УДК УДК 519.21

©2009. **А.В. Логачёв**

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССА ПУАССОНА

В настоящей работе рассматривается процесс $\eta_n(t) = \frac{\nu(nt)-\lambda nt}{\sqrt{\lambda n}\varphi(n)}$, где $\nu(t)$ – процесс Пуассона с параметром λt, $\varphi(n)$ – монотонно возрастающая функция, $n \in N$. Доказываются теоремы о больших уклонениях для процесса $\eta_n(t)$.

1. Введение. В работе обосновывается принцип больших уклонений для процессов
$$\eta_n(t) = \frac{\nu(nt) - \lambda nt}{\sqrt{\lambda n}\varphi(n)}. \tag{1}$$
Здесь $\nu(t)$ – процесс Пуассона с параметром λt, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $t \geq 0$, $\varphi(n)$ – монотонно возрастающая функция, $n \in N$ – множеству натуральных чисел, стремящаяся к $+\infty$. В отличии от принципа больших уклонений для винеровского процесса, здесь возможны три различных случая для описания функционала действия:
$$1) \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0, \quad 2) \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = k > 0, \quad 3) \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \infty.$$
Случаи 1), 2) рассмотрены ниже в теореме 1. По-видимому, принцип больших уклонений для них может быть получен из результатов работ [3], [4], [5], [8]. Здесь же он доказывается иным способом, используя методы разработанные в [2]. Случай 3) требует привлечения других методов доказательства и сформулирован в теореме 3.

Для метрического пространства (X, ρ) через $\mathcal{B}(X, \rho)$ обозначим борелевскую σ-алгебру его множеств. Напомним [1, стр. 111], что семейство вероятностных мер P_n на пространстве (X, ρ) удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $S(x)$ и нормирующей функцией $\psi(n)$, если $\psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и выполнены следующие условия:

$i)$ для любого $c > 0$ множество $\Phi(x) = \{x : S(x) < c\}$ компактно;
$$ii) \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\psi(n)} \ln P_n(F) \leq -S(F) \text{ для любого замкнутого множества } F \in \mathcal{B}(X, \rho),$$
$$iii) \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\psi(n)} \ln P_n(G) \geq -S(G), \text{ для любого открытого множества } G \in \mathcal{B}(X, \rho).$$
Будем использовать следующие обозначения: $D[0, 1]$ – пространство функций непрерывных справа и имеющих пределы слева, а при $t = 1$ непрерывных и слева.

Работа поддержана фондом совместных научных проектов НАН Украины Российского фонда фундаментальных исследований №104

$AC_0[0,1]$ – множество абсолютно непрерывных функций $x(t)$, таких, что $x(0)=0$, $AC_k[0,1]$ – множество абсолютно непрерывных функций $x(t)$, таких, что $x(0)=0$, $\dot{x}(t) > -\frac{\sqrt{\lambda}}{k}$, где k – некоторая положительная константа. Через $L_1[0,1] = \left\{x : \int_0^1 |x(t)|dt < \infty\right\}$ обозначим пространство суммируемых функций. Целая часть числа a обозначается $[a]$, а дробная – $\{a\}$.

2. Принцип больших уклонений. Рассмотрим вначале 1-й и 2-й из отмеченных выше случаев. На прстранстве $D[0,1]$ определим метрику $\rho(x,y) = \sup\limits_{0\le t\le 1} \mid x(t)-y(t)\mid$.

