УДК 517.926(07)

©2009. **М.Б. Віра**

ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГОЛОВНОГО ОПЕРАТОРА

Досліджується можливість побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з тотожно виродженою головною матрицею при похідних у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць.

Розглянемо двоточкову крайову задачу для лінійної системи диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \quad (1)$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $t \in [0;1]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, $h \in N$, $B(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$, M, N – квадратні матриці $n-$го порядку, $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon), d(\varepsilon)$ – відповідно: шуканий і задані $n-$вимірні вектори.

Будемо передбачати, що виконуються такі умови:

1°. матриці $B(t,\varepsilon), A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення на відрізку $[0;1]$ за степенями малого параметра ε :

$$B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k B_k(t), A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t), f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2°. коефіцієнти розвинень (3) нескінченно диференційовні на $[0;1]$;

3°. $\det B_0(t) \equiv 0, \forall t \in [0;1]$;

4°. гранична в'язка матриць

$$L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t) \quad (4)$$

регулярна [1] при всіх $t \in [0;1]$ і зберігає на цьому відрізку постійну кронекерову структуру.

Крайова задача вигляду (1), (2) розглядалась у роботах [2], [3] у випадку, коли матриця $B(t,\varepsilon)$ при похідній – одинична, де для побудови асимптотичного розв'язку застосовувався метод примежових функцій. У роботі [4] побудована асимптотика розв'язку даної задачі у випадку, коли гранична в'язка матриць має прості скінченні і нескінченній елементарні дільники. При цьому використовувались результати асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), здійсненого в [5, 6].

У даній статті, розвиваючи результати, отримані в [4], вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у більш складному випадку, коли в'язка матриць (4) має кратний спектр. Оскільки головна складність у розв'язанні даної задачі полягає в наявності кратних елементарних дільників, а не в їх кількості, то для спрощення викладок будемо передбачати, що:

5°. в'язка (4) має скінченний елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ кратності $p=n-1$ і простий – нескінченний, причому $\lambda_0(t)\neq 0, \forall t\in[0;1]$.

Як показано в [5, п.1.5], з цієї умови випливає, що власному значенню $\lambda_0(t)$ в'язки (4) відповідає жорданів ланцюжок матриці $A_0(t)$ відносно $B_0(t)$ завдовжки $n-1$, вектори якого визначаються за формулами

$$\varphi_i(t)=[H(t)B_0(t)]^{i-1}\varphi(t), i=\overline{1,p},$$

де $H(t)$ – напівобернена матриця до матриці $(A_0-\lambda_0B_0)$, а $\varphi(t)$ – власний вектор в'язки. У свою чергу нульовому власному значенню матриці $B_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок відносно $A_0(t)$ завдовжки 1, який складається лише із власного вектора: $B_0(t)\widetilde{\varphi}=0$. Позначивши через $\psi(t),\widetilde{\psi}(t)$ нулі матриць $(A_0(t)-\lambda_0(t)B_0(t))^*$ та $B_0^*(t)$ відповідно, визначимо їх так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B_0(HB_0)^{i-1}\varphi,\psi)=\delta_{i,p}, i=\overline{1,p}, (A_0\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=1,$$

де (x,y) – скалярний добуток в унітарному $n-$вимірному просторі, в якому розглядається дана задача, а $\delta_{i,p}$ – символ Кронекера.

При цьому згідно з [7] вектори $\varphi(t),\widetilde{\varphi}(t),\psi(t),\widetilde{\psi}(t)$ і матрицю $H(t)$ можна визначити так, щоб вони мали такий же ступінь гладкості, що і матриці $A_0(t), B_0(t)$, тобто були нескінченно диференційовними, що й передбачається в подальших викладках.

