2009. **З.Е. Филер, А.И. Музыченко**

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается проблема устойчивости решений линейных систем с постоянными коэффициентами и с запаздываниями. Сравниваются разные критерии устойчивости, эффективность их компьютерной реализации. Основное внимание уделяется критерию Михайлова, предложена его финитизация. Разработана и тестирована программа определения устойчивости линейных систем; предусмотрена возможность визуализации на мониторе. Проблема определения устойчивости систем с периодической матрицей сводится к нахождению матрицы монодромии и использованию ее для сведения к критерию Михайлова, а также к непосредственному использованию принципа аргумента, ведущего к построению образа единичной окружности. Разработанные алгоритмы и программы могут быть применены для анализа математических моделей реальных инженерно-технических систем, а также в учебном процессе по теории дифференциальных уравнений, теоретической механике и системам автоматизированного управления.

Впервые разработкой критериев устойчивости занимались Ш.Эрмит (1856) и Э.Раус (1877), а позднее – А.Гурвиц (1895). В 1936 году советским ученым А.В.Михайловым были разработаны более эффективные критерии устойчивости. При исследовании систем выше 4-го порядка пользоваться критериями Рауса и Гурвица практически невозможно из-за необходимости проведения громоздких расчетов; кроме того, именно нахождение характеристического полинома сложной системы связано с трудоемкими выкладками.

Но с развитием вычислительной техники и появлением мощных компьютеров становится актуальной идея алгоритмизации и последующей программной реализации критериев устойчивости, созданных в “докомпьютерную эру”.

1. Системы с постоянной матрицей коэффициентов. Одной из важнейших задач современного машиностроения является повышение эффективности и надежности разных устройств и систем. Решение таких задач требует учета многих параметров системы. Реальные явления, как правило, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассматривая систему дифференциальных уравнений с начальными условиями, которые обычно являются результатами измерений, проведенных с некоторой погрешностью, необходимо решить вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение. Если окажется, что как угодно малые изменения начальных данных могут сильно изменить результат, то решение, определяемое выбранными неточными начальными данными, обычно не имеет прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление. Возникает вопрос о нахождении условий, при выполнении которых достаточно малые изменения начальных условий вызывают как угодно малые изменения решения. Вопросами нахождение таких условий занимается теория устойчивости [1, 2].

Для выяснения устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений приходится рассматривать системы первого приближения – линейные системы. По теореме Ляпунова (т.е. ее нулевое решение асимптотически устойчиво), если линейная система с постоянными коэффициентами асимптотически устойчива, то и соответствующая нелинейная система тоже будет асимптотически устойчивой. Если линейная система неустойчива, то и соответствующая нелинейная система – неустойчива. Поэтому важным является вопрос об устойчивости линейных систем, прежде всего, с постоянной матрицей коэффициентов.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $A = [a_{jk}]$ – постоянная $(n \times n)$-матрица. Для ее асимптотической устойчивости необходима и достаточна отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения. Для выяснения этого факта были разработаны *критерии устойчивости.* Они делятся на две группы: алгебраические и геометрические (частотные). К алгебраическим принадлежат критерии Гурвица, Рауса и др.; к геометрическим – критерии Михайлова и Найквиста.

2. Критерий Рауса. Для характеристического уравнения системы

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \text{или} \quad a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

составим таблицу Рауса:

Таблица

–	$c_{11} = a_n$	$c_{21} = a_{n-2}$	$c_{31} = a_{n-4}$	...
–	$c_{12} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{32} = a_{n-5}$	...
$r_3 = \dfrac{c_{11}}{c_{12}}$	$c_{13} = c_{21} - r_3c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3c_{42}$	...
$r_4 = \dfrac{c_{12}}{c_{13}}$	$c_{14} = c_{22} - r_4c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4c_{33}$	$c_{42} = c_{42} - r_4c_{43}$	...

Правило составления таблицы легко увидеть по ее структуре. Любой из коэффициентов таблицы Рауса c_{ki} при $i \geq 3$ можно найти по формуле $c_{ki} = c_{k+1,i-2} - r_ic_{k+1,i-1}$, где $r_i = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$.