Теорема 1. *1) Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, *то семейство мер* $P_n(A) = P\{\eta_n(\cdot)\in A\}$ *удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве* $(D[0,1],\rho)$ *с функцией* $\psi(n)=\varphi^2(n)$ *и функционалом действия*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)dt, & \text{если } x(t)\in AC_0[0,1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = k$, *то семейство мер* $P_n(A) = P\{\eta_n(\cdot)\in A\}$ *удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве* $(D[0,1],\rho)$ *с функцией* $\psi(n)=\varphi^2(n)$ *и функционалом действия*

$$S(x) = \begin{cases} \int\limits_0^1 \left(\left(\frac{\dot{x}(t)\sqrt{\lambda}}{k} + \frac{\lambda}{k^2}\right)\ln\left(\frac{k}{\sqrt{\lambda}}\dot{x}(t)+1\right) - \frac{\dot{x}(t)\sqrt{\lambda}}{k}\right)dt, & \text{если } x(t)\in AC_k[0,1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства используем теоремы 3.2.1 и 3.2.2, [2]. Найдем кумулянту процесса (1). Для этого, согласно формуле 2.1.3, [2] необходимо рассмотреть форму

$$G(t,x,z) = \sum_i z_i b^i(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} z_i z_j a^{ij}(t,x) + \int\limits_{R^r} \left(e^{z(y-x)} - 1 - z(y-x)\right)\lambda_{t,x}(dy),$$

где функции $b^i(t,x)$, $a^{ij}(t,x)$ и мера $\lambda_{t,x}(dy)$ определяются из соответствующего стохастического уравнения. В рассматриваемом случае плотность меры Леви $\lambda_{t,x}(dy)$ будет иметь вид

$$\lambda_{t,x}(dy) = \lambda n\cdot\delta\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda n}\varphi(n)}\right)dy, \text{где } \delta(x) - \text{функция Дирака},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0),$$

$r=1$, коэффициенты $b^i(t,x)$, $a^{ij}(t,x)$ равны нулю.

Таким образом мы получим следующую кумулянту процесса $\eta(t)$

$$G_n(x,z) = \lambda n\left(\exp\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda n}\varphi(n)}\right) - \frac{z}{\sqrt{\lambda n}\varphi(n)} - 1\right).$$

Проверим условия теорем 3.2.1, 3.2.2, [2].

Для случая 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}G_n(x,\varphi^2(n)z) = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n}{\varphi^2(n)}\left(\exp\left(\frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}}\right) - \frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}} - 1\right) =$$

$$= \frac{z^2}{2} = G_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varphi^2(n)}G_n(x,\varphi^2(n)z)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\lambda n}}{\varphi(n)}\left(\exp\left(\frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}}\right) - 1\right) =$$

$$= z = \frac{\partial}{\partial z}G_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\varphi^2(n)}G_n(x,\varphi^2(n)z)\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}}\right) < \infty$$

равномерно по z на компактах. Применив преобразование Лежандра

$$H_0(u) = \sup_z(zu - G_0(z)) = \sup_z\left(zu - \frac{z^2}{2}\right),$$

получаем $H_0(u) = \frac{u^2}{2}$. Условия А–Д стр.61-66, [2] для функций $H_0(u)$ и $G_0(z)$ проверяются элементарным образом. Таким образом, в случае 1 функционал действия имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Для случая 2 получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}G_n(x,\varphi^2(n)z) = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n}{\varphi^2(n)}\left(\exp\left(\frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}}\right) - \frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}} - 1\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{k^2}\left(\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{kz}{\sqrt{\lambda}} - 1\right) = G_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varphi^2(n)}G_n(x,\varphi^2(n)z)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\lambda n}}{\varphi(n)}\left(\exp\left(\frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}}\right) - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{k}\left(\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right) = \frac{\partial}{\partial z}G_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\varphi^2(n)}G_n(x,\varphi^2(n)z)\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\varphi(n)z}{\sqrt{\lambda n}}\right) < \infty,$$

равномерно по z на компактах.

Проверим условие А стр.61, [2] ${G''_0}(z) = \exp\left(\frac{kz}{\sqrt{\lambda}}\right) > 0$, значит, $G_0(z)$ выпукла вниз – условие А выполнено.

