УДК 517.9:519.46

©2009. **О.М. Омелян**

ГАЛІЛЕЇВСЬКА ІНВАРІАНТНІСТЬ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ ДИФУЗІЇ

У даній роботі шляхом застосування класичного алгоритму Лі досліджено галілеївську інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії.

Вступ. Задача класифікації симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x] + g(u), \tag{1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ – довільна гладка функція, повністю розв'язана в роботі [1]. З результатів роботи [1] зокрема випливає, що при $f(u) \neq const$ рівняння (1) неінваріантне відносно алгебри Галілея.

У даній роботі об'єктом досліження є система нелінійних рівнянь реакції дифузії:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + G(U), \tag{2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$ $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

Система рівнянь вигляду (2) широко застосовується для описання багатьох фізичних, хімічних процесів та явищ живої природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії. Зокрема, для описання процесу горіння плазми, а в живій природі – для описання конкуренції тварин на певній території. Для систем рівнянь реакції дифузії характерно, що матриця функцій f задовольняє властивість $\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle \neq 0$, де $\langle 1\rangle = f^{11} + f^{22}, \langle 2\rangle = f^{11} \cdot f^{22} - f^{12} \cdot f^{21}$.

1. Галілеївська інваріантність. Повне дослідження симетрійних властивостей системи (2) пов'язано із значними складнощами, в зв'язку з тим, що вона містить шість довільних функцій від двох змінних. Оскільки при $F(U) = const$ симетрійні властивості системи (2) досліджено в роботах [2], [3], [4], [5], [6], то в наших дослідженнях будемо вважати $F(U) \neq const$. В даній роботі ми поставимо задачу: дослідити, при яких нелінійностях f^{ab} (f^{ab} – не всі сталі) та g^a система (2) інваріантна відносно лінійного зображення алгебри Галілея з базисними генераторами вигляду:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, G = t\partial_x + xQ_1, Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a} \tag{3}$$

та її розширень операторами масштабних:

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2 \tag{4}$$

та проективних

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + tQ_2 + \frac{x^2}{2}Q_1 \tag{5}$$

перетворень. У формулах (3)–(5) $Q_2 = (\gamma_{ab}u^b + \delta_a)\partial_{u^a}$; $\partial_{u^a} = \frac{\partial}{\partial u^a}$;
α_{ab}, β_a, γ_{ab}, δ_a – const; $\quad a, b = 1, 2$.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1. *Система (2) при умовах $F(U) \neq const$, $\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle \neq 0$ інваріантна відносно алгебри Галілея (3) тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системі:*

$$U_t = \partial_x\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1\frac{u^2}{u^1} & g(u^2)\end{pmatrix}U_x\right] + \begin{pmatrix} u^1\varphi^1(u^2) \\ \varphi^2(u^2)\end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $g(u^2)$, $\varphi^1(u^2)$, $\varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, причому оператор Q_1 має вигляд:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}. \tag{7}$$

Доведення. Необхідність. Нехай система (2) має вигляд (6). Покажемо, що вона інваріантна відносно оператора:

$$X = C_1\partial_t + (C_3t + C_2)\partial_x - C_3\frac{x}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \tag{8}$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Подіємо на систему:

$$\begin{array}{l} u_t^1 - \lambda_1 u_{xx}^1 - u^1\varphi^1(u^2) = 0, \\ u_t^2 - 2\lambda_1\frac{u^2}{u^1}u_{xx}^1 - gu_{xx}^2 + 2\lambda_1\frac{u^2}{(u^1)^2}(u_x^1)^2 - \frac{2\lambda_1}{u^1}u_x^1u_x^2 - \dot{g}(u_x^2)^2 - \varphi^2(u^2) = 0 \end{array} \tag{9}$$

другим продовженням оператора (8):
$\tilde{X} = X - C_3(\frac{x}{2\lambda_1}u_t^1 + u_x^1)\partial_{u_t^1} - C_3u_x^2\partial_{u_t^2} - \frac{C_3}{2\lambda_1}(u^1 + xu_x^1)\partial_{u_x^1} -$
$- \frac{C_3}{2\lambda_1}(2u_x^1 + xu_{xx}^1)\partial_{u_{xx}^1}$.