Количество строк таблицы Рауса равняется степени уравнения плюс единица, т.е. $(n+1)$. Коэффициентам с отрицательными индексами отвечают нули [3, 4].

Критерий устойчивости Рауса формулируется следующим образом.

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительными, т.е. $c_{11} > 0; c_{12} > 0; \ldots; c_{1,n+1} > 0$.

Рассмотренный выше критерий *реализован* в виде программы с использованием пакета для символьных расчетов Maple. Результатом работы программы является вывод об устойчивости системы. В программе существуют два варианта ввода данных: введением элементов матрицы системы или путем задания коэффициентов характеристического уравнения. Соответствующие примеры приведены далее.

3. Критерий Михайлова. Подставим $\lambda = i\omega$ в левую часть уравнения (2), получим характеристический полином в комплексном виде $f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$. Величина $f(i\omega)$ при фиксированном значении ω изображается вектором на комплексной плоскости uOv. Когда ω изменяется от 0 до $+\infty$, конец этого вектора описывает кривую, которая называется *годографом Михайлова*.

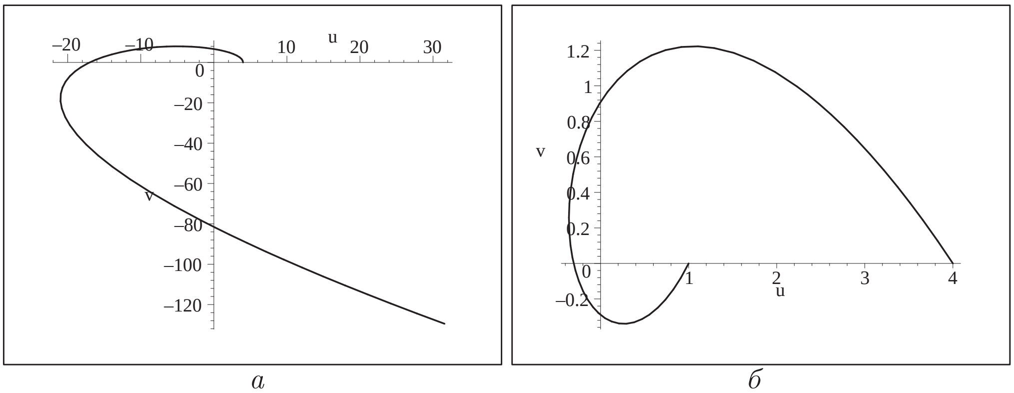


Рис. 1. Нефинитизированный и финитизированный годографы.

Критерий формулируется так: для асимптотической устойчивости автономной системы необходимо и достаточно, чтобы вектор $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ повернулся против движения часовой стрелки вокруг начала координат на угол $\varphi = n\dfrac{\pi}{2}$. Для этого критерия также разработана программа с использованием Maple. Результаты работы этой программы для устойчивого уравнения $y^{(4)} + 4\,y''' + 10\,y'' + 12\,y' + 4\,y = 0$ показаны на рис.1, где указанный угол равен 2π.

В программе подсчитывается угол поворота φ годографа при изменении ω от 0 до $+\infty$. Но для сужения интервала, на котором ведутся подсчеты, применяется метод финитизации: замена в характеристическом полиноме величины ω на $\dfrac{t}{1-t}$ и умножение его на $(1-t)^n$. При этом интервал сужается к промежутку $[0;1]$. Такая замена сохраняет угол поворота годографа, так как сохраняется направление радиуса-вектора. Введение данных в программу происходит интерактивно, путем задания элементов матрицы или коэффициентов полинома. Результатом работы программы является сообщение “система асимптотично устойчива” или “система неустойчива”, а также, при желании, финитизированный годограф рис.1*б*. На рис.1*a* построена лишь часть нефинитного годографа для ω от 0 до 3.

Для характеристического уравнения системы (1) $\det(A - i\omega E) = 0$ финитизация приводит к уравнению $\det(A(1-t) - itE) = 0$. Задавая t значения kh, где $h = \dfrac{1}{3n}$, можно получить финитный годограф. Однако более быстродействующим является получение многочлена $f(i\omega)$ развертыванием определителя с последующей описанной заменой.

