УДК 517.5

©2009. **О.Д. Трофименко**

ДЕЯКІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНОСТІ ДЛЯ ПЕВНИХ КЛАСІВ ПОЛІНОМІВ

У даній статті представлено теореми про середнє для функцій певного виду у випадку багатокутової області з поліноміальною вагою.

Вступ. Нехай функція $f \in C(D)$ $(D : |z| < 1)$. f називається ареоларно моногенною в D тоді і тільки тоді, коли $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f$ – аналітична функція в D.

Деякі результати, пов'язані з ареоларно моногенною функцією та багатокутниками, представлені у роботах М.О.Ріда [1],[2]. Також певні випадки із середнім значенням у вершинах n-кутника можна побачити у [3, гл.5].

Наступні теореми присутні в статті М.О.Ріда "Теорема Федорова" [див.2].

Теорема. *Нехай $f(z) \in C(D)$, $D : |z| < 1$. Для того, щоб $f(z)$ була аналітичною в D необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\int\limits_{p_n(z,r,\varphi)} f(\zeta) d\zeta = 0$$

для кожного $p_n(z, r, \varphi)$ в D, де $p_n(z, r, \varphi)$ – правильний n-кутник з центром z і радіусом r; φ – кут між горизонтальним променем справа від z і зовнішньою нормаллю в точці виходу проміння з багатокутника, $-\frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$.

Теорема. *Нехай $f(z) \in C(D)$. Для того, щоб для кожного $P_n(z, r, \varphi)$ в D ($P_n(z, r, \varphi)$ – замкнута скінченна область, що обмежена $p_n(z, r, \varphi)$), виконувалась рівність*

$$\iint\limits_{P_n(z,r,\varphi)} (\zeta - z) f(\zeta) d\xi d\eta = 0$$

необхідно і достатньо, щоб $f(z)$ була поліномом порядка не більше $n - 2$, тобто
$f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} \alpha_k z^k$, *$\alpha_k$-const.*

Теорема. *Нехай $f(z) \in C(D)$. Щоб $f(z)$ була ареоларно моногенною виду $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-3} \alpha_k z^k + \sum\limits_{k=0}^{n-3} \beta_k \bar{z}^k$*
необхідно і достатньо, щоб рівність

$$\iint\limits_{P_n(z,r,\varphi)} (\zeta - z)^2 f(\zeta) d\xi d\eta = 0$$

виконувалась для кожного $P_n(z, r, \varphi)$ в D.

1. Основні результати. У даній роботі представлено теореми, пов'язані з результатами роботи [4] із заміною кругових областей на багатокутні.

Теорема 1. *Нехай* $L \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $L < \frac{n+1}{2}$ *і* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{L-1} \alpha_k z^k + \sum\limits_{k=0}^{L-1} \beta_k \bar{z}^k$. *Тоді для кожного правильного n-кутника* $p_n(z,r)$ *з центром у точці z і радіусом вписаного кола r виконується рівність*

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta = 0. \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо наступну низку перетворень.

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta = \iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} \left(\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{L-1} \beta_k \bar{z}^k \right) d\xi d\eta =$$

$$= \iint\limits_{P_n(0,r)} w^{n-L} \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k (w+z)^k du dv + \iint\limits_{P_n(0,r)} w^{n-L} \sum_{k=0}^{L-1} \beta_k (\bar{w}+\bar{z})^k du dv =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{r}{cos(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)}} \rho^m e^{im\varphi} \mathrm{C}_k^j \rho^j e^{i\varphi j} z^{k-j} \rho d\rho +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \beta_k \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{r}{cos(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)}} \rho^m e^{im\varphi} \mathrm{C}_k^j \rho^j e^{-i\varphi j} \bar{z}^{k-j} \rho d\rho =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \mathrm{C}_k^j z^{k-j} \frac{r^{m+j+2}}{m+j+2} \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} \frac{e^{i(m+j)\varphi}}{cos^{m+j+2}(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)} d\varphi +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \beta_k \mathrm{C}_k^j \bar{z}^{k-j} \frac{r^{m+j+2}}{m+j+2} \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} \frac{e^{i(m-j)\varphi}}{cos^{m+j+2}(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)} d\varphi. \tag{2}$$