Найдем преобразование Лежандра $H_0(u) = \sup\limits_z (zu - G_0(z)) =$
$= \sup\limits_z \left(zu - \frac{\lambda}{k^2}\left(\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{kz}{\sqrt{\lambda}} - 1\right)\right)$. Решаем уравнение ${G'_0}(z) = u$, находим $z(u) = \frac{\sqrt{\lambda}\ln(\frac{k}{\sqrt{\lambda}})}{k}$.

Значит, $H_0(u) = (\frac{u\sqrt{\lambda}}{k} + \frac{\lambda}{k^2})\ln(\frac{k}{\sqrt{\lambda}}u + 1) - \frac{u\sqrt{\lambda}}{k}$. Условия Б, В, [2] выполнены в силу того, что $H(\cdot)$ не зависит от x и t. Область определения функции $H_0(u)$, $u \in (-\frac{\sqrt{\lambda}}{k}, \infty)$, значит, условие Г, [2] тоже выполнено.

$$H'_0(u) = \frac{\sqrt{\lambda}}{k}\ln(\frac{k}{\sqrt{\lambda}}u + 1), \qquad u \in U_k,$$

где компакт $U_k \subset \{u : H_0(u) < \infty\}$ - условие Д, [2] выполнено. Таким образом, и в случае 2 функционал действия имеет вид, указанный в формулировке теоремы. $\square$

Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \infty$. На пространстве $L_1[0,1]$ определим метрику $\tilde{\rho}(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$. Рассмотрим вначале случайный процесс $\gamma_n(t) = \frac{\nu(nt)}{\sqrt{\lambda n}\varphi(n)}$. Через $D_1[0,1]$ обозначим множество функций $x(t) \in D[0,1]$, таких, что $x(0) \geq 0$, и $x(t)$ не убывает.

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \infty$. *Тогда семейство мер* $P_n(A) = P(\gamma_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathcal{B}(L_1[0,1], \tilde{\rho})$ *удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией* $\psi(n) = \varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}$ *и функционалом действия*

$$S(x) = \begin{cases} x(1), & \text{если } x(t) \in D_1[0,1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Предварительно докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Функционал* $S(x)$ *из (2) полунепрерывен снизу, множество функций* $\{x(t) : S(x) \leq c\}$ *компактно в* $(L_1[0,1], \tilde{\rho})$.

Доказательство. Обозначим $L = \{x(t) : S(x) \leq c\}$. Возьмем любую последовательность функций $x_n(t) \in L$. Покажем, что из последовательности $x_n(t)$ можно выделить фундаментальную в $(L_1[0,1], \tilde{\rho})$ подпоследовательность. Пусть ε любое положительное число, такое, что $\frac{2c}{\varepsilon} \in N$. Разобьем отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы длины $\frac{\varepsilon}{2c}$, получим набор точек $t_0 = 0,\ t_1 = \frac{\varepsilon}{2c}, ..., t_{\frac{2c}{\varepsilon}} = 1$. Из последовательности $x_n(t)$ выбираем подпоследовательность $x_{n_k}(t) : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(t_i) = x_i,\ i = 0, 1, ..., \frac{2c}{\varepsilon}$, такой выбор возможен по лемме Больцано-Вейерштрасса, так как $x_n(t) \leq c$ при $t \in [0,1],\ n \in N$.

Покажем, что $\exists\ k(\varepsilon) : \forall\ p, q \geq k(\varepsilon)\ \int_0^1 |x_{n_p}(t) - x_{n_q}(t)|dt < \varepsilon$. По предложенному выше построению

$$\exists\ k(\varepsilon) : \forall\ p, q \geq k(\varepsilon)\ \ |x_{n_p}(t_i) - x_{n_q}(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2},\ i = 0,\ 1, ...,\ \frac{2c}{\varepsilon}.$$