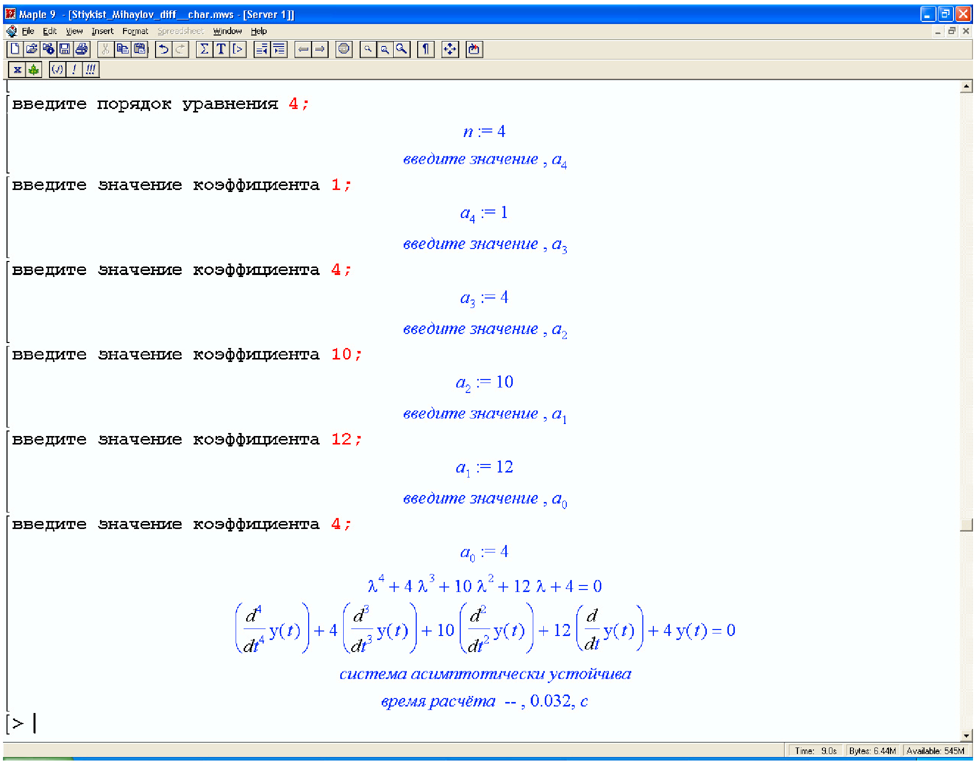


Рис. 2. Фрагмент диалогового окна программы для рассмотренного уравнения.

Как пример, рассмотрим систему с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} -0.8183 & 0.0723 & 0.2198 & -0.2003 & -0.0098 & -0.0333 & -0.3444 \\ -0.5327 & -1.6015 & 1.1043 & -1.0274 & -0.0911 & -0.2988 & -0.2394 \\ 0.1683 & -0.8121 & 0.1486 & -0.9189 & -0.3997 & 0.2346 & -1.0387 \\ -0.4600 & 0.4300 & -0.3688 & -0.0618 & 0.2246 & -0.0146 & 1.1847 \\ -0.8985 & 0.8437 & -0.5467 & 1.4973 & -0.0009 & -0.3968 & 1.9794 \\ 2.0013 & -0.6174 & 0.2290 & -1.1212 & -1.0859 & 0.0038 & -3.3594 \\ 1.2994 & -0.5118 & 0.3071 & -1.1031 & -0.7925 & 0.5406 & -3.2696 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристическим многочленом является $f(\lambda) = \lambda^7 + 5.59981\lambda^6 + +13.84331\,\lambda^5 + 19.46408\,\lambda^4 + 16.73773\,\lambda^3 + 8.7688\,\lambda^2 + 2.57951\,\lambda + 0.32499$. Финитизация годографа $f(i\omega)$ дает рис. 3.

