

УДК 539.3

©2009. Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

В данной работе рассматриваются трехмерные задачи об установившихся колебаниях трехслойных изотропных пластин с жестко защемленными плоскими гранями. Полуобратным методом получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Исследованы дисперсионные уравнения, возникающие при построении потенциального и вихревого состояний, представлены зависимости фазовых и групповых скоростей мод.

Постановка задачи. Рассматривается задача об установившихся колебаниях пластины, составленной из трех изотропных слоев симметричного строения относительно ее срединной плоскости.

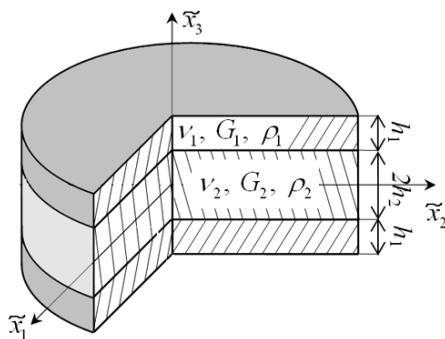


Рис.1. Трехслойная изотропная пластина симметричного строения

Отнесем пластину к координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ (рис.1), где \tilde{x}_3 – расстояние от срединной плоскости. Тогда $|x_3| \leq (h_1 + h_2)$, причем h_1 – толщина внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщина внутреннего слоя. В дальнейшем величины, относящиеся к внешнему слою, будем обозначать индексом (1), к внутреннему – индексом (2). Физико-механические характеристики материалов слоев обозначим через \tilde{G}_m, ν_m ($m = 1, 2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига, а ν_m – коэффициент Пуассона, ρ_m – плотность материала, m – номер слоя.

Введем следующие безразмерные величины:

$$x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R),$$

$$\lambda = h/R, \quad h = h_1 + h_2, \quad \lambda_1 = h_1/h, \quad \lambda_2 = h_2/h,$$

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_{i(m)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \quad \sigma_{ij(m)} = \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = 1, 2,$$

$$G_m = \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, \quad G_1 = G, \quad G_2 = 1.$$

Тогда задача об установившихся колебаниях рассматриваемой трехслойной пластины сводится к интегрированию уравнений движения

$$\begin{cases} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{1(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{1(m)} + \nu_{0(m)} \partial_1 \theta_m = 0, \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{2(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{2(m)} + \nu_{0(m)} \partial_2 \theta_m = 0, \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_m &= \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{3(m)}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ \nu_{0(m)} &= 1 / (1 - 2\nu_m), \quad \Omega_m^2 = h^2 \omega^2 \rho_m / \tilde{G}_m = h^2 \omega^2 / c_{2(m)}^2, \quad c_{2(m)} = \sqrt{\tilde{G}_m / \rho_m}, \\ \omega &\text{ – круговая частота колебаний.} \end{aligned}$$

В силу имеющейся симметрии относительно срединной плоскости пластины ($x_3 = 0$) граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_{i(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, \\ u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) \quad (i = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (2)$$

С использованием метода И.И.Воровича [1] однородные решения краевой задачи (1), (2) будем искать в виде суммы вихревого и потенциального состояний

$$u_{i(m)}^\pm(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}^\pm(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}; m = 1, 2).$$

Знаки "+" и "-" относятся соответственно к симметричной и кососимметричной деформациям пластины относительно плоскости $x_3 = 0$.

Вихревое решение. Перемещения вихревого состояния имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1(m)B}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= p_{(m)}^\pm(x_3) \partial_2 B^\pm(x_1, x_2), \\ u_{2(m)B}^\pm &= -p_{(m)}^\pm(x_3) \partial_1 B^\pm(x_1, x_2), \quad u_{3(m)B}^\pm = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в краевую задачу (1), (2), получаем уравнения для определения функций $B^\pm(x_1, x_2)$

$$D^2 B^\pm(x_1, x_2) - (\delta^\pm / \lambda)^2 B^\pm(x_1, x_2) = 0$$

и следующую спектральную задачу для нахождения собственных функций $p_{(m)}^\pm(x_3)$ и параметра δ^\pm :

$$\begin{aligned} p_{(m)}''(x_3) + l_{(m)}^2 p_{(m)}(x_3) &= 0, \\ p_{(1)}(1) = 0, \quad p_{(1)}(\lambda_2) = p_{(2)}(\lambda_2), \quad G p_{(1)}'(\lambda_2) &= p_{(2)}'(\lambda_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $l_{(m)}^2 = \Omega_m^2 + \delta^2$, а штрих здесь и далее означает производную по x_3 .