Згідно зі структурою загального розв'язку системи (1), встановленого в [6], наближений розв'язок крайової задачі (1), (2) будуватимемо у вигляді

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t(\lambda_0(t)+\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon))dt)+$$

$$+v_m(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon), \tag{5}$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $v_m(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\xi_m(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon)=\mu^{-(p-1)}\sum_{k=0}^{m}\mu^k u_k^{(i)}(t), \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t), i=\overline{1,n-1}, \tag{6}$$

$$v_m(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(t), \xi_m(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\xi_k(t), \widetilde{v}_m(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\widetilde{v}_k(t), \tag{7}$$

де $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, а m – натуральне число.

Покажемо, що коефіцієнти розвинень (6), (7) можна визначити так, щоб вектор (5) задовольняв систему (1) і крайову умову (2) з точністю до $O(\varepsilon^{m+1})$. Підставивши (5) в (1) і прирівнявши вирази при однакових експонентах та без них, дістанемо

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)(u_m^{(i)}(t,\varepsilon))' + \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)u_m^{(i)}(t,\varepsilon), i = \overline{1,p}; \tag{8}$$

$$\varepsilon^{h+1}\xi_m(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)(v_m(t,\varepsilon))' + B(t,\varepsilon)v_m(t,\varepsilon) = \varepsilon\xi_m(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)v_m(t,\varepsilon); \tag{9}$$

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)(\widetilde{v}_m(t,\varepsilon))' = A(t,\varepsilon)\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon). \tag{10}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ в (8)–(10), отримаємо відповідно

$$(A_0(t) - \lambda_0(t)B_0(t))u_k^{(i)}(t) = b_k^{(i)}(t), k = \overline{0,m}, i = \overline{1,n-1}, \tag{11}$$

де

$$b_0^{(i)}(t) = 0; b_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^{(i)} B_0 u_{k-s}^{(i)} + g_k^{(i)}(t), k = \overline{1,m}, \tag{12}$$

$$g_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k-p} \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-s}{p}\right]} \lambda_s^{(i)} B_j u_{k-s-pj}^{(i)} + \lambda_0 \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} B_s u_{k-ps}^{(i)} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-ph}{p}\right]} B_s (u_{k-hp-ps}^{(i)})' - \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} A_s u_{k-ps}^{(i)}, k = \overline{p,m}, i = \overline{1,p},$$

де $[a]$ – ціла частина числа a;

$$B_0 v_k(t) = a_k(t), k = \overline{0,m}, \tag{13}$$

де

$$a_k(t) = \xi_{k-1} A_0 \widetilde{\varphi} + l_k, k = \overline{1,m},$$

$$l_k(t) = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-1-j} \xi_i A_j v_{k-1-i-j} - \sum_{i=1}^{k} B_i v_{k-i} - \sum_{i=0}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-1-j} \xi_i B_j v'_{k-h-1-i-j};$$

$$A_0 \widetilde{v}_k(t) = \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t) \widetilde{v}'_{k-h-i}(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t) \widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t), k = \overline{0,m}. \tag{14}$$

Дослідимо кожну із отриманих систем алгебраїчних рівнянь окремо методом із [6]. Спершу розглянемо рівняння (11). За виконання умови розв'язності

$$(b_k^{(i)}(t), \psi(t)) = 0, i = \overline{1,n-1}, \tag{15}$$

вектори $u_k^{(i)}, i = \overline{1,p}$ знаходитимемо з них за формулою

$$u_k^{(i)}(t) = H b_k^{(i)}(t) + c_k^{(i)} \varphi(t), i = \overline{1,p}, \tag{16}$$

де $c_k^{(i)}, i=\overline{1,p}$ – сталі множники, які підлягають визначенню. Здійснюючи взаємну підстановку формул (12), (16) при $k<p$, дістанемо

$$b_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=1}^{k-s}c_s^{(i)}P_r^{k-s}(\lambda^{(i)})B_0(HB_0)^{r-1}\varphi, i=\overline{1,p}, \tag{17}$$

$$u_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k}\sum_{r=0}^{k-s}c_s^{(i)}P_r^{k-s}(\lambda^{(i)})(HB_0)^{r}\varphi, i=\overline{1,p}, \tag{18}$$

де $P_s^j(\lambda^{(i)})=\sum_{k_1+\ldots+k_j=j}\lambda_{k_1}^{(i)}\lambda_{k_2}^{(i)}\ldots\lambda_{k_s}^{(i)}$– сума всіх можливих добутків s множників з натуральними індексами $k_1,\ldots,k_s$, сума яких дорівнює j. Аналізуючи формулу (17), приходимо до висновку, що при $k<p$ умова (15) виконується.