4. Дифференциальные уравнения со звеньями запаздывания. Уравнения вида

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), y(t-\tau_0), y'(t), y'(t-\tau_1), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n-1)}(t-\tau_{n-1})) \qquad (3)$$

находят свое применение в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении проблем, связанных с горением в ракетном двигате-

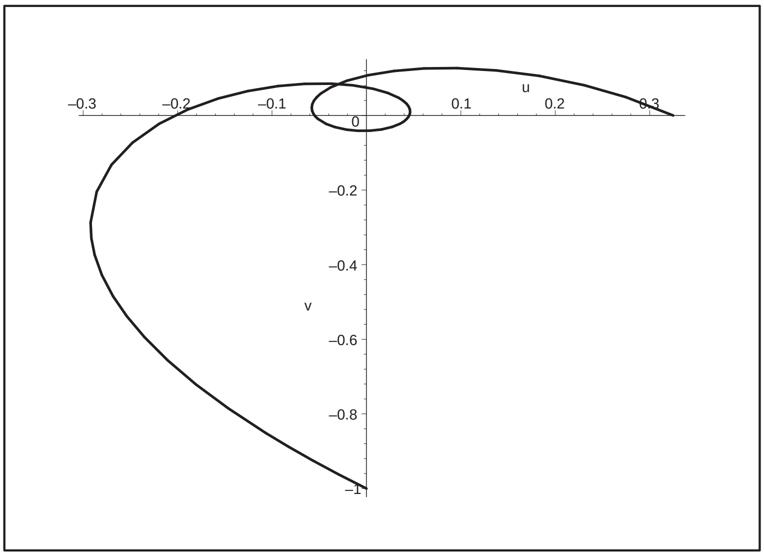


Рис. 3. Финитизированный годограф для рассмотренного уравнения.

ле, и т.п. Такие уравнения появляются, например, каждый раз, когда в рассматриваемой физической или технической задаче сила, которая действует на материальную точку, зависит от скорости или положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, который предшествует данному. Наличие запаздывания в изучаемой системе, как правило, является причиной явлений, которые существенно влияют на ход процесса. Например, в системах автоматического управления запаздыванием является промежуток времени, принципиально всегда присутствующий, который необходим системе для реагирования на входной импульс [5]. Технологические и конструктивные усовершенствования нуждаются в учете явлений последействия и в технике, в частности, авиастроении. Например, для современного самолета приблизительно десятиметровая всасывающая труба по отношению ко времени всасывания оказывается длинной линией, и для описания процесса впрыскивания топлива приходится применять уравнение со звеньями запаздывания.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

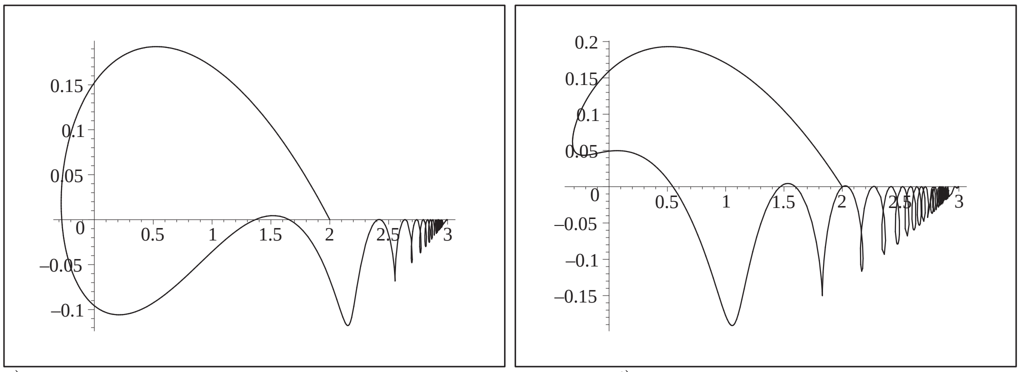
$$y^n + \sum_{k=1}^{n} [a_{n-k} y^{n-k}(t) + \sum_{j=1}^{m_k} (b_{n-k,j} y^{n-k}(t - \tau_{n-k,j}))] = 0.$$

Поиск его решения в виде $y(t) = \exp(\lambda t)$ приводит к характеристическому уравнению ($\tau_{n-k,j}$ – постоянное запаздывание):

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_k \lambda^{n-k}(a_{n-k} + \sum_j b_{n-k,j} \exp^{-\lambda \tau_{n-k,j}}) = 0. \tag{4}$$