У підсумку одержимо:
$\tilde{X}S_1 = \frac{C_3}{2\lambda_1}xS_1$, $\quad \tilde{X}S_2 = 0$, де S_1 і S_2 – ліві частини відповідно першого та другого рівнянь системи (9), що і доводить необхідність даної теореми.

Достатність. Нехай нелінійна ($F(U) \neq const$) система (2) інваріантна відносно алгебри Галілея з базисними генераторами (3). Покажемо, що вона локально еквівалентна системі (6). Спочатку покажемо, що лінійні перетворення

$$U = AW + B, \tag{10}$$

де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ – нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – довільні сталі матриці (матриця A невироджена), є перетвореннями локальної еквівалентності системи (2). Якщо подіяти перетвореннями (10) на систему (2), то вона зведеться до вигляду:

$$W_t = \partial_x[\Phi(W)W_x] + Ç(W), \tag{11}$$

де $\Phi(W) = A^{-1}F(AW+B)A$, $\c{C}(W) = G(AW+B)$. Так як з вигляду системи (11) видно, що вона належить тому ж класу, що і система (2), то це і означає, що (10) є перетвореннями еквівалентності системи (2).

Застосувавши алгоритм Лі (див. [9], [10], [11], [12], [13], [14]), одержимо, що для того, щоб система (2) була інваріантна відносно алгебри Галілея (3), функції f^{ab} та g^a повинні задовольняти наступній системі диференціальних рівнянь:

$$Q_1 f^{ab} + \alpha_{cb} f^{ac} - \alpha_{ac} f^{cb} = 0, \tag{12}$$

$$M^c f^{ac}_{u^b} + \alpha_{cb} f^{ac} + \alpha_{ac} f^{cb} + \delta_{ab} = 0, \tag{13}$$

$$M^c g^a_{u^c} = \alpha_{ab} g^b, \tag{14}$$

де $M^c = \alpha_{cd} U^d + \beta_c$, δ_{ab} – символ Кронекера, $a, b, c, d = 1, 2$.

У роботі [15] показано, що з точністю до перетворень (10) існує 6 нееквівалентних зображень алгебри Галілея (3). Ці зображення задаються наступними матрицями:

1) $\alpha = 0$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$;

3) $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$;

4) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = 0$, $k \neq 0$;

5) $\alpha = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, $\beta = 0$;

6) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $\beta = 0$,

де k – довільна стала. Вказані вище набори матриць α, β назвемо "канонічними". Зауважимо, що довільний інший набір матриць α, β локально еквівалентний відносно перетворень (10) одному з канонічних. Розв'яжемо системи (12), (13) для кожного з випадків 1)–6).

1) Системи (12), (13) мають вигляд

$$\partial_{u^1} f^{ab} = 0, \tag{15}$$

$$\partial_{u^b} f^{a1} = -\delta_{ab}. \tag{16}$$

Очевидно, що система (15)–(16) несумісна. Аналогічно можна показати, що система (12), (13) несумісна у випадках 2), 3), 5). Розв'язком системи (12), (13) у випадку 4) є матриця

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

що суперечить вимозі $F(U) \neq const$.

6) Розв'язком системи (12) є функції

$$\begin{array}{l} f^{11} = \varphi^{11}(\omega), \quad f^{12} = (u^1)^{k+1}\varphi^{12}(\omega), \\ f^{21} = (u^1)^{-(k+1)}\varphi^{21}(\omega), \quad f^{22} = \varphi^{22}(\omega), \quad \omega = (u^1)^{-k}u^2. \end{array} \tag{18}$$

