ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 18

УДК 517.5

©2009. **Е.С. Смоловая**

# ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО НЕПРЕРЫВНОСТИ КОЛЬЦЕВЫХ $Q$-ГОМЕОМОРФИЗМОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Данная статья посвящена кольцевым $Q$-гомеоморфизмам. Исследуется проблема продолжения на границу так называемых кольцевых $Q$-гомеоморфизмов между областями в метрических пространствах с мерами. Сформулированы условия на функцию $Q(x)$ и границу области, при которых всякий кольцевой $Q$-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу. Результаты применимы, в частности, к римановым многообразиям, пространствам Левнера, группам Карно и Гейзенберга.

**Введение.** В последние годы ведущие специалисты в своих работах активно изучают кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, см., напр., [29]. Исторически данным гомеоморфизмам предшествовали $Q$-гомеоморфизмы, чья концепция была предложена Олли Мартио, см., напр., [25]. Понятие кольцевых $Q$-гомеоморфизмов мотивировано определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [11] и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено В. Рязановым, У.Сребро и Э.Якубовым на плоскости, [33], [36]. Изначально понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма на комплексной плоскости было изучено и получило начало к тщательному рассмотрению для решения вырожденных уравнений Бельтрами, см., напр., [29], [33]. Заметим также, что при ограниченности функции $Q(x)$, понятия кольцевого $Q$-гомеоморфизма и $Q$-гомеоморфизма эквивалентны. В общем же случае каждый $Q$-гомеоморфизм является кольцевым, но не наоборот. В работе [33] предложены примеры кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в определенной точке $x_0$, таких что $0 < Q(x) < 1$ на некотором множестве, для которого $x_0$ является точкой плотности. Результаты, полученные для $Q$-гомеоморфизмов переносятся на кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, см., напр., [39]. Это касается проблемы локального поведения $Q$-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in BMO$ [23]–[25], $Q \in FMO$ и в других случаях [16], [29], [33], [36]. Так же установлены свойства ACL для $Q$-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ при локально интегрируемом $Q(x)$, см., напр., [37], [38]. Там же показана дифференцируемость п. в. и принадлежность $Q$-гомеоморфизмов соболевскому классу $\mathbb{W}^{1,1}_{loc}$.

В статье [29] изучаются свойства слабо плоских пространств, которые являются далеко идущим обобщением недавно введенных пространств Левнера, см., напр., [1], [3], [12], [15], [41], и которые включают в себя, в частности, широко известные группы Карно и Гейзенберга, см. [4]–[8], [13], [14], [18], [19], [21], [26], [28]. На этой основе, в работе [29] была построена теория граничного поведения и устранимых особенностей для $Q$-гомеоморфизмов, применимая во всех перечисленных классах пространств. Там же, в частности, доказаны обобщение и усиление известной теоремы Геринга-Мартио о гомеоморфной продолжимости на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины, см. [10].

В теории квазиконформных отображений и их обобщений большую роль играют различные модульные неравенства. В связи с этим, следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио, см., напр., [23]–[25] и [16]–[17]. Пусть $G$ и $G'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : G \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : G \to G'$ называется *$Q$-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^n(x) \; dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства $\Gamma$ путей в $G$ и любой допустимой функции $\rho$ семейства $\Gamma$. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения, см. 13.1 и 34.6 в [42]. Концепция также естественным образом связана с теорией модулей с весом, см., напр., [27] и [40].

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых $\Gamma$ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in adm\, \Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho \, ds \geq 1 \tag{2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых $\Gamma$ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\, \Gamma} \int\limits_G \rho^n(x) \, dm(x) \,, \tag{3}$$

где $m$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Проблема локального и граничного поведения $Q$-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работах [23]–[25] и [30]–[32], а в случае $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работах [16]–[17], [33]–[35]. Ранее модульная техника для метрических пространств развивалась, например, в работах [9], [12], [15] и [22].