Для трансцендентного уравнения (4) алгебраические критерии не удается модернизировать. Между тем, геометрический критерий Михайлова, который по величине угла φ поворота радиуса-вектора годографа функции $f(i\omega)$ при изменении ω на полуоси $[0; +\infty)$ дает вывод об устойчивости решений соответствующего дифференциального уравнения (без запаздывания), удается применить и к уравнениям с запаздываниями. С помощью теоремы о независимости изменения аргумента при движении вдоль кривой – части замкнутого контура, в области которого нет корней (принцип аргумента из теории функций комплексной переменной), при выборе контура с диаметром на оси ординат полуокружности с центром в точке O и полукругом в правой полуплоскости, показываем, что в случае асимптотической устойчивости (когда нет корней в этом полукруге при большом его радиусе), описанный угол φ поворота годографа должен равняться $n\pi/2$.

Учитывая, что по формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, под знаками синуса и косинуса будем иметь аргумент $\tau z/(1-z)$, который неограниченно возрастает при $z \to 1$. Можно предложить, установив устойчивость системы с коэффициентами $a_k + \sum b_{k,j}$, отойти от 1 на такое малое ε, которое показывает близость числа $m = 2\varphi/\pi$ к n, и устанавливать угол поворота годографа квазиполинома $f_1(z)$ на отрезке $[0; 1-\varepsilon]$.



а) запаздывание незначительное: $\tau = 0.5$ (устойчивость); б) запаздывание значительное: $\tau = 1.5$ (неустойчивость)

Рис. 4. Годограф уравнения с запаздыванием.

Если нет необходимости визуализации описанного поворота, можно найти угол φ как конечное значение $\varphi(1)$ решения задачи Коши для уравнения $\varphi' = (v' \cos\varphi - u' \sin\varphi)/(u^2 + v^2)^{1/2}$, $\varphi(0) = 0$. Если $2\varphi(1)/\pi = n$, то уравнение устойчиво асимптотически. Задачу Коши можно решать численно; нет необходимости ее решать с высокой точностью, учитывая что $m = 2\varphi(1)/\pi$ должно быть целым числом. Если погрешность расчета меньше 0,5, то можно сделать правильный вывод об устойчивости системы даже при приближенном значении m, что и реализовано в созданной программе. Для решения задачи Коши можно использовать как метод Эйлера, так и более точный – метод типа Рунге–Кутта, что сократит количество шагов и, следовательно, время расчета. Ввод данных в программу происходит интерактивно (рис. 2), путем задания значений коэффициентов a_k, b_{kj} и параметров запаздывания τ_{kj}.

Влияние величины запаздывания на асимптотическую устойчивость проиллюстрировано на рис. 4 на примере дифференциального уравнения

$$3y^{(4)}(x) + y'''(x) + y'''(x-\tau) + 9y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Если в уравнении (3) считать $y(t)$ и f векторами-функциями, то все выше полученные результаты можно обобщить и на системы дифференциальных уравнений с параметрами запаздывания, записанные в векторной форме.

Для систем с одним запаздыванием можно построить характеристический квазиполином вида $\det(A_0 - \lambda E) + b_{ik}A_{ik}\exp(-\tau\lambda)$, где A_0 – матрица, не содержащая члена с запаздыванием, $A_{ik}(\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. В отличие от одного уравнения высшего порядка, имеющего *члены* с запаздываниями, для системы, содержащей *элементы* с запаздыванием, "дрожания" годографа как на рис. 4, имеют форму не зигзагов с уменьшающейся амплитудой, а спиралей, накручивающихся на конечную точку. Ситуация для системы с матрицей

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1.363025962 & 0.627484330 & 0.523097582 & -1.344315130 \\ 0.323634735 & -1.747806625 & -0.533661593 & 1.804118173 \\ 0.219337511 & 0.142703670 & -2.700268577 & 2.276096686 \\ 0.220232766 & 0.236347359 & 0.413607878 & -3.188898836 \end{bmatrix}$$

и элементами с запаздываниями $b_{23} = 1,\ \tau_{23} = 0.3,\ b_{44} = 5,\ \tau_{44} = 0.3$ изображена на рис.5: слева показан финитизированый годограф системы, а справа – концевая зона (при $t \to 1$) в увеличенном масштабе.