Поклавши $k=p$, отримаємо

$$b_p^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=1}^{p-s}c_s^{(i)}P_k^{p-s}(\lambda^{(i)})B_0(HB_0)^{k-1}\varphi+\delta_{h,1}B_0(u_0^{(i)})'-A_1u_0^{(i)}+\lambda_0B_1u_0^{(i)}.$$

Тоді умова (15) запишеться у вигляді

$$c_0^{(i)}[(\lambda_1^{(i)})^p-(\Gamma_1\varphi,\psi)]=0,$$

де

$$\Gamma_1=A_1-\lambda_0B_1-\delta_{h,1}B_0\frac{d}{dt}.$$

Припустивши, що

$$(\Gamma_1\varphi,\psi)\neq 0, \forall t\in[0;1], \tag{19}$$

звідси знаходимо p відмінних від нуля функцій $\lambda_1^{(j)}(t)$:

$$\lambda_1^{(j)}(t)=\sqrt[p]{|(\Gamma_1\varphi,\psi)|}\exp\left(i\frac{arg(\Gamma_1\varphi,\psi)+2\pi(j-1)}{p}\right), j=\overline{1,p}.$$

Підставляючи далі (12) у (16) при $k>p$, дістанемо такі формули для векторів $b_k^{(i)}(t), i=\overline{1,n-1}$:

$$b_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}c_s^{(i)}P_j^{k-s}(\lambda^{(i)})B_0(HB_0)^{j-1}\varphi+r_k^{(i)}(t),$$

де

$$r_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k-p}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-s}{p}\right]}\sum_{j=0}^{k-mp-s}\sum_{r=1}^{m}(-1)^r c_s^{(i)}P_{r,j}^{m}(H\Gamma,HB_0)\left[P_j^{k-mp-s}(\lambda^{(i)})\right]\varphi+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-p-1}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1-s}{p}\right]}\sum_{l=1}^{k-mp-s}c_s^{(i)}P_l^{k-mp-s}(\lambda^{(i)})P_l^{m}(HB)\varphi+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-2p-1}\sum_{m=2}^{\left[\frac{k-1-s}{p}\right]}\sum_{j=1}^{k-mp-s}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{r}(-1)^l c_s^{(i)} P_{j,l}^{m-r,r}(HB,H\Gamma)\left[P_j^{k-mp-s}(\lambda^{(i)})\right]\varphi,$$

$$k=\overline{p,m}, i=\overline{1,n-1}. \tag{20}$$

Символом $P_{r,j}^m(H\Gamma,HB_0)$ тут позначається сума всіх можливих добутків r „множників“ $H\Gamma_{s_1},\ldots,H\Gamma_{s_r}$, сума індексів яких дорівнює m і j „множників“HB_0, де $\Gamma_s=A_s-\lambda_0 B_s-\sum_{l=1}^{s}\delta_{h,l}B_{s-l}\frac{d}{dt}, s=1,2,\ldots$. При цьому перший множник у відповідних доданках не містить H. А залежність $P_{r,j}^m(H\Gamma,HB_0)\left[P_j^s(\lambda^{(i)})\right]$ між $P_{r,j}^m(H\Gamma,HB_0)$ і $P_j^s(\lambda^{(i)})$ визначається наступним чином: „прив'язавши“ кожен „множник“ $\lambda_{l_k}^{(i)}, k=\overline{1,j}$, другого виразу до множника HB_0, здійснюються всеможливі перестановки $H\Gamma_{l_n}, n=\overline{1,r}$ та $\lambda_{l_k}^{(i)}HB_0, k=\overline{1,j}$.