В дальнейшем $(X, d, \mu)$ обозначает пространство $X$ с метрикой $d$ и локально конечной борелевой мерой $\mu$. Областью в $X$ будем называть открытое множество, любые две точки которого можно связать непрерывной кривой.

Пусть $G$ и $G'$ – области с конечными хаусдорфовыми размерностями $\alpha$ и $\alpha' \geq 1$ в пространствах $(X, d, \mu)$ , и $(X', d', \mu')$ и пусть $Q : G \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Говорим, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ является *$Q$-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^\alpha(x) \; d\mu(x) \tag{4}$$

для любого семейства $\Gamma$ путей в $G$ и любой допустимой функции $\rho$ для $\Gamma$.

Модуль семейств кривых $\Gamma$ в пространстве $(X, d, \mu)$ задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\, \Gamma} \int\limits_G \rho^\alpha(x) \, d\mu(x) \,, \tag{5}$$

где допустимые функции для $\Gamma$, по-прежнему, определяются условием вида (2). В случае пространства $(X', d', \mu')$ в (5) берем хаусдорфову размерность $\alpha'$ области $G'$.

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ называется *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{G}$, если

$$M(\triangle(f\mathrm{C}_0,\, f\mathrm{C}_1,\, G')) \le \int\limits_{A\cap G} Q(x)\cdot \eta^{\alpha}(d(x,x_0))\; d\mu(x) \tag{6}$$

выполняется для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и любых двух континуумов $\mathrm{C}_0$ и $\mathrm{C}_1$, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца $A$ в пространстве $X$ и любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\; dr \;\ge\; 1. \tag{7}$$

Напомним, что если $\gamma : [a, b] \to X$ – непрерывная кривая в метрическом пространстве $(X, d)$, то ее длина есть супремум сумм

$$\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \tag{8}$$

над всеми разбиениями $a = t_0 \le t_1 \le ... \le t_k = b$ интервала $[a, b]$. Кривая $\gamma$ называется спрямляемой, если ее длина конечна.

Пространство $(X, d, \mu)$ называется *$\alpha$-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \ge 1$ такая, что

$$C^{-1}r^{\alpha} \le \mu(B_r) \le Cr^{\alpha} \tag{9}$$

для всех шаров $B_r$ в $X$ радиуса $r < diam\, X$. Как известно, $\alpha$-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность $\alpha$, см., напр., [12], с. 61. Пространство $(X, d, \mu)$ будем называть *регулярным по Альфорсу*, если оно $\alpha$-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Будем говорить, что пространство $(X, d, \mu)$ – *$\alpha$-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \le Cr^{\alpha} \tag{10}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство $(X, d, \mu)$ – *$\alpha$-регулярно сверху*, если условие (10) выполнено в каждой точке.

**1. О связностях в топологических пространствах.** Приведем некоторые топологические определения и замечания общего характера, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть $T$ – произвольное топологическое пространство. *Кривой* в $T$

называется непрерывное отображение $\gamma : [a,b] \to T$. В дальнейшем $|\gamma|$ обозначает $\gamma([a,b])$. Если $A$, $B$ и $C$ – множества в $T$, то $\Delta(A,B,C)$ обозначает множество всех кривых $\gamma$, которые соединяют $A$ и $B$ в $C$, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$, $t \in (a,b)$.

Напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются *континуумами.* Топологическое пространство $T$ будем называть *линейно связным*, если любые две точки $x_1$ и $x_2$ можно соединить непрерывным путем $\gamma : [0,1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$. *Областью* в $T$ будем называть открытое линейно связное множество. Область $G$ называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки $x_0$ такая, что $V \cap G$ связно, см. [20], с.232. Аналогично, мы говорим, что область $G$ *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки $x_0$ такая, что $V \cap G$ линейно связно. Ниже представлены результаты, полученные в работе [29].

Предложение 1. Пусть $T$ – топологическое (метрическое) пространство с базой $\mathcal{B}$ топологии, состоящей из линейно связных множеств. Тогда произвольное открытое множество $\Omega$ в $T$ является связным тогда и только тогда, когда $\Omega$ линейно связно.