Собственные функции спектральной задачи (4) получаются такими

$$\begin{aligned} p_{(1)k}^+(x_3) &= \cos l_{(2)k}^+ \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3) + \frac{1}{G} \frac{l_{(2)k}^+}{l_{(1)k}^+} \sin l_{(2)k}^+ \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3), \\ p_{(2)k}^+(x_3) &= \cos l_{(2)k}^+ x_3, \\ p_{(1)k}^-(x_3) &= \sin l_{(2)k}^- \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3) - \frac{1}{G} \frac{l_{(2)k}^-}{l_{(1)k}^-} \cos l_{(2)k}^- \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3), \\ p_{(2)k}^-(x_3) &= \sin l_{(2)k}^- x_3, \end{aligned}$$

а собственные значения δ_k^\pm находятся из дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned} -l_{(2)}^+ \sin l_{(2)}^+ \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)}^+ \lambda_1 + Gl_{(1)}^+ \cos l_{(2)}^+ \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)}^+ \lambda_1 &= 0, \\ l_{(2)}^- \cos l_{(2)}^- \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)}^- \lambda_1 + Gl_{(1)}^- \sin l_{(2)}^- \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)}^- \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно для вихревого решения имеем

$$u_{1(m)B}^\pm = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}^\pm(x_3) \partial_2 B_k^\pm, \quad u_{2(m)B}^\pm = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}^\pm(x_3) \partial_1 B_k^\pm, \quad u_{3(m)B}^\pm = 0. \quad (6)$$

При $\omega = 0$ уравнения (5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (1 + 1/G) \cos \delta_k^+ + (1 - 1/G) \cos(2\lambda_2 - 1) \delta_k^+ &= 0, \\ (1 + 1/G) \sin \delta_k^- + (1 - 1/G) \sin(2\lambda_2 - 1) \delta_k^- &= 0 \end{aligned}$$

и совпадают с известными [2].

В случае $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G = 1$ ($\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = \tilde{G}$), $\rho_1 = \rho_2$ уравнения (5) принимают вид [3]

$$\cos \sqrt{\Omega^2 + (\delta^+)^2} = 0, \quad \sin \sqrt{\Omega^2 + (\delta^-)^2} = 0, \quad \Omega^2 = h^2 \omega^2 \rho / \tilde{G}.$$

Потенциальное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{j(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}^\pm(x_3) \partial_j C^\pm(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ u_{3(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}^\pm(x_3) C^\pm(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Из соотношений (1), (2), (7) следует, что функции $C^\pm(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$D^2 C^\pm(x_1, x_2) - (\gamma^\pm / \lambda)^2 C^\pm(x_1, x_2) = 0,$$

а для функций $n_{(m)}^\pm(x_3)$, $q_{(m)}^\pm(x_3)$ получаем задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} n_{(m)}'' + [\Omega_m^2 + \gamma^2 (1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' &= 0, \\ q_{(m)}'' + (\Omega_m^2 + \gamma^2) / (1 + \nu_{0(m)}) q_{(m)} + \lambda^{-1} \gamma^2 \nu_{0(m)} / (1 + \nu_{0(m)}) n_{(m)}' &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n_{(1)}(1) = 0, \quad q_{(1)}(1) = 0, \quad n_{(1)}(\lambda_2) = n_{(2)}(\lambda_2), \quad q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2), \\ G [q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(\lambda_2)] = q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(2)}'(\lambda_2), \\ G [\lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(\lambda_2)] = \\ = \lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q_{(2)}'(\lambda_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Общее решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_2^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_3^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + H_4^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3, \\ q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_2^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_3^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + Q_4^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_2^+(x_3) &= H_5^+ \cos \gamma_{1(2)}^+ x_3 + H_6^+ \cos \gamma_{2(2)}^+ x_3, \\
 q_2^+(x_3) &= Q_5^+ \sin \gamma_{1(2)}^+ x_3 + Q_6^+ \sin \gamma_{2(2)}^+ x_3, \\
 n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma_{1(2)}^- x_3 + H_6^- \sin \gamma_{2(2)}^- x_3, \\
 q_2^-(x_3) &= Q_5^- \cos \gamma_{1(2)}^- x_3 + Q_6^- \cos \gamma_{2(2)}^- x_3.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $(\gamma_{1(m)}^\pm)^2 = \Omega_m^2 / (1 + \nu_{0(m)}) + (\gamma^\pm)^2$, $(\gamma_{2(m)}^\pm)^2 = \Omega_m^2 + (\gamma^\pm)^2$.
 Произвольные постоянные Q_i^\pm , ($i = \overline{1, 6}$) выражаются через H_i^\pm :