В інтегралах зробимо заміну $t = \varphi - 2\pi(\nu - 1/2)/n$.
Тоді з (2) маємо

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \mathrm{C}_k^j z^{k-j} \frac{r^{m+j+2}}{m+j+2} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{i(m+j)(t+2\pi(\nu-1/2)/n)}}{cos^{m+j+2} t} dt +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\beta_k \mathrm{C}_k^j z^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m-j)(t+2\pi(\nu-1/2)/n)}}{cos^{m+j+2}t}dt,$$

де перший доданок з коефіцієнтами α_k позначимо A, а другий – B. Звідси $A \neq 0$, якщо $n-L+j=qn$, $q \in \mathbb{Z}$.

$$A=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{q\in\left[\frac{n-L}{n},\frac{k+n-L}{n}\right]\cap\mathbb{N}}(-1)^q\frac{n\alpha_k C_k^{qn-n+L}z^{k-qn+n-L}r^{qn+2}}{qn+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{iqnt}}{cos^{qn+2}t}dt.$$

Подивимось на значення q.

$\min q=\frac{n-L}{n}$, $0<\frac{n-L}{n}<1$.

$\max q=\frac{n-L+k}{n}$, $0<\frac{n-L+k}{n}<\frac{n-L+L-1}{n}=\frac{n-1}{n}<1$.

Отже, $0<q<1$. Тоді $A=0$.

Тепер $B\neq 0$, якщо $n-L-j=qn$, $q\in\mathbb{Z}$.

$$B=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{q\in\left[\frac{n-L-k}{n},\frac{n-L}{n}\right]\cap\mathbb{N}}(-1)^q\frac{n\beta_k C_k^{n-L-qn}\bar{z}^{k-n+L+qn}r^{2n-2L-qn+2}}{2n-2L-qn+2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{iqnt}}{cos^{2n-2L-qn+2}t}dt.$$

Розглянемо діапазон значень q в B.

$\min q=\frac{n-L-k}{n}$,$0<\frac{n-2L+1}{n}=\frac{n-L-L+1}{n}<\frac{n-L-k}{n}<1$.

$\max q=\frac{n-L}{n}$, $0<\frac{n-L}{n}<1$.

Отже,$0<q<1$. Тоді $B=0$.

Тепер маємо $A+B=0$. Таким чином, теорема доведена. □

Теорема 2. *Нехай* $n,m,h\in\mathbb{N}$, $0\le h\le n-s$, $0\le s\le m-1$ *і функція*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}c_{k,l}z^k\bar{z}^l,$$

де $c_{k,l}$ *– довільні константи.*

Тоді для кожного правильного n*-кутника* $p_n(z,r)$ *з центром у точці* z *і радіусом* r *вписаного кола виконується рівність*

$$\int\!\!\int\limits_{P_n(z,r)}(\zeta-z)^s f(\zeta)d\xi d\eta=\sum_{p=s}^{h+s}\frac{nr^{2p+2}\lambda_p}{(2p+2)(p-s)!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{p}f(z),$$

де $\lambda_p=\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt.$

Доведення.