**Следствие 1.** *Открытое множество $\Omega$ в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$ , или в любом многообразии является связным тогда и только тогда, когда $\Omega$ линейно связно.*

Замечание 1. Таким образом, если область $G$ в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$, локально связна в точке $x_0 \in \partial G$, то она и локально линейно связна в $x_0$. Тоже самое верно и на многообразиях. Как мы покажем далее, связность и линейная связность эквивалентны для открытых множеств в так называемых слабо плоских пространствах, которые включают в себя хорошо известные широкие классы пространств Левнера, группы Карно и Гейзенберга.

Предложение 2. Если область $G$ в метрическом пространстве $(X,d)$ локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, то $x_0$ достижима из $G$ некоторым непрерывным путем.

Предложение 3. Пусть $\Omega$ – открытое множество в произвольном топологическом пространстве $T$. Тогда

$$\Delta(\Omega, T \setminus \Omega, T) > \Delta(\Omega, \partial\Omega, \Omega)\,. \tag{11}$$

Предложение 4. Пусть $\gamma$ – спрямляемая кривая в метрическом пространстве $(X,d)$, соединяющая точки $x_1 \in B(x_0,r_1)$ и $x_2 \in X \setminus \overline{B(x_0,r_2)}$, где $0 < r_1 < r_2 < \infty$ , а $\rho : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – борелевская функция. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \rho(d(x,x_0))\,ds \geq \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho(r)\,dr. \tag{12}$$

Предложение 5. Если $\Omega$ и $\Omega'$ – открытые множества в метрических пространствах $(X,d)$ и $(X',d')$, а $f : \Omega \to \Omega'$ – гомеоморфизм, то предельное множество $f$ в точке $x_0 \in \partial\Omega$,

$$C(x_0, f) := \{x' \in X' : x' = \lim_{n\to\infty} f(x_n),\ x_n \to x_0\}\,, \tag{13}$$

находится на границе множества $\Omega'$.

**2. О слабо плоских границах.** В данной секции $G$ – область конечной хаусдорфовой размерности $\alpha \geq 1$ в пространстве $(X, d, \mu)$ с метрикой $d$ и локально конечной борелевской мерой $\mu$.

Будем говорить, что граница области $G$ *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial G$, если, для любой окрестности $U$ точки $x_0$, найдется компакт $E \subset G$, окрестность $V \subset U$ точки $x_0$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq \delta \tag{14}$$

для любого континуума $F$ в $G$, пересекающего $\partial U$ и $\partial V$.

Будем также говорить, что граница $\partial G$ – *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности $U$ точки $x_0$ найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq P \tag{15}$$

для любых континуумов $E$ и $F$ в $G$, пересекающих $\partial U$ и $\partial V$.

Граница $\partial G$ называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

Предложение 6. Если $\partial G$ – слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, то $\partial G$ сильно достижима из $G$ в точке $x_0$.

**Лемма 1.** *Пусть $G$ – открытое линейно связное множество в $(X, d, \mu)$. Если $\partial G$ – слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, то $G$ локально линейно связно в $x_0$.*

**3. О конечном среднем колебании относительно меры.** Пусть $G$ – область в пространстве $(X, d, \mu)$. Аналогично [16] будем говорить, что функция $\varphi : G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{G}$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\; d\mu(x) < \infty\,, \tag{16}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x)$$

– среднее значение функции $\varphi(x)$ по множеству $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры $\mu$. Здесь условие (16) включает предположение, что $\varphi$ интегрируема относительно меры $\mu$ по некоторому множеству $G(x_0, \varepsilon),\ \varepsilon > 0$.