Тогда, используя монотонность функций $x_{n_p}(t)$ и $x_{n_q}(t)$, имеем

$$\forall\ p,q \geq k(\varepsilon)\ \int_0^1 |x_{n_p}(t) - x_{n_q}(t)|dt = \sum_k \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |x_{n_p}(t) - x_{n_q}(t)|dt \leq$$

$$\leq \sum_k \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\frac{\varepsilon}{2} + x_{n_p}(t_k) - x_{n_p}(t_{k-1})|dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2c}\sum_k (x_{n_p}(t_k) - x_{n_p}(t_{k-1})) \leq \varepsilon. \qquad (3)$$

Таким образом, в силу того, что ε может быть сколь угодно малым, мы доказали, что из последовательности $x_n(t)$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $x_{n_k}(t)$. Подпоследовательность $x_{n_k}(t)$ будет сходиться по мере, а значит из нее можно выделить подпоследовательность $x_{n_{k_r}}(t)$, которая будет сходиться почти всюду на отрезке $[0,1]$. Пусть $T \subseteq [0,1]$ множество лебеговой меры 1, на котором $x_{n_{k_r}}(t)$ сходится поточечно. Обозначим предел этой подпоследовательности на множестве T через $x(t),\ t \in T$. Функция $x(t)$ ограничена константой c, так как $x_n(t) \leq c$ при всех $t \in [0,1],\ n \in N$. Покажем, что эта функция является неубывающей. Пусть существуют $t_1, t_2 \in T : t_1 > t_2\ \ x(t_2) - x(t_1) = 2\delta > 0$. Тогда существует $r(\delta) :\ \forall\ r > r(\delta)\ x_{n_{k_r}}(t_2) - x_{n_{k_r}}(t_1) > \delta$, а это невозможно, так как функции $x_n(t)$ неубывающие при всех $n \in N$. Аналогично доказывается, что $x(t) \geq 0\ \forall\ t \in T$. В остальных точках отрезка $[0,1]$ доопределим функцию $x(t)$ следующим образом:

$$x(t) = \lim_{s \to t+0} x(s),\ s \in T.$$

Эти пределы существуют в силу монотонности функции $x(t)$ на множестве T. Полученная таким образом неотрицательная функция $x(t), t \in [0,1]$ ограничена константой c и неубывающая, значит,

$$\exists\ \widetilde{x}(t) \in L :\ \int_0^1 |x(t) - \widetilde{x}(t)|dt = 0.$$

Компактность доказана. Полунепрерывность снизу следует из компактности в силу полноты пространства $(L_1[0,1], \tilde{\rho})$. $\Box$

Лемма 2. *Пусть $a, b \in R$, $a < b$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$, тогда для всех достаточно больших n $[bf(n)] \in [af(n), bf(n)]$.*

Доказательство. Пусть $[bf(n)] < af(n)$, тогда $af(n) - [bf(n)] = (a-b)f(n) + \{bf(n)\} > 0$.
А это невозможно, так как при достаточно больших n $(a-b)f(n) < -1$. $\Box$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство.
1) Пусть $F \in \mathcal{B}(L_1[0,1], \tilde{\rho})$ – любое замкнутое множество, тогда, воспользовавшись тем, что случайный процесс $\gamma_n(t)$ с вероятностью 1 не убывает, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P_n(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P_n(F \cap D_1[0,1]) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P\left(\gamma_n(1) \geq S(F)\}\right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln \left(\sum_{k=[\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)]}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda n\}(\lambda n)^k}{k!} \right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln \left(\frac{\exp\{-\lambda n\}(\lambda n)^{[\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)]}}{[\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)]!} \right) +$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda n)^k}{([\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)]^k} \right) =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln \left(\frac{\exp\{-\lambda n\}(\lambda n)^{[\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)]}}{[\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)]!} \right).$$

Обозначим $[\varphi(n)\sqrt{\lambda n}S(F)] = f_n$ и применим формулу Стирлинга. Тогда выражение в последнем равенстве запишется как:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln \left(\frac{\exp\{-\lambda n + f_n + \ln(\lambda n) f_n - \ln(f_n) f_n\}}{\sqrt{2\pi n}} \right) =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{-f_n \ln\frac{f_n}{\lambda n}}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} = -S(F).$$