Підставивши (18) в систему (13), одержимо:

$$\begin{cases} k\omega[\dot{\varphi}^{11} + k\omega\dot{\varphi}^{12} + (k+1)\varphi^{11}] = -2\varphi^{11} - 1, \\ \dot{\varphi}^{11} + k\omega\dot{\varphi}^{12} + (k-1)\varphi^{12} = 0, \\ k(k\omega^2\dot{\varphi}^{22} - \omega\dot{\varphi}^{21} + 2\varphi^{21}) = 0, \\ k\omega\dot{\varphi}^{22} - \dot{\varphi}^{21} = -2k\varphi^{22} - 1. \end{cases} \tag{19}$$

З системи (14) випливає

$$u^1 g^1_{u^1} = g^1, \quad g^2_{u^1} = 0. \tag{20}$$

Якщо $k \neq 0$, то, розв'язавши систему (19), одержуємо:

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2k} \end{pmatrix},$$

що, як і у випадку *4)* приводить до протиріччя з умовою $F(U) \neq const$.

Якщо $k = 0$, то з (19) знаходимо:

$$\varphi^{11} = -\frac{1}{2}, \quad \varphi^{12} = 0, \quad \varphi^{21} = -\omega, \quad \varphi^{22} = g(\omega), \quad \omega = u^2, \tag{21}$$

де $g = g(u^2)$ – довільна гладка функція. З системи (20) знаходимо:

$$g^1 = u^1\varphi^1(u^2), \quad g^2 = \varphi^2(u^2), \tag{22}$$

де $\varphi^1 = \varphi^1(u^2), \varphi^2 = \varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції.

Підставивши (18), (21), (22) в (2), одержимо систему еквівалентну системі (6). *Теорему доведено.*

2. Максимальні алгебри інваріантності системи (6).

Теорема 2. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (6) з точністю до перетворень еквівалентності (10)*

1) *при $g(u^2) \neq const$, та довільних функціях $\varphi^1(u^2), \varphi^2(u^2)$ є алгебра Галілея:*

$$AG(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1} \rangle; \tag{23}$$

2) *при* $g(u^2) \neq const$, *та* $\varphi^1 = \varphi^2 = 0$ *є узагальнена алгебра Галілея:*

$$\begin{gathered} AG_2(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \\ D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - (\tfrac{x^2}{4\lambda_1} + \tfrac{t}{2})u^1\partial_{u^1}\rangle; \end{gathered} \tag{24}$$

3) *при* $g(u^2) = \lambda_2$ *– const,* $\varphi^1 = \lambda_3(u^2)^k, \varphi^2 = \lambda_4(u^2)^{k+1}, k \neq 2$ *є розширена алгебра Галілея:*

$$\begin{gathered} AG_1(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \\ D = k(2t\partial_t + x\partial_x) - 2u^2\partial_{u^2}\rangle; \end{gathered} \tag{25}$$

4) *при* $g(u^2) = \lambda_2$ *– const,* $\varphi^1 = \lambda_3(u^2)^2, \varphi^2 = \lambda_4(u^2)^3$ *є узагальнена алгебра Галілея:*

$$\begin{gathered} AG_2(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - u^2\partial_{u^2}, \quad \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - (\tfrac{x^2}{4\lambda_1} + \tfrac{t}{2})u^1\partial_{u^1} - tu^2\partial_{u^2}\rangle; \end{gathered} \tag{26}$$

5) *при* $g(u^2) = \lambda_2$ *– const,* $\varphi^1 = \varphi^2 = 0$ *є узагальнена алгебра Галілея:*

$$\begin{gathered} AG_2(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \\ Q_2 = u^2\partial_{u^2}, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x - Q_2, \\ \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - (\tfrac{x^2}{4\lambda_1} + \tfrac{t}{2})u^1\partial_{u^1} - tQ_2\rangle. \end{gathered} \tag{27}$$

Зауваження. У формулюванні теореми вважаємо, що $\lambda_2 \neq 0; -\lambda_1$, оскільки у протилежному випадку для матриці нелінійностей $F(U)$ отримуємо умову $\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle = 0$, при якій система (2) набуває іншого фізичного змісту, відмінного від явищ дифузії.

Доведення. Для дослідження симетрійних властивостей системи (6) застосуємо алгоритм Лі [9], [11], [12].