Предложение 7. Если для некоторого набора чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| d\mu(x) < \infty\,, \tag{17}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

**Следствие 2.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)| d\mu(x) < \infty\,, \tag{18}$$

*то* $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы были сначала доказаны для $BMO$ функций и внутренних точек области $G$ в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geq 3$, соответственно в [30]–[32] и [24]–[25], а затем для граничных точек $G$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с условием удвоения меры и $FMO$ функций в [16].

**Лемма 2.** *Пусть $G$ – область в пространстве $(X, d, \mu)$ $\alpha$-регулярном сверху с $\alpha \geq 2$ в точке $x_0 \in \overline{G}$ и*

$$\mu(G\cap B(x_0,2r)) \leq \gamma\cdot\log^{\alpha-2}\frac{1}{r}\cdot\mu(G\cap B(x_0,r)) \qquad \forall\, r\in(0,r_0)\,. \tag{19}$$

*Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi : G \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$*

$$\int\limits_{G\cap A(\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^{\alpha}} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{20}$$

*при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, где* $\delta_0 = \min\,(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$,

$$A(\varepsilon,\varepsilon_0) \,=\, \{x\in X : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}. \tag{21}$$

Замечание 2. Отметим, что условие (19) слабее *условия удвоения меры*:

$$\mu(G\cap B(x_0,2r)) \leq \gamma\cdot\mu(G\cap B(x_0,r)) \qquad \forall\, r\in(0,r_0)\,, \tag{22}$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ , в работе [16]. Заметим также, что условие (22) автоматически выполняется во внутренних точках области $G$, если $X$ регулярно по Альфорсу.

**Лемма 2(a).** *Пусть $G$ – область в локально компактном метрическом пространстве $(X, d)$. Тогда любое компактное множество $C$ в $G$ может быть вложено в континуум $K$ из $G$.*

*Доказательство.* Для любого $x \in$ C существует шар $B(x, r)$ с $r = \delta(x) < dist(x, \partial G)$ такой что $\overline{B(x, r)}$ – компакт, см., напр., замечание 3, п. 41 в [20]. Тогда существует ограниченное количество таких шаров, покрывающих $C$. К тому же, существует конечный набор связных компонент $C_i$ $i = 1, 2, ..., n$, для которых шары покрывают $C$. Заметим, что $\overline{C_i}$ компактны и связны, то есть они континуумы. Возьмем любые точки $x_0 \in$ G и $x_i \in \overline{C_i}$ $i = 1, 2, ..., n$ и соединим $x_0$ и $x_i$ кривыми $\gamma_i$ в $G$. Тогда

$$K = \bigcup_{i=1}^{n}(|\gamma_i| \cup \overline{C_i})$$

является только континуумом в $G$, содержащим $C$.

**4. О непрерывном продолжении на границу.** В дальнейшем $(X, d, \mu)$ и $(X', d', \mu')$ – пространства с метриками $d$ и $d'$ и локально конечными борелевскими мерами $\mu$ и $\mu'$, а $G$ и $G'$ – области конечной хаусдорфовой размерности $\alpha$ и $\alpha' \geq 1$ в $(X, d)$ и $(X', d')$, соответственно.

**Лемма 3.** *Пусть область $G$ локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ – компакт, а $f : G \to G'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в граничной точке $x_0$ такой, что $\partial G'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \{y \in X' : \ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in G\}, \tag{23}$$

*$Q : G \to [0, \infty]$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^{\alpha}_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))\, d\mu(x) = o(I^{\alpha}_{x_0}(\varepsilon)) \tag{24}$$

*при $\varepsilon \to 0$, где $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon(x_0)\}$, $\varepsilon(x_0) \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$, и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ – семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что*

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt \, < \, \infty\,, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,. \tag{25}$$

*Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности в $(X', d')$.*

*Доказательство.* Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \emptyset$ ввиду компактности $\overline{G'}$, см., напр., замечание 3, п.41 в [20]. По условию леммы, $\partial G'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $V = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d(y_0, y^*)$.