2) Пусть $G \in \mathcal{B}(L_1[0,1], \tilde{\rho})$ – любое открытое множество. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $S(G) < \infty$. Так как множество G открытое, то для любого $\delta > 0$ найдется такая монотонно возрастающая функция $x_\delta(t) \in G$, что $S(x_\delta(t)) < S(G) + \delta$ и $V_{r_\delta}(x_\delta(t)) \subset G$, где $V_{r_\delta}(x_\delta(t)) = \{y(t) \in L_1[0,1] : \int_0^1 |x_\delta(t) - y(t)|dt < r_\delta\}$. Тогда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P_n(G) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P_n(V_{r_\delta}(x_\delta(t))) \geq$$

$$\geq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P_n\{|\gamma_n(t_1) - x_\delta(t_1)| < r_\delta/2,\ |\gamma_n(t_2) - x_\delta(t_2)| < r_\delta/2,$$

$$..., |\gamma_n(1) - x_\delta(1)| < r_\delta/2,\ \gamma_n(t) \in V_{r_\delta}(x_\delta(t))\}, \quad (4)$$

где $t_1 = \frac{r_\delta}{2x_\delta(1)}$, $t_2 = \frac{2r_\delta}{2x_\delta(1)}, ...,$ $t_{\frac{2x_\delta(1)}{r_\delta}} = 1$. Тогда, используя монотонность процесса $\gamma_n(t)$ аналогично (3), получаем, что выражение (4) равно

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P(|\gamma_n(t_1) - x_\delta(t_1)| < r_\delta/2, ..., |\gamma_n(1) - x_\delta(1)| < r_\delta/2) \geq$$

$$\geq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P(x_\delta(t_1) - r_\delta/2 < \gamma_n(t_1) < x_\delta(t_1) + r_\delta/2,$$

$$..., x_\delta(1) - r_\delta/2 < \gamma_n(1) < x_\delta(1) + r_\delta/2).$$

Продолжим цепочку оценивания, используя лемму 2. Тогда последнее выражение в предыдущем неравенстве оценивается снизу как

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P\{\nu(nt_1) = [(x_\delta(t_1) + r_\delta/2)\varphi(n)\sqrt{\lambda n}],$$

$$..., \nu(n) = [(x_\delta(1) + r_\delta/2)\varphi(n)\sqrt{\lambda n}]\}. \tag{5}$$

Обозначим $[(x_\delta(t_k) + r_\delta/2)\varphi(n)\sqrt{\lambda n}] = f_k$, тогда в (5)

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P\{\nu(nt_1) = f_1, \nu(nt_2) = f_2, ..., \nu(n) = f_{\frac{2x_\delta(1)}{r_\delta}}\} =$$

$$= \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P\{\nu(nt_1) = f_1, \nu(nt_2) - \nu(nt_1) = f_2 - f_1,$$

$$..., \nu(n) - \nu(nt_{\frac{2x_\delta(1)}{r_\delta}-1}) = f_{\frac{2x_\delta(1)}{r_\delta}} - f_{\frac{2x_\delta(1)}{r_\delta}-1}\}.$$

Используя свойство независимости приращений процесса $\nu(t)$ и формулу Стирлинга, имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \sum_k \ln P\{\nu(n\frac{r_\delta}{2x_\delta(1)}) = f_k - f_{k-1}\} =$$

$$= -\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \sum_k (f_k - f_{k-1}) \ln \frac{f_k - f_{k-1}}{\lambda n} =$$

$$= -\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} [(x_\delta(1) + r_\delta/2)\varphi(n)\sqrt{\lambda n}] \ln \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}} > -x_\delta(1) - r_\delta.$$

Сделав предельный переход $\delta \longrightarrow 0$, получим

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n}\ln\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P_n(G) \geq -S(G).$$