Подіявши продовженням інфінітезимального оператора

$$X = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \eta^a\partial_{u^a}, \tag{28}$$

де $\xi^0 = \xi^0(t, x, u^1, u^2)$, $\xi^1 = \xi^1(t, x, u^1, u^2)$, $\eta^a = \eta^a(t, x, u^1, u^2)$, $a = \overline{1,2}$ на систему (6), після переходу на многовид, та розщеплення отриманої системи по похідних функцій u^a, одержимо визначальну систему для визначення функцій g,φ^1,φ^2 та невідомих координат інфінітезимального оператора (28) ξ^a, η^a. Визначальна система складається з наступних рівнянь:

$$\eta^2\dot{g} = 0. \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\xi^0_x = \xi^0_t - 2\xi^1_x = \xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = \eta^1_{u^2} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \\ &u^1\eta^1_{u^1} = \eta^1, \quad u^2\eta^2_{u^2} = \eta^2, \\ &\eta^1_{xu^1} = -\tfrac{1}{2\lambda_1}\xi^1_t, \quad \eta^2_x = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

де $a, b, c = 1; 2$.

$$\begin{aligned} &\eta^2 u^1 \dot{\varphi}^1 = -\xi^0_t u^1 \varphi^1 + \eta^1_t - \lambda_1 \eta^1_{xx}, \\ &\eta^2 \dot{\varphi}^2 = (\eta^2_{u^2} - \xi^0_t)\varphi^2 + \eta^2_t - \tfrac{2\lambda_1}{u^1} u^2 \eta^1_{xx}. \end{aligned} \tag{31}$$

Розв'язавши рівняння (30), отримуємо, що координати інфінітезимального оператора (28) повинні мати вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2A(t), \quad \xi^1 = \dot{A}(t)x + B(t), \\ &\eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}[\tfrac{1}{2}\ddot{A}(t)x^2 + \dot{B}(t)x + C(t)]u^1, \\ &\eta^2 = \alpha(t)u^2, \end{aligned} \tag{32}$$

де A, B, C, α – довільні гладкі функції аргументу t.

Спочатку встановимо ядро симетрії системи (6). Для цього в рівняннях (31) вважаємо функції $\varphi^1(u^2), \varphi^2(u^2)$ довільними функціями аргументу u^2. Тоді з рівнянь (31), враховуючи формули (32), отримуємо, що

$$\alpha = \dot{A} = \dot{C} = \ddot{B} = 0. \tag{33}$$

Розв'язавши рівняння (33), з формул (32) отримуємо координати інфінітезимального оператора (28) у вигляді

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2d_0, \quad \xi^1 = gt + d_1, \\ &\eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}(gx + c_1)u^1, \quad \eta^2 = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

З формул (32), (34) безпосередньо випливає алгебра (23), яка і є ядром симетрії системи (6).

Далі дослідимо можливі розширення ядра симетрії системи (6).

Враховуючи формули (32), рівняння (31) перепишуться у вигляді

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2\dot{A}\varphi^1 - \tfrac{1}{2\lambda_1}(\dddot{A}x^2 + \ddot{B}x + \dot{C} - \lambda_1 \ddot{A}), \\ &\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2\dot{A})\varphi^2 + (\dot{\alpha} + \ddot{A})u^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Розщепивши перше рівняння у (35) по степенях змінної x, отримуємо, що

$$A = at^2 + æt + d_0, \quad B = gt + d_1, \tag{36}$$

та

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 \dot{\varphi}^1 = -2(2at + æ)\varphi^1 - \tfrac{1}{2\lambda_1}(\dot{C} - 2\lambda_1 a), \\ &\alpha u^2 \dot{\varphi}^2 = (\alpha - 2(2at + æ))\varphi^2 + (\dot{\alpha} + 2a)u^2. \end{aligned} \tag{37}$$

З рівняння (29) випливають два розгалуження: 1) $\dot{g}(u^2) \neq 0$; 2) $\dot{g}(u^2) = 0$.