В силу локальной линейной связности области $G$ в точке $x_0$, найдется последовательность окрестностей $U_k$ точки $x_0$ такая, что $G_k = G \cap U_k$ – области и $d(U_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда найдутся точки $y_k$ и $y^*_k \in F_k = fG_k$ близкие к $y_0$ и $y^*$, соответственно, для которых $d'(y_0, y_k) < r_0$ и $d'(y_0, y^*_k) > r_0$, которые можно соединить непрерывными кривыми $C_k$ в областях $F_k$. По построению

$$\mathrm{C}_k \cap \partial B(y_0, r_0) \neq \emptyset\,, \tag{26}$$

ввиду связности $C_k$.

По условию сильной достижимости найдется компакт $K_1 \subset G'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(K_1, C_k, G')) \geq \delta\,, \tag{27}$$

для больших $k$, поскольку $dist(y_0, C_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем, согласно Лемме 2(a), континуум $K_2$, такой что $K_1 \subset K_2$ и $K_2 \subset G$. Заметим, что

$$\triangle(K_1, C_k, G') \subseteq \triangle(K_2, C_k, G'), \tag{28}$$

поэтому

$$M(\triangle(K_2, C_k, G')) \geq M(\triangle(K_1, C_k, G')) \geq \delta. \tag{29}$$

Также заметим, что $K = f^{-1}(K_2)$ является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0 = dist(x_0, K) > 0$ в $G$. Обозначим шар $B_\varepsilon = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ – борелевская функция, такая что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t \in (0, \infty)$, которая существует по теореме Лузина.

Тогда для функции

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)/I_{x_0}(\varepsilon), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases} \tag{30}$$

выполнено $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\ dt \ \geq \ 1$.

То есть, $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\ dt \ = \frac{1}{I_{x_0}(\varepsilon)} \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)dt$. Используя то, что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ п. в., а $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)dt = I_{x_0}(\varepsilon)$, получим $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\ dt \ \geq \ 1$.

Обозначим $\mathrm{A} = \mathrm{A}(\varepsilon, \varepsilon(x_0), x_0)$. Возьмем континуумы $\mathrm{C}_0 \in B_\varepsilon \cap G$ и $\mathrm{C}_1 = K$. Следовательно,

$$M(\triangle(f\mathrm{C}_0, f\mathrm{C}_1, G') \leqslant \int\limits_{A\cap G} Q(x) \cdot \eta^\alpha_\varepsilon(d(x, x_0)) d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x) \cdot (\psi^*_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0)))^\alpha / I^\alpha_{x_0}(\varepsilon)\ d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{I^\alpha_{x_0}(\varepsilon)} \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^\alpha_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0)) d\mu(x) \to 0 \tag{31}$$

при $\varepsilon \to 0$ по (24) и так как $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ п.в.

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших $k$ имеет место включение $G_k \subset B_\varepsilon$, и потому $C_k \subset fB_\varepsilon$. Следовательно, $f^{-1}(C_k) \subset B_\varepsilon$. Так как $\mathrm{C}_0 \in B_\varepsilon \cap G$, а $\mathrm{C}_1 \in (\mathrm{X} \backslash B_\varepsilon) \cap G$, получим (27), что противоречит (31).

**Следствие 3.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int\limits_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^\alpha(d(x, x_0))\, d\mu(x) \ < \ \infty\,, \tag{32}$$

*где* $\psi(t)$ *– неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$ *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \ < \ \infty \qquad \forall\ \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)\ ,$$

*и* $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то кольцевой* $Q$*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* $x_0$ *по непрерывности в* $(X', d')$.

Здесь предполагается, что функция $Q$ продолжена нулем вне $G$.

Замечание 3. Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (34) сходился в смысле главного значения в точке $x_0$ хотя бы для одного ядра $\psi$ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как показывает лемма, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью:

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \;=\; o(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)). \tag{33}$$

Выбирая в лемме 3 $\psi(t) \equiv 1/t$, получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть* $G$ *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ *– компакт и* $\partial G'$ *сильно достижима. Если измеримая функция* $Q : G \to [0, \infty]$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} \;=\; o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{34}$$

*при* $\varepsilon \to 0$, *где* $G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$, *для* $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x,x_0)$, *то любой кольцевой* $Q$*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* $x_0$ *по непрерывности в* $(X', d')$.