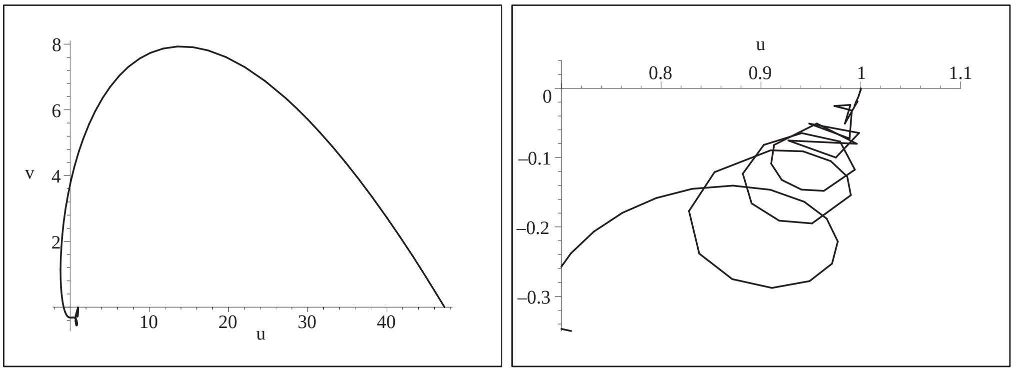


Рис. 5.

5. Системы с периодической матрицей. Анализ устойчивости неавтономных систем вида

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

в некоторых случаях сводится к анализу устойчивости линейных систем с периодической матрицей. Когда известна матрица монодромии, или ее можно построить, выяснение устойчивости системы можно свести к использованию рассмотренного выше критерия Михайлова.

Рассмотрим сперва линейную систему

$$dx/dt = A(t)x \tag{5}$$

с непрерывной на $(-\infty; +\infty)$ периодической матрицей $A(t)$: $A(t+T) \equiv A(t)$, $T > 0$. Если $X(t)$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (5), то на основе тождества $\dot{X}(t) \equiv A(t)X(t), X(0) = E$, имеем $X(t+T) \equiv X(t)B$.

Матрица B называется *матрицей монодромии* системы.

Для *асимптотической устойчивости* периодической системы (5) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ρ матрицы монодромии B лежали внутри единичного круга $|\rho| < 1$ [3].

Для исследования периодических систем на устойчивость выведем условие, которое обеспечивает принадлежность корней характеристического полинома

$$f(\rho) \equiv \det[B - \rho E] \tag{6}$$

единичному кругу $|\rho| < 1$. Нетрудно проверить, что дробно-линейное преобразование $\rho = (\lambda+1)/(\lambda-1)$ переводит единичный круг $|\rho| < 1$ плоскости комплексного переменного $\rho = \alpha + i\beta$ в левую полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda < 0$ плоскости λ. Использовав такое преобразование, мы можем применять критерии устойчивости. Таким образом, уравнение (6) заменяется следующим уравнением: $\det[B - (\lambda+1)/(\lambda-1)E]$, или

$$(\lambda-1)^n \det[B - (\lambda+1)/(\lambda-1)E] = 0 \Rightarrow \det[B(\lambda-1) - (\lambda+1)E] = 0.$$

Используя критерий Михайлова, подставим в левую часть $\lambda = i\omega$, получим характеристическое уравнение в комплексном виде:

$$f(i\omega) = \det[B(-1+i\omega) - (1+i\omega)E] = 0.$$

Величина $f(i\omega)$ при фиксированном значении ω также изображается на комплексной плоскости uOv вектором. Когда ω изменяются от 0 до $+\infty$, то конец этого вектора описывает кривую – годограф Михайлова. Напомним, что критерий формулируется так: для асимптотической устойчивости автономной системы необходимо и достаточно, чтобы вектор $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ повернулся против движения часовой стрелки вокруг начала координат на угол $\varphi = n\pi/2$.