1. Нехай спочатку $\dot{g}(u^2) \neq 0$. Тоді з рівняння (29) випливає, що $\alpha = 0$, а рівняння (37) набувають вигляду

$$\begin{aligned} &(2at + æ)\varphi^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}(\tfrac{1}{2}\dot{C} - \lambda_1 a), \\ &(2at + æ)\varphi^2 = au^2. \end{aligned} \tag{38}$$

Розщепивши друге рівняння (38) по степенях змінної t, отримуємо, що розширення ядра симетрії (23) системи (6) можливе лише у випадку, коли $\varphi^2 = 0$. Розв'язавши (38), отримуємо, що $\varphi^1 = \lambda_5$, а враховуючи формули (32), (36), отримуємо наступний вигляд координат інфінітезимального оператора (28)

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2(at^2 + æt + d_0), \quad \xi^1 = (2at + æ)x + gt + d_1, \\ &\eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}[ax^2 + gx - 2\lambda_1(2\lambda_5(at^2 + æt) - at) + c_1]u^1, \quad \eta^2 = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

При знайденому вигляді функцій φ^a: $\varphi^1 = \lambda_5, \quad \varphi^2 = 0$, система (6) набуває вигляду

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_5 u^1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Зауважимо, що система (40) крім перетворень еквівалентності (10) володіє ще додатковими перетвореннями еквівалентності

$$u^1 = e^{\lambda_5 t} w^1, \quad u^2 = w^2, \tag{41}$$

що неважко перевірити, подіявши вказаними перетвореннями на систему (40). Тому, не втрачаючи загальності, в системі (40) можна вважати, що $\lambda_5 = 0$. Враховуючи цю обставину, з формул (32), (39) безпосередньо випливає алгебра (24).

2. Нехай тепер $\dot{g} = 0$, тобто $g = \lambda$ – довільна стала. Найбільш широкий клас функцій φ^a, які допускають рівняння (37), є загальним розв'язком структурної системи

$$\begin{aligned} &k_1 u^2 \dot{\varphi}^1 = k_2 \varphi^1 + k_3, \\ &k_1 u^2 \dot{\varphi}^2 = (k_1 + k_2)\varphi^2 + k_4 u^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Розв'язок структурної системи (42) залежить від значення сталої k_2. Якщо $k_2 \neq 0$, то розв'язком системи (42) будуть функції:

$$\varphi^1 = \lambda_3 (u^2)^n + \lambda_5, \quad \varphi^2 = u^2(\lambda_4 (u^2)^n + \lambda_6). \tag{43}$$

Розв'язавши систему (42) при $k_2 = 0$, одержуємо

$$\varphi^1 = \lambda_3 \ln u^2 + \lambda_5, \quad \varphi^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6). \tag{44}$$

У формулах (43), (44), щоб виключити перетин, покладемо $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$. Розглянемо розширення ядра симетрії системи (6) при кожному з виглядів функцій φ^a.

2.1 Нехай функції φ^a мають вигляд (43). Тоді рівняння (37) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned} &n\lambda_3 \alpha (u^2)^n = -2(2at + æ)(\lambda_3 (u^2)^n + \lambda_5) - \tfrac{1}{2\lambda_1}(\dot{C} - 2\lambda_1 a), \\ &n\lambda_4 \alpha (u^2)^n = -2(2at + æ)(\lambda_4 (u^2)^n + \lambda_6) + (\dot{\alpha} + 2a)u^2. \end{aligned} \tag{45}$$

Проаналізувавши рівняння (45), приходимо до висновку, що їх розв'язок залежить від значення сталої n. Можемо виділити 3 нееквівалентні випадки: a) $n \neq 0; 2$;
b) $n = 2$; c) $n = 0$.

a) $n \neq 0; 2$. Розщепивши рівняння (45) по степенях змінної u^2, отримуємо

$$\begin{array}{ll} n\lambda_3\alpha = -2\lambda_3(2at+æ), & n\lambda_4\alpha = -2\lambda_4(2at+æ), \\ \frac{1}{2\lambda_1}\dot{C} = -2\lambda_5(2at+æ)+a, & \dot{\alpha} = 2\lambda_6(2at+æ)-2a. \end{array} \tag{46}$$