Комбинируя леммы 2 и 3, выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv t\log\frac{1}{t}$, $t \in (0, \delta_0)$, получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Пусть* $X$ $\alpha$*-регулярно сверху в точке* $x_0 \in \partial G$, $\alpha \geq 2$, *где* $G$ *локально линейно связна и удовлетворяет условию (19), а* $\overline{G'}$ *компактно и* $\partial G'$ *сильно достижима. Если* $Q \in FMO(x_0)$, *то любой кольцевой* $Q$*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* $x_0$ *по непрерывности в* $(X', d')$.

Комбинируя теорему 2 и следствие 2, получаем следующее утверждение.

**Следствие 4.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\;\fint_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x)\;d\mu(x) < \infty\,, \tag{35}$$

*где* $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G : d(x,x_0) < \varepsilon\}$, *то любой кольцевой* $Q$*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* $x_0$ *по непрерывности в* $(X', d')$.

### 5. О продолжении на границу обратных отображений.

**Лемма 4.** *Пусть* $f : G \to G'$ *– кольцевой* $Q$*-гомеоморфизм с* $Q \in L^1_\mu(G)$. *Если область* $G$ *локально линейно связна в точках* $x_1$ *и* $x_2 \in \partial G$, $x_1 \neq x_2$, *а* $G'$ *имеет слабо плоскую границу, то* $C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \emptyset$.

*Доказательство.* Пусть $E_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = d(x_1, x_2)$. Предположим $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Так как область $G$ локально линейно связна в точках $x_1$ и $x_2$, существуют окрестности $U_1$ и $U_2$ точек $x_1$ и $x_2$, соответственно, такие, что $W_1 = G \cap U_1$ и $W_2 =$

$G \cap U_2$ – области и $U_1 \subset B_1 = B(x_1, \delta/3)$ и $U_2 \subset B_2 = B(x_2, \frac{2\delta}{3})$. Тогда по неравенству треугольника $dist(W_1, W_2) \geq \frac{\delta}{3}$ и пусть функция

$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & x \in (\frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}), \\ 0, & x \notin (\frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}). \end{cases}$$

Тогда имеем $\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t)\ dt = \int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \frac{3}{\delta}\ dt = 1$. Следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$:

$$M(\triangle(fK_1, fK_2, G')) \leq \int\limits_{A(\frac{\delta}{3};\frac{2\delta}{3};x_1)} Q(x)\eta^{\alpha}(d(x_1,x_2))\, d\mu(x) \leq$$

$$\leq \frac{3^{\alpha}}{\delta^{\alpha}} \int\limits_{A(\frac{\delta}{3};\frac{2\delta}{3};x_1)\cap G} Q(x)\, d\mu(x) < \infty, \qquad (36)$$

поскольку $Q \in L^1_{\mu}(G)$.

Последняя оценка противоречит, однако, условию слабой плоскости (15), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами $r_0$ и $r_*$. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ неверно.