□

Лемма 3. *Пусть последовательности случайных процессов $\zeta_n(t)$ и $\tilde{\zeta}_n(t)$ заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $t \geq 0$. Пусть их траектории принадлежат некоторому польскому пространству (X, ρ). На борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X, \rho)$ определим семейства мер*

$$P_n(B) = P(\zeta_n(\cdot) \in B), \quad \tilde{P}_n(B) = P(\tilde{\zeta}_n(\cdot) \in B).$$

Пусть для некоторой числовой последовательности $a(n)$ и функционала $I(x)$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = 0$, функционал $I(x)$ полунепрерывен снизу, множество функций $\{x(t) : I(x) \le c\}$ компактно, выполнены неравенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln P_n(F) \le -I(F), \text{ для любого замкнутого множества } F,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln P_n(G) \ge -I(G), \text{ для любого открытого множества } G,$$

где $I(B) = \inf\limits_{x\in B} I(x)$. Пусть, кроме того, $\forall\ \delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} a(n) \ln P(\rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) > \delta) = -\infty.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(F) \le -I(F), \text{ для любого замкнутого множества } F,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(G) \ge -I(G), \text{ для любого открытого множества } G.$$

Доказательство.
1) Пусть F – замкнутое множество из $\mathcal{B}(X,\rho)$. Заметим, что $\forall\ \delta > 0$ $\{\omega : \tilde{\zeta}_n \in F\} \subseteq \{\omega : \tilde{\zeta}_n \in F \cap \omega : \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) < \delta\} \cup \{\omega : \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \ge \delta\}$. Через F^δ обозначим множество $\{x(t) : \inf\limits_{y(t)\in F} \rho(x,y) < \delta\}$

$$\tilde{P}_n(F) \le P_n(F^\delta) + P(\rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \ge \delta).$$

Если $P_n(F^\delta) \le P(\rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \ge \delta)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(F) \le \lim_{n\to\infty} a(n) \ln 2P(\rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \ge \delta) = -\infty$$

Если $P_n(F^\delta) > P(\rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \ge \delta)$, то

$$\tilde{P}_n(F) \le 2P_n(F^\delta), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(F) = -I(F^\delta).$$

Перейдем к пределу при $\delta \to 0$, используя лемму 1 [7 с.366], получим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(F) = -S(F)$.
2) Пусть G – открытое множество из $\mathcal{B}(X,\rho)$. Достаточно рассмотреть случай $I(G) < \infty$. Так как G – открытое множество, то $\forall\ \alpha > 0\ \exists\ x_\alpha \in G : I(x_\alpha) < S(G) + \alpha$. При этом $\exists\ \delta_\alpha :\ V_{\delta_\alpha} = \{y \in G : \rho(x_\alpha, y) < \delta_\alpha\} \subset G$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(G) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \tilde{P}_n(V_{\delta_\alpha}) = \underline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \frac{\tilde{P}_n(V_{\delta_\alpha}) P_n(V_{\delta_\alpha/2})}{P_n(V_{\delta_\alpha/2})} \ge$$

$$\ge -I(G) - \alpha + \underline{\lim_{n\to\infty}} a(n) \ln \frac{\tilde{P}_n(V_{\delta_\alpha})}{P_n(V_{\delta_\alpha/2})}.$$

$$\{\omega : \zeta_n \in V_{\frac{\delta_\alpha}{2}}\} = \{\omega : \zeta_n \in V_{\frac{\delta_\alpha}{2}} \cap \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \geq \frac{\delta_\alpha}{2}\} \cup \{\omega : \zeta_n \in V_{\frac{\delta_\alpha}{2}} \cap \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) < \frac{\delta_\alpha}{2}\}.$$

$$P_n(V_{\delta_\alpha/2}) \leq P(\{\omega : \zeta_n \in V_{\frac{\delta_\alpha}{2}} \cap \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) < \frac{\delta_\alpha}{2}\}) + P(\{\omega : \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) \geq \frac{\delta_\alpha}{2}\}) =$$