Аналіз рівнянь (38), показує, що розширення ядра симетрії (23) можливе лише при умові $\lambda_6 = 0$. Розв'язавши рівняння (38) при $\lambda_6 = 0$, отримуємо

$$a = 0, \quad \alpha = -\tfrac{2}{n}æ, \quad C = -4\lambda_1\lambda_5æt + c_1. \tag{47}$$

З формул (32), (36), (47) одержуємо наступні координати інфінітезимального оператора (28)

$$\begin{array}{ll} \xi^0 = 2(æt + d_0), & \xi^1 = æx + gt + d_1, \\ \eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}[gx - 4\lambda_1\lambda_5æt + c_1)]u^1, & \eta^2 = -\frac{2}{n}æu^2. \end{array} \tag{48}$$

У випадку, якщо функції φ^a задаються формулами (43), де $\lambda_6 = 0$, система (6) набуває вигляду

$$U_t = \partial_x\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1\frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix}U_x\right] + \begin{pmatrix} u^1(\lambda_3(u^2)^n + \lambda_5) \\ \lambda_4(u^2)^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Зауважимо, що система (49) крім перетворень еквівалентності (10) володіє ще додатковими перетвореннями еківалентності (41), що неважко перевірити, подіявши вказаними перетвореннями на систему (49). Тому, не втрачаючи загальності, в системі (49) можна вважати, що $\lambda_5 = 0$. Враховуючи цю обставину, з формул (32), (48) безпосередньо виплива́є алгебра (25).

b) $n = 2$. Розщепивши рівняння (45) по степенях змінної u^2, отримуємо

$$\begin{array}{ll} \lambda_3\alpha = -\lambda_3(2at+æ), & \lambda_4\alpha = -\lambda_4(2at+æ), \\ \frac{1}{2\lambda_1}\dot{C} = -2\lambda_5(2at+æ)+a, & \dot{\alpha} = 2\lambda_6(2at+æ)-2a. \end{array} \tag{50}$$

Проаналізувавши рівняння (38), приходимо до висновку, що розширення ядра симетрії (23) можливе лише при умові $\lambda_6 = 0$. Розв'язавши рівняння (50) при $\lambda_6 = 0$, отримуємо

$$C = -2\lambda_1(2\lambda_5(at^2 + æt) - at) + c_1, \quad \alpha = -2at - æ. \tag{51}$$

З формул (32), (36), (51) одержуємо наступні координати інфінітезимального оператора (28)

$$\begin{array}{ll} \xi^0 = 2(at^2 + æt + d_0), & \xi^1 = (2at+æ)x + gt + d_1, \\ \eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}[ax^2 + gx - 2\lambda_1(2\lambda_5(at^2+æt) - at) + c_1]u^1, & \eta^2 = (-2at - æ)u^2. \end{array} \tag{52}$$

Враховуючи міркування, проведені у пункті a), оператор (28) з координатами (52) з точністю до перетворень еквівалентності (41) породжує алгебру (26).

c) $n = 0$. З рівнянь (45) отримуємо

$$\frac{1}{2\lambda_1}\dot{C} = -2\widetilde{\lambda}_3(2at+æ)+a, \quad \dot{\alpha} = 2\widetilde{\lambda}_4(2at+æ)-2a, \tag{53}$$

де $\widetilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_5$, $\widetilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_6$. Розв'язавши рівняння (53), отримуємо, що

$$C = -2\lambda_1(2\widetilde{\lambda}_3(at^2 + æt) - at) + c_1, \quad \alpha = 2\widetilde{\lambda}_4(at^2 + æt) - 2at + c_2. \tag{54}$$

З формул (32), (36), (54) одержуємо наступні координати інфінітезимального оператора (28)