1. *Balogh Z., Koskela, P.* Quasiconformality, quasisymmetry, and removability in Loewner spaces // With an appendix by Jussi Vaisala. Duke Math. J. – 2000. – V.101, N3. – P.554-577.
2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.
3. *Brania A., Yang Sh.* Domains with controlled modulus and quasiconformal mappings // Nonlinear Stud. – 2002. – V.9, N1. – P.57-73.
4. *Водопьянов С.К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. – 1999. – Т.40, №4. – С.764-804.
5. *Водопьянов С.К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т.37, №6. – С.1269-1295.
6. *Водопьянов С.К., Исангулова Д.В.* Дифференцируемость отображений пространств Карно-Каратеодори в топологии Соболева и BV-топологии // Докл. РАН. – 2005. – Т.401, №3. – С.295-300.
7. *Водопьянов С.К., Кудрявцева Н. А.* Нормальные семейства отображений на группах Карно // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т.37, №2. – С.273-286.
8. *Vodop'yanov S., Markina I.* On value distribution for quasimeromorphic mappings on $\mathbb{H}$-type Carnot groups // Bull. Sci. Math. Mexicana. – 2003. – 130, N6. – P.467-523.
9. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – V.98. – P.171-219.
10. *Gehring F.W. and Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. d'Anal. Math. – 1985. – V.24. – P.181-206.
11. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in sace // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V.103. – P.353-393.
12. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. New York: Springer, 2001.
13. *Heinonen J.* A capacity estimate on Carnot groups // Bull. Sci. Math. – 1995. – V.119, N1. – P.475-484.

14. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular mappings on Carnot groups // J. Geom. Anal. – 1997. – V.7. – N1. – P.109-148.
15. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – V.181, N1. – P.1-61.
16. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ukrainian Math. Bull. – 2005. – V.2, N3. – P.403-424.
17. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* To the theory of the boundary behavior of space mappings // Ukrainian Math. Bull. – 2006. – V.3, N2. – P.189-201.
18. *Koranyi A., Reimann H.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent, math. – 1985. – V.80. – P.309-338.
19. *Koranyi A., Reimann H.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. – 1995. – V.111, №1. – P.1-87.
20. *Куратовский К.* Топология. – Т.2. – М.: Мир, 1969.
21. *Marguh's G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot-Caratheodory spaces // Geometric and Functional Analysis. – 1995. – V.5, №2. – P.402-433.
22. *Martio O.* Modern tools in the theory of quasiconformal maps // Texts in Math. Ser. B, 27. Univ. Combra, Dept. Mat., Coimbra. – 2000. – P.1-43.
23. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – V.93. – P.215-236.
24. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* $Q-$homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – V.364. – P.193-203.
25. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On $Q-$homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – V.30. – P.49-69.
26. *Mitchell J.* On Carnot-Caratheodory metrics // J. Differential Geometry. – 1985. – V.21. – P.35-45.
27. *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions. Tokyo: Gakkotosho Co., Ltd., 2003.
28. *Pansu P.* Metriques de Carnot-Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un // Ann. of Math. – 1989. – V.119. – P.1-60.
29. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory// Ukrainian Math. Bull., 4 (2007), №2. – P.199–234.
30. *Рязанов В., Сребро У., Якубов Э.* К теории BMO-квазирегулярных отображений // Докл. РАН. – 1999. – Т.369, №1. – P.13–15.
31. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* BMO-qasikonformal mappings // J. d'Anal. Math. – 2001. – V.83. – P.1-20.
32. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation // Sib. Adv. in Math. – 2001. – V.11, №2. – P.94–130.
33. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – V.96. – P.117-150.
34. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Finite mean oscillation and Beltrami equation // Israel J. Math. – 2006. – N153. – P.247-266.
35. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To the theory of the Beltrami equation // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58. – N11. – С.1571 - 1583.
36. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukrainian Math. Bull. – 4 (2007), no.1. – P.79-115.
37. *Salimov R.* ACL and differentiability of Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 33 (2008). – P.295-301.
38. *Салимов Р.* ACL и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем., 2008, 72:5. – С.141-148.
39. *Салимов Р., Севостьянов Е.* ACL и дифференцируемость почти всюду кольцевых гомеоморфизмов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Вып.16. – С.171-178.
40. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, № 10. – С.1388-1398.
41. *Tyson J. T.* Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces // Conform. Geom. Dyn. – 5 (2001). – P.21-73 (electronic).

42. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.
43. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in $n-$space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., Dissertattiones. – 1976. – No.11. – P.1-44.
44. *Whyburn G.T.* Analytic topology. Rhode Island: American Mathematical Society, 1942.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
`smolovayaes@yandex.ru`

Получено 24.04.09