Символ $P_l^m(HB)$ позначає суму всіх можливих добутків l „множників“ $HB_{i_1},\ldots,HB_{i_l}$ з цілими невід'ємними індексами $i_1,\ldots i_l$, сума яких дорівнює m. При цьому перший множник H у відповідних доданках відсутній.

Символ $P_{m,s}^{l,k}(HB,H\Gamma)$ позначає суму всеможливих добутків m „множників“ $HB_{i_1},\ldots,HB_{i_m}$ з цілими невід'ємними індексами $i_1,\ldots i_m$, сума яких дорівнює l і s множників $H\Gamma_{i_1},\ldots,H\Gamma_{i_s}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює k. Крім того, у всіх доданках „знімається“ перший множник H. Залежність $P_{m,s}^{l,k}(HB,H\Gamma)\left[P_m^n(\lambda^{(i)})\right]$ між $P_{m,s}^{l,k}(HB,H\Gamma)$ і $P_m^n(\lambda^{(i)})$ визначається наступним чином: „прив'язавши“ кожен множник $\lambda_{l_k}^{(i)}, k=\overline{1,m}$, другого виразу до одного із „множників“$HB_{l_r}, r=\overline{1,m}$, першого виразу всеможливими способами, здійснюється перестановка множників $H\Gamma_{l_j}, j=\overline{1,s}$ та $\lambda_{l_k}^{(i)}HB_{l_r}, k=\overline{1,m}, r=\overline{1,m}$. Наприклад,

$$P_{2,1}^{1,1}(HB,H\Gamma)\left[P_2^4(\lambda^{(i)})\right]=2\lambda_1^{(i)}\lambda_3^{(i)}(B_0HB_1H\Gamma_1+B_1HB_0H\Gamma_1)+$$

$$+\Gamma_1 2\lambda_1^{(i)}\lambda_3^{(i)}HB_0HB_1+\Gamma_1 2\lambda_1^{(i)}\lambda_3^{(i)}HB_1HB_0+$$

$$\lambda_1^{(i)}(B_0H\Gamma_1\lambda_3^{(i)}HB_1+B_1H\Gamma_1\lambda_3^{(i)}HB_0)+$$

$$+\lambda_3^{(i)}(B_0H\Gamma_1\lambda_1^{(i)}HB_1+B_1H\Gamma_1\lambda_1^{(i)}HB_0)+(\lambda_2^{(i)})^2(B_0HB_1H\Gamma_1+B_1HB_0H\Gamma_1)+$$

$$+\lambda_2^{(i)}(B_0H\Gamma_1\lambda_2^{(i)}HB_1+B_1H\Gamma_1\lambda_2^{(i)}HB_0)+\Gamma_1(\lambda_2^{(i)})^2HB_0HB_1+\Gamma_1(\lambda_2^{(i)})^2HB_1HB_0.$$

Використовуючи формули (20) і умову (15), можна знайти будь-які коефіцієнти розвинень для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n-1}$. Якщо $\lambda_s^{(i)}(t)$ визначені при $s<k$, то

$$\lambda_k^{(i)}(t)=-\frac{(\widetilde{g}_k^{(i)}(t),\psi)+\widetilde{P}_p^{p+k-1}(\lambda^{(i)})}{p(\lambda_1^{(i)})^{p-1}}, \tag{21}$$

де

$$\widetilde{g}_k^{(i)}(t)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{p+k-1}{p}\right]}\sum_{j=0}^{p+k-1-mp}\sum_{r=1}^{m}(-1)^r P_{r,j}^m(H\Gamma,HB)\left[P_j^{p+k-1-mp}(\lambda^{(i)})\right]\varphi+$$

$$+\sum_{m=1}^{[\frac{p+k-2}{p}]}\sum_{s=1}^{p+k-1-mp} P_s^{p+k-1-mp}(\lambda^{(i)})P_s^m(HB)\varphi+$$

$$+\sum_{m=2}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-1-mp}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{r}(-1)^l P_{j,l}^{m-r,r}(HB,H\Gamma)\left[P_j^{p+k-1-mp}(\lambda^{(i)})\right]\varphi$$

– вже відомий вираз згідно з припущенням індукції, а $\widetilde{P}_p^{p+k-1}(\lambda^{(i)})$ містить тільки ті $\lambda_j^{(i)}$, в яких $j<k$.