Для сужения интервала, на котором ведутся подсчеты, также применяется метод финитизации: замена в характеристическом полиноме ω на $z/(1-z)$ с умножением его на $(1-z)^n$. При этом интервал суживается к промежутку $[0;1)$:

$$(1-z)^n \det[B(-1+i\frac{z}{1-z}) - (1+i\frac{z}{1-z})E] = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det[(B+E)(z-1) + iz(B-E)] = 0.$$

Такая замена сохраняет угол поворота годографа, так как сохраняется направление радиуса-вектора. Для случая систем с периодической матрицей составлена аналогичная программа с использованием математического пакета Maple. Программа предоставляет возможность выяснения вопроса устойчивости системы в случае, когда общий период элементов матрицы $A(t)$ известен.

Возможен и другой подход для исследования устойчивости с помощью численного отыскания матрицы монодромии по ее определению. Для ее нахождения используется численное интегрирование задачи Коши на отрезке длиной в период. Возможно использование метода Эйлера.

Поделим отрезок $[0;T]$ на N частей длинною $h = T/N$. Обозначим $X_k = X(t_k)$, $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Используем формулу $X_{k+1} = X_k + +hA(t_k)X(t_k)$, $X_0 = X(0) = E$. Очевидно

$$X_{k+1} = (E + hA_k)X_k, \qquad X_0 = E. \tag{7}$$

Тогда $B = X_N$.

Если использовать более точный метод Рунге–Кутта

$$\begin{gathered} X_{j+1} = X_j + h/6(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = A_j X_j;\ K_2 = A_j + 1/2(X_j + h/2K_1); \\ K_3 = A_j + 1/2(X_j + h/2K_2);\ K_4 = A_{j+1}(X_j + h/2K_3), \end{gathered}$$

где $A_{j+1/2} = (t_{j+h/2})$, то возможно взять значительно больший шаг h, что сокращает время расчета. Так, для матрицы A

$$\begin{bmatrix} -0.903 & -0.288 & 0.262 & 0.069 & -0.265 & -0.219 & 0.089 \\ 0.393 & -0.885 & -0.075 + 5\cos(t) & 0.078 & 0.132 & -0.185 & -0.184 \\ -0.158 & 0.309 & -0.632 & 0.061 & 0.020 & -0.003 & -0.141 \\ 0.003 & 0.018 & 0.078 & -0.877 & -0.114 & -0.084 & -0.107 \\ 0.136 & -0.174 & 0.241 & 0.064 & -0.719 & 0.241 & 0.144 \\ 0.283 & 0.156 & 0.009 & 0.112 & -0.204 & -0.755 & 0.069 \\ -0.067 & 0.133 & -0.076 & 0.082 & -0.218 & 0.129 & -0.825 \end{bmatrix}$$

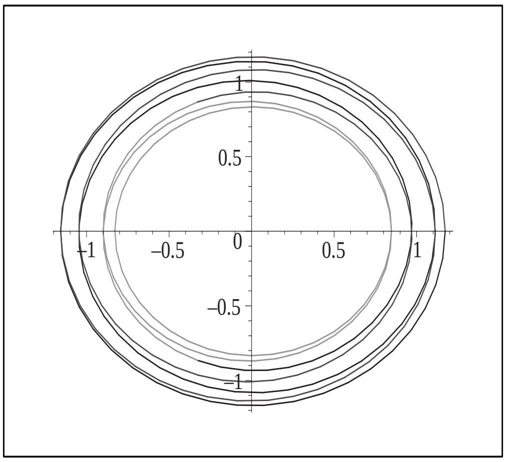
матрица монодромии B

$$B = \begin{bmatrix} -0.0045 & 0.0112 & 0.0484 & 0.0003 & 0.0075 & -0.0051 & -0.0099 \\ 0.0105 & -0.0774 & -0.306 & -0.0133 & -0.0067 & 0.0093 & 0.0436 \\ 0.0043 & -0.0261 & -0.103 & -0.0041 & -0.0029 & 0.0039 & 0.0148 \\ -0.0018 & -0.0021 & -0.0049 & 0.0013 & 0.0044 & -0.0017 & -0.0028 \\ 0.0031 & 0.0086 & 0.0367 & 0.0064 & -0.0018 & -0.0001 & -0.0039 \\ 0.0008 & -0.0142 & -0.0637 & -0.0044 & -0.0129 & -0.0046 & 0.0063 \\ 0.0006 & -0.0171 & -0.0825 & -0.0052 & -0.0150 & -0.0011 & 0.0151 \end{bmatrix}$$

методом Эйлера вычислялась около 1.6 с; почти столько же она отыскивалась методом Рунге-Кутта при количестве шагов N вчетверо меньше, но при этом точность примерно в семь раз выше.