$$\begin{aligned}
 Q_i^\pm &= A_i^\pm H_i^\pm, \\
 A_1^\pm &= -\gamma_{1(1)}^\pm / \lambda, \quad A_2^\pm = \gamma_{1(1)}^\pm / \lambda, \quad A_3^\pm = -(\gamma^\pm)^2 / (\lambda \gamma_{2(1)}^\pm), \\
 A_4^\pm &= (\gamma^\pm)^2 / (\lambda \gamma_{2(1)}^\pm), \quad A_5^\pm = \mp \gamma_{1(2)}^\pm / \lambda, \quad A_6^\pm = \mp (\gamma^\pm)^2 / (\lambda \gamma_{2(2)}^\pm).
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (10) в граничные условия (9), получим однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно H_i^\pm . Из условия равенства нулю определителей этих систем имеем дисперсионные уравнения

$$F^\pm(\gamma, \Omega) = \det \{a_{ij}^\pm\} = 0. \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_{11}^\pm &= \cos \gamma_{1(1)}^\pm; \quad a_{12}^\pm = \sin \gamma_{1(1)}^\pm; \quad a_{13}^\pm = \cos \gamma_{2(1)}^\pm; \quad a_{14}^\pm = \sin \gamma_{2(1)}^\pm; \quad a_{15}^\pm = 0; \\
 a_{16}^\pm &= 0; \quad a_{21}^\pm = -\gamma_{1(1)}^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm; \quad a_{22}^\pm = \gamma_{1(1)}^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm; \quad a_{23}^\pm = -\frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{2(1)}^\pm} \sin \gamma_{2(1)}^\pm; \\
 a_{24}^\pm &= \frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{2(1)}^\pm} \cos \gamma_{2(1)}^\pm; \quad a_{25}^\pm = 0; \quad a_{26}^\pm = 0; \quad a_{31}^\pm = \cos \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{32}^\pm = \sin \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{33}^\pm &= \cos \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{34}^\pm = \sin \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{35}^+ = -\cos \gamma_{1(2)}^+ \lambda_2, \quad a_{35}^- = -\sin \gamma_{1(2)}^- \lambda_2; \\
 a_{36}^+ &= -\cos \gamma_{2(2)}^+ \lambda_2, \quad a_{36}^- = -\sin \gamma_{2(2)}^- \lambda_2; \quad a_{41}^\pm = -\gamma_{1(1)}^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{42}^\pm &= \gamma_{1(1)}^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{43}^\pm = -\frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{2(1)}^\pm} \sin \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{44}^\pm = \frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{2(1)}^\pm} \cos \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{45}^+ &= \gamma_{1(2)}^+ \sin \gamma_{1(2)}^+ \lambda_2, \quad a_{45}^- = -\gamma_{1(2)}^- \cos \gamma_{1(2)}^- \lambda_2; \quad a_{46}^+ = \frac{(\gamma^+)^2}{\gamma_{2(2)}^+} \sin \gamma_{2(2)}^+ \lambda_2, \\
 a_{46}^- &= -\frac{(\gamma^-)^2}{\gamma_{2(2)}^-} \cos \gamma_{2(2)}^- \lambda_2; \quad a_{51}^\pm = -2G \gamma_{1(1)}^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{52}^\pm = 2G \gamma_{1(1)}^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{53}^\pm &= -G \frac{(\gamma^\pm)^2 + (\gamma_{2(1)}^\pm)^2}{\gamma_{2(1)}^\pm} \sin \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; \quad a_{54}^\pm = G \frac{(\gamma^\pm)^2 + (\gamma_{2(1)}^\pm)^2}{\gamma_{2(1)}^\pm} \cos \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{55}^+ &= 2\gamma_{1(2)}^+ \sin \gamma_{1(2)}^+ \lambda_2, & a_{55}^- &= -2\gamma_{1(2)}^- \cos \gamma_{1(2)}^- \lambda_2; \\
 a_{56}^+ &= \frac{(\gamma^+)^2 + (\gamma_{2(2)}^+)^2}{\gamma_{2(2)}^+} \sin \gamma_{2(2)}^+ \lambda_2, & a_{56}^- &= -\frac{(\gamma^-)^2 + (\gamma_{2(2)}^-)^2}{\gamma_{2(2)}^-} \cos \gamma_{2(2)}^- \lambda_2; \\
 a_{61}^\pm &= G \left[(\gamma^\pm)^2 (\nu_{0(1)} - 1) - (\gamma_{1(1)}^\pm)^2 (\nu_{0(1)} + 1) \right] \cos \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{