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2(at^2 + æt + d_0), \qquad \xi^1 = (2at + æ)x + gt + d_1, \\ &\eta^1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}[ax^2 + gx - 2\lambda_1(2\widetilde{\lambda}_3(at^2 + æt) - at) + c_1]u^1, \\ &\eta^2 = [2\widetilde{\lambda}_4(at^2 + æt) - 2at + c_2]u^2. \end{aligned} \tag{55}$$

У випадку, якщо функції φ^a задаються формулами (43), при $n = 0$, система (6) набуває вигляду

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_3 u^1 \\ \widetilde{\lambda}_4 u^2 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

де $\widetilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_5$, $\widetilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_6$. Зауважимо, що система (56) крім перетворень еквівалентності (10) володіє ще додатковими перетвореннями еківалентності

$$u^1 = e^{\widetilde{\lambda}_3 t} w^1, \quad u^2 = e^{\widetilde{\lambda}_4 t} w^2, \tag{57}$$

що неважко перевірити, подіявши вказаними перетвореннями на систему (56). Тому, не втрачаючи загальності, в системі (56) можна з точністю до перетворень (57) вважати, що $\widetilde{\lambda}_3 = \widetilde{\lambda_4} = 0$. Враховуючи цю обставину, зрозуміло, що оператор (28) з координатами (55) з точністю до перетворень еквівалентності (57) породжує алгебру (27).

2.2 Нехай функції φ^a мають вигляд (44). Тоді рівняння (37) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned} &\lambda_3\alpha = -2(2at + æ)(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_5) - \tfrac{1}{2\lambda_1}(\dot{C} - 2\lambda_1 a), \\ &\lambda_4\alpha = -2(2at + æ)(\lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6) + \dot{\alpha} + 2a. \end{aligned} \tag{58}$$

Розщепивши рівняння (58) по змінній u^2, отримуємо

$$\begin{aligned} &\lambda_3(2at + æ) = 0, \qquad \lambda_4(2at + æ) = 0. \\ &\tfrac{1}{2\lambda_1}\dot{C} = -2\lambda_5(2at + æ) + a, \qquad \dot{\alpha} = \lambda_4\alpha + 2\lambda_6(2at + æ) - 2a. \end{aligned} \tag{59}$$

З перших двох рівнянь (59), стає зрозуміло, що розширення ядра симетрії (23) можливе лише при $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Але в такому випадку приходимо до функцій φ^a випадку 2.1. c) з відповідною алгеброю (27). *Теорему доведено.*

1. *Dorodnitsyn V.A.*, On invariant solutions of non-linear heart conduction with a sourse, USSR Comput. Math. Math. Phys. – 22(1982). – P.115-122.
2. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A 33 (2000), P.267-282.

3. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A 33 (2000), P.7839-7841.
4. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A 36 (2002), P.405-425.
5. *Nikitin A.G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations, J. Math. Anal. and Appl. (JMAA) 324, 615-628, 2006; ArXiv math-ph/0411027, 2004.
6. *Nikitin Anatoly G.* Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations. Ukrainian Marhematical Bulletin. – Volume 2 (2005), №2. – P.153-204.
7. *Nikitin A.G., Wiltshire R.* Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations, in Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics, Proc. of the Third Int. Conf., Kiev, July 12-18, 1999, Ed. A.M.Samoilenko (Inst. of Mathematics of Nat. Acad. Sci. of Ukraine, Kiev, P.47-59, 2000).
8. *Nikitin A.G., Wiltshire R.*, Systems of Reaction Diffusion Equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. 42 (2001), P.1667-1688.
9. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.– 400с.
10. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981. – 386с.
11. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639с. — Пер. с англ.:
12. *Ибрагимов Н.Х.* Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1967. – 59с.
13. *Ибрагимов Н.Х.* Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1972. – 200с.
14. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280с.
15. *Глеба А.В.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис... канд. ф.-м. наук: 01.01.03. – Київ. – 2003. – 120с.

Полтавський національний технічний ун-т
ім. Юрія Кондратюка
k26@pntu.edu.ua

Получено 28.02.09