Знайшовши в такий спосіб $\lambda_k^{(i)}(t), i=\overline{1,p}, k=\overline{1,m}$, можна одержати відповідні вектори $u_k^{(i)}(t)$, в яких ще залишаються невідомими сталі множники $c_k^{(i)}$, $i=\overline{1,n-1}$, $k=\overline{0,m}$, процес визначення яких описується далі.

Аналогічно, розв'язуючи рівняння (13), вектори $v_k, k=\overline{0,m}$ знаходитимемо за формулами

$$v_k=\sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(n)}G(t)\widetilde{a}_{k-i}(t)+c_k^{(n)}\widetilde{\varphi}, k=\overline{0,m}, \tag{22}$$

де

$$\widetilde{a}_k(t)=\xi_{k-1}(t)A_0(t)\widetilde{\varphi}(t)+n_k(t), k=\overline{1,m},$$

$$n_k(t)=\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i}\xi_i(t)A_j(t)G(t)\widetilde{a}_{k-1-i-j}(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1}B_i(t)G(t)\widetilde{a}_{k-i}(t)-\sum_{i=0}^{k-h-1}\sum_{j=0}^{k-h-2-i}\xi_i(t)B_j(t)(G\widetilde{a}_{k-h-1-i-j})'+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2}\xi_i(t)A_{k-1-i}(t)\widetilde{\varphi}(t)-B_k\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{i=0}^{k-h-1}\xi_i(t)B_{k-h-1-i}(t)(\widetilde{\varphi}(t))', k=\overline{1,m},$$

$G(t)$ – матриця, напівобернена до матриці $B_0(t)$, а $c_k^{(n)}, k=\overline{0,m}$ – сталі, які підлягають визначенню.

Припустивши, що

$$(B_1(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t))\neq 0, \forall t\in[0;1], \tag{23}$$

із умови розв'язності визначимо коефіцієнти $\xi_k(t)$:

$$\xi_0(t)=(B_1\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)), \xi_{k-1}(t)=-(n_k(t),\widetilde{\psi}(t)), k=\overline{2,m}. \tag{24}$$

Оскільки згідно з умовою 5° $\det A_0(t)\neq 0, \forall t\in[0;1]$, то із рівнянь (14) однозначно визначаються коефіцієнти розвинення для вектора $\widetilde{v}(t,\varepsilon)$:

$$\widetilde{v}_k(t)=A_0^{-1}(t)[\sum_{i=0}^{k-h}B_i(t)(\widetilde{v}_{k-h-i}(t))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t)-f_k(t)], k=\overline{0,m}. \tag{25}$$

Припустимо, що виконується умова

6°. $Re\lambda_0(t) < 0, Re\xi_0(t) < 0, \forall t \in [0;1]$.

Тоді, підставивши вираз (5) у крайову умову (2) і знехтувавши експоненціально малими доданками, дістанемо

$$M\sum_{i=1}^{p} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + \mu^{p-1}Mv_m(0,\varepsilon) + \mu^{p-1}M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon) + \mu^{p-1}N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon) = \mu^{p-1}d(\varepsilon).$$

Прирівнявши в цій рівності коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо систему рівнянь

$$M\sum_{i=1}^{p} u_k^{(i)}(0) + Mv_{\frac{k-(p-1)}{p}}(0) + M\widetilde{v}_{\frac{k-(p-1)}{p}}(0) + N\widetilde{v}_{\frac{k-(p-1)}{p}}(1) = d_{\frac{k-(p-1)}{p}}, k = \overline{0,m}, \quad (26)$$

де $v_{\frac{l}{s}} = 0$, якщо l не ділиться на s.