$= P_n^1 + P_n^2$.
Покажем, что $\exists\, N_0 : \ \forall\, n \geq N_0\ P_n^1 > P_n^2$.
Допустим это не так, то есть $\forall\, N_0\ \exists\, \tilde{n} > N_0 : \ P_{\tilde{n}}^1 \leq P_{\tilde{n}}^2$.
Возьмем предел по таким $\tilde{n}$

$$-I(G) - \alpha \leq \lim_{\tilde{n}\to\infty} a(\tilde{n}) \ln(P_{\tilde{n}}^1 + P_{\tilde{n}}^2) \leq \lim_{\tilde{n}\to\infty} a(\tilde{n}) \ln(2P_{\tilde{n}}^2) = -\infty.$$

Получили противоречие, значит, при достаточно больших n $P_n^1 > P_n^2$

$$\{\omega : \zeta_n \in V_{\frac{\delta_\alpha}{2}} \cap \rho(\zeta_n, \tilde{\zeta}_n) < \frac{\delta_\alpha}{2}\} \subseteq \{\omega : \tilde{\zeta}_n \in V_{\delta_\alpha}\}.$$

Значит, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a(n) \ln \tilde{P}_n(G) \geq -I(G) - \alpha + \underline{\lim}_{n\to\infty} a(n) \ln \frac{P_n^1}{2P_n^1} = -I(G) - \alpha$.
Перейдем к пределу при $\alpha \to 0$, получим $\underline{\lim}_{n\to\infty} a(n) \ln \tilde{P}_n(G) \geq -I(G)$. □

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \infty$. *Тогда семейство мер* $P_n(A) = P(\eta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathcal{B}(L_1[0,1], \tilde{\rho})$ *удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией* $\psi(n) = \varphi(n)\sqrt{\lambda n} \ln \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}$ *и функционалом действия*

$$S(x) = \begin{cases} x(1), & \text{если } x(t) \in D_1[0,1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n} \ln \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P(\tilde{\rho}(\gamma_n, \eta_n) > \delta) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)\sqrt{\lambda n} \ln \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}}} \ln P\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{\lambda n} t}{\varphi(n)} dt > \delta\right) = -\infty,$$

то теорема 3 следует из леммы 3 и теоремы 2. □

Замечание 1. В теоремах 2, 3 рассматривалось пространство $(L_1[0,1], \tilde{\rho})$. Аналогичный результат можно получить, если рассмотреть пространство $(L_p, \tilde{\rho}_p)$, где $1 \leq p < \infty$, $\tilde{\rho}_p(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt$. Большие уклонения в таких пространствах рассматривались, например, в [3], [5]. Если рассмотреть пространство L_p с более сильной топологией: равномерной или Скорохода, то утверждение леммы 1 несправедливо.

Замечание 2. В теореме 1 можно рассматривать пространство $D[0,1]$ с метрикой Скорохода. Функционал действия будет иметь такой же вид. Это следует из теоремы 3.1 [1].

1. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктации в динамических системах под действием малых случайных возмущений // М. – 1979. – 424с.
2. *Вентцель А.Д.* Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов // М. – 1986. – 176с.
3. *Mogulskii A.A.* Large deviations for processes with independent increments // The annals of probability. – 1993. – Vol.21, № 1 – P.202-216.
4. *Arcones M. A.* The large deviation principe // Теория вероятностей и ее применения. – 2003. – Т.52, № 2 – P.134-149.
5. *James Lynch., Jayaram Sethuraman.* Large deviations for processes with independent increments // The annals of probability. – 1987. – Vol.15, № 2 – P.610-627.
6. *Deuchel J.D., Stroock D.W.* Large deviations // N-Y., Academic Press, 1989.
7. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов // М. – 2003. – 400с.
8. *Пухальский А.А.* Большие уклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения // М. – 2005. – 512с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
omboldovskaya@mail.ru

Получено 25.03.09