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^s f(\zeta) d\xi d\eta = \iint\limits_{P_n(0,r)} w^s f(w+z) du dv =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{r}{cos(\varphi-2\pi(\nu-1/2)/n)}} \rho^s e^{i\varphi s} \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j \rho^j e^{i\varphi j} z^{k-j} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{l} \mathrm{C}_l^p \rho^p e^{-i\varphi p} \bar{z}^{l-p} \rho d\rho = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{l} c_{k,l} \mathrm{C}_k^j \mathrm{C}_l^p z^{k-j} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{s+j+p+2}}{s+p+j+2} \times$$

$$\times \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} \frac{e^{(s+j-p)i\varphi}}{cos^{s+j+p+2}(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)} d\varphi.$$

Зробимо наступну заміну $t = \varphi - 2\pi(\nu - 1/2)/n$. Тоді маємо

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^s f(\zeta) d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{l} c_{k,l} \mathrm{C}_k^j \mathrm{C}_l^p z^{k-j} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{s+j+p+2}}{s+p+j+2} \times$$

$$\times \left(e^{i(s+j-p)\frac{\pi}{n}} + e^{i(s+j-p)\frac{3\pi}{n}} + ... + e^{i(s+j-p)\frac{\pi(2n-1)}{n}} \right) \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{(s+j-p)it}}{cos^{s+j+p+2} t} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{l} \sum_{q\in\left[\frac{s-p}{n}, \frac{k+s-p}{n}\right]\cap\mathbb{N}} (-1)^q c_{k,l} \mathrm{C}_k^{qn+p-s} \mathrm{C}_l^p z^{k-qn-p+s} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{qn+2p+2}}{qn+2p+2} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{iqnt}}{cos^{qn+2p+2} t} dt.$$

Спираючись на значення q в останній сумі, отримаємо наступні міркування. Якщо $s > p$, то $q = 1$. В іншому випадку $q = 0$. Отже, маємо окремі два доданки

$$\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} (-1) c_{k,l} \sum_{p=0}^{s} n \mathrm{C}_k^{n+p-s} \mathrm{C}_l^p z^{k-n-p+s} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{n+2p+2}}{n+2p+2} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{int}}{cos^{n+2p+2} t} dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=s}^{m-1}\sum_{p=s}^{l}c_{k,l}n\mathrm{C}_k^{p-s}\mathrm{C}_l^{p}z^{k-p+s}\bar{z}^{l-p}\frac{r^{2p+2}}{2p+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt.$$

Поглянемо у першому доданку на C_k^{n+p-s}. За означенням біноміального коефіцієнта $n+p-s\le k$, звідки отримаємо протиріччя. Аналогічно в другому доданку $0\le p-s\le k$. Звідси $p\le k+s$.

Тоді елементарними перетвореннями можна отримати наступне.

$$\iint\limits_{P_n(z,r)}(\zeta-z)^s f(\zeta)d\xi d\eta=\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=s}^{m-1}\sum_{p=s}^{\min\{l,k+s\}}c_{k,l}n\mathrm{C}_k^{p-s}\mathrm{C}_l^{p}z^{k-p+s}\bar{z}^{l-p}\frac{r^{2p+2}}{2p+2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt=\iint\limits_{P_n(z,r)}(\zeta-z)^s f(\zeta)d\xi d\eta=\sum_{p=s}^{h+s}\sum_{k=p-s}^{h}\sum_{l=p}^{m-1}c_{k,l}n\mathrm{C}_k^{p-s}\mathrm{C}_l^{p}z^{k-p+s}\bar{z}^{l-p}\times$$

$$\times\frac{r^{2p+2}}{2p+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt=\sum_{p=s}^{h+s}\frac{nr^{2p+2}\lambda_p}{(2p+2)(p-s)!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p}f(z),$$

де $\lambda_p=\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt$. Тобто отримано твердження теореми. $\square$

1. *Maxwell O.Reade* On areol monogenic functions. – Bulletin of the American Mathematical Society, **53**, 1947. – PP.98-103.
2. *Maxwell O.Reade* A theorem of Fedoroff. – Duke Math.J., Vol. **18**(**1**), 1951. – PP.105-109.
3. *Volchkov V.V.* Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2003. – 454p.
4. *Трофименко О.Д.* Теорема о среднем для полианалитических функций. – Донецк: Труды ИПММ НАН Украины, **17**, 2008. – С.194-196.

Донецький національний ун-т
odtrofimenko@gmail.com

Получено 10.05.09