Припустимо, що

$$\det M \neq 0. \quad (27)$$

Тоді при $k < p-1$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_k^{(i)}(0) = 0,$$

звідки, враховуючи (18), дістанемо

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{k-r} c_s^{(i)} P_r^{k-s}(\lambda^{(i)}(0)) M (HB_0)^r \varphi = 0, k = \overline{0,p-2}.$$

Звідси, беручи до уваги лінійну незалежність векторів $(HB_0)^i\varphi, i = \overline{0,p-1}$, приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{k-r} c_s^{(i)} P_r^{k-s}(\lambda^{(i)}(0)) = 0, r = \overline{0,k}, k = \overline{0,p-2}. \quad (28)$$

Поклавши у (26) $k = p-1$ і врахувавши при цьому (18), (22), (27), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1-s} c_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\lambda^{(i)})(HB_0)^k\varphi + c_0^{(n)}\widetilde{\varphi} = M^{-1}d_0 - \widetilde{v}_0(0) - M^{-1}N\widetilde{v}_0(1). \quad (29)$$

Розкладемо вектор у правій частині рівняння (29) за векторами базису $(H(0)B_0(0))^i\varphi(0)$, $i = \overline{0,p-1}, \widetilde{\varphi}(0)$:

$$M^{-1}d_0 - \widetilde{v}_0(0) - M^{-1}N\widetilde{v}_0(1) = \sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i^{(p-1)}[H(0)B_0(0)]^i\varphi(0) + \alpha_p^{(p-1)}\widetilde{\varphi}(0).$$

Врахувавши цей розклад та лінійну незалежність базисних векторів $(H(0)B_0(0))^i\varphi(0)$, $i=\overline{0,p-1}$, $\widetilde{\varphi}(0)$, отримаємо

$$\sum_{s=0}^{p-1-k}\sum_{i=1}^{p} c_s^{(i)} P_k^{p-1-s}(\lambda^{(i)}(0)) = \alpha_k^{(p-1)}, k=\overline{0,p-1}; \tag{30}$$

$$c_0^{(n)} = \alpha_p^{(p-1)}.$$

Тоді, добавивши останнє рівняння із (30) до системи (28) при $r=k$, дістанемо таку систему рівнянь для знаходження сталих $c_0^{(i)}, i=\overline{1,p}$:

$$\sum_{i=1}^{p} c_0^{(i)}[\lambda_1^{(i)}(0)]^k = 0, k=\overline{0,p-2};$$

$$\sum_{i=1}^{p} c_0^{(i)}[\lambda_1^{(i)}(0)]^{p-1} = \alpha_{p-1}^{(p-1)}.$$

Позначивши $c_0 = col(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, \ldots, c_0^{(p)})$, $m_0 = col(0,\ldots,0,\alpha_{p-1}^{(p-1)})$,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)}(0) & \lambda_1^{(2)}(0) & \ldots & \lambda_1^{(p)}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1^{(1)}(0))^{p-1} & (\lambda_1^{(2)}(0))^{p-1} & \ldots & (\lambda_1^{(p)}(0))^{p-1} \end{pmatrix},$$

запишемо цю систему у векторно-матричному вигляді

$$Wc_0 = m_0.$$

Оскільки визначник останньої системи є визначником Вандермонда, який буде відмінним від нуля згідно з умовою (19), то із неї однозначно визначаються сталі $c_0^{(i)}, i=\overline{1,p}$:

$$c_0 = W^{-1}m_0.$$

Розглянемо умову (26) у загальному вигляді

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s} c_s^{(i)} P_j^{k-s}(\lambda^{(i)})(HB_0)^j\varphi + c^{(n)}_{\frac{k-(p-1)}{p}}\widetilde{\varphi} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{p} Hr_k^{(i)}(0) + M^{-1}d_{\frac{k-(p-1)}{p}} - \widetilde{v}_{\frac{k-(p-1)}{p}}(0) - M^{-1}N\widetilde{v}_{\frac{k-(p-1)}{p}}(1) -$$

$$-\delta_{k,mp-1}\sum_{i=0}^{m-2} c_i^{(n)} G(0)\widetilde{a}_{m-1-i}(0).$$

Позначивши p_k вектор у правій частині останнього рівняння, розкладемо його за базисом $(H(0)B_0(0))^j\varphi(0), j=\overline{0,p-1}, \widetilde{\varphi}(0)$:

$$p_k=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i^{(k)}[H(0)B_0(0)]^i\varphi(0)+\alpha_p^{(k)}\widetilde{\varphi}(0).$$