Можно предложить другой метод установления устойчивости с помощью непосредственного применения принципа аргумента для функции $f(\rho) = \det(B - \rho E)$. Если при обходе по окружности единичного радиуса $\rho = \exp(i\alpha)$ при изменении α от 0 до 2π величина $\arg f(\rho)$ изменится на $2\pi n$, то система с матрицей монодромии B устойчива асимптотически (так как все корни уравнения (6) лежат в единичном круге). Геометрически кривая $F(\alpha) = f(\exp(i\alpha))$ при этом сделает n оборотов. Эту кривую можно также рассматривать как годограф системы (5). Для ранее рассмотренной матрицы $A(t)$, соответствующий годограф $F(\alpha)$ показан на рис. 6.

Построение этого годографа не является обязательным, мы его приводим с целью наглядности.



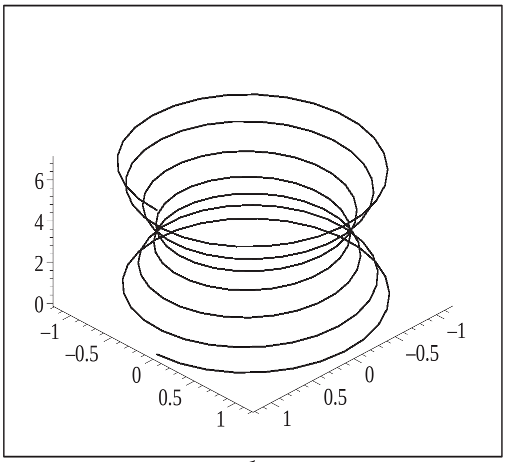


Рис. 6. Годограф системы A(t).

На рис.6,*а* изображен плоский годограф; на рис.6,*б* – его пространственный вариант, когда координата z пропорциональна углу поворота α. Здесь четче видно количество оборотов годографа. Начало годографа на рисунке слева изображено сплошной линией, его продолжение – пунктиром, далее – штрих-пунктиром.

Выводы. 1. Рассмотрены системы с постоянной матрицей, системы с постоянной матрицей и постоянными запаздываниями, системы с периодической матрицей.

2. Для каждого случая рассмотрены алгоритмы применения критериев устойчивости и их компьютерная реализация с использованием математического пакета Maple.

3. Предложен метод финитизации, позволяющий более эффективно применять критерий Михайлова.

4. Установлено что, класические методы не позполяют исследовать системы с запаздыванием, а критерий Михайлова и его финитизация решает вопрос об устойчивости для таких систем полностью.

5. Предложено сведение вопроса об устойчивости для уравнений высших поряд-

ков к интегрированию задачи Коши для уравнения 1-го порядка. При этом нет необходимости достигать высокой точности и сохранять решение в промежуточных точках.

6. Матрица монодромии для систем с периодическими коэффициентами определяется численными методами типа Эйлера и Рунге-Кутта. Количество собственных чисел этой матрицы, лежащих в единичном круге, определяется углом поворота радиуса-вектора специального конечного годографа, дающего наглядное представление об устойчивости. Если он совершает n оборотов при изменении аргумента ρ вдоль единичной окружности, то система асимптотически устойчива. Кроме плоского годографа предлагается для наглядности и его пространтсвенная форма.

7. Полученные результаты и методы могут быть использованы для анализа устойчивости реальных сложных систем. Программы могут быть полезными в учебном процессе ВТУЗов и физико-математических факультетов университетов при изучении дифференциальных уравнений, электротехнических дисциплин и курсов, связанных с системами автоматического управления.

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224с.
2. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теория колебаний и устойчивости движения: Учебник. – К: Высшая школа, 2004. – 525с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472с.
4. Теория автоматического управления / Под ред. А.В. Нетушила. – Изд-ие 2. – М.: Высшая школа, 1976. – 400с.
5. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296с.

Гос. педагог. ун-т им.В.Винниченко, Кировоград;
Гос. летная академия Украины, Кировоград
filier@rambler.ru

Получено 19.11.08