Тоді, враховуючи лінійну незалежність базисних векторів, приходимо до системи

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{k-j}c_s^{(i)}P_j^{k-s}(\lambda^{(i)})=\alpha_j^{(k)}, j=\overline{0,p-1}, \tag{31}$$

$$c^{(n)}_{\frac{k-(p-1)}{p}}=\alpha_n^{(k)}.$$

Врахувавши останнє рівняння системи (31), а також знайдені на попередніх кроках рівняння, що містять сталі $c_0^{(i)},c_1^{(i)},\dots,c_{k-p+1}^{(i)}, i=\overline{1,p}$, дістанемо систему для визначення сталих $c_{k-p+1}^{(i)}, i=\overline{1,p}$:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p}c_{k-p+1}^{(i)}=\alpha_0^{(k-p+1)},$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p}c_{k-p+1}^{(i)}\lambda_1^{(i)}=\alpha_1^{(k-p+2)}-\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{k-p}c_s^{(i)}P_1^{k-s-p+2}(\lambda^{(i)}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{p}c_{k-p+1}^{(i)}(\lambda_1^{(i)})^{p-1}=\alpha_{p-1}^{(k)}-\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{k-p}c_s^{(i)}P_{p-1}^{k-s}(\lambda^{(i)}).$$

Записавши її у векторно-матричній формі

$$Wc_{k-p+1}=m_{k-p+1},$$

де $c_{k-p+1}=col(c_{k-p+1}^{(1)},c_{k-p+1}^{(2)},\dots,c_{k-p+1}^{(p)})$, m_{k-p+1} – вектор у правій частині, знайдемо

$$c_{k-p+1}=W^{-1}m_{k-p+1}.$$

Отже,

$$c_{k-p+1}^{(i)}=\{W^{-1}m_{k-p+1}\}_i, i=\overline{1,n-1}, c_{k-p+1}^{(n)}=\alpha_n^{(kp-p^2+2p-1)},$$

де $\{l\}_k$ – k-й елемент вектор-стовпця l.

Визначення сталих $c_k^{(i)}, i=\overline{1,n}, k=\overline{0,m}$ завершує побудову векторного виразу (5), який задовольняє крайову задачу (1), (2) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$.

Методами роботи [4] можна показати, що за виконання накладених умов цей вираз є асимптотичним зображенням єдиного точного розв'язку $x(t,\varepsilon)$ даної задачі. При цьому має місце оцінка

$$\|x_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\|\le c\varepsilon^{\frac{m+2}{p}-2-h},$$

де c – стала, що не залежить від ε.

Підсумком наведених викладок є наступна теорема.

Теорема. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 6^\circ$*, а також (19), (27), (23), то крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t(\lambda_0(t)+\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon))dt)+$$

$$+v_m(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{m+2}{p}-h-2}),$$

де вектор-функції $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $v_m(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ *і скалярні функції* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\xi_m(t,\varepsilon)$ *зображаються розвиненнями (6), (7), коефіцієнти яких знаходяться за формулами (16), (22), (25), (21), (24).*

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 548с.
2. *Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённой линейной краевой задачи // Докл. АН Украины. – 1994. – №1. – С.7-10.
3. *Каранджулов Л.И.* Линейные краевые задачи для сингулярно возмущённых дифференциальных систем // Докл. АН Украины. – 1996. – №7. – С.1-5.
4. *Яковец В.П., Вира М.Б* Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна-2008. Воронеж: ВорГУ. – 2008. – С.319-332.
5. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294с.
6. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Выща школа, 1991. – 207с.
7. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. anal. – 1965. – 161, №1. – P.67-77.

Ніжинський державний ун-т ім. М.Гоголя
VyraMaryna@mail.ru

Получено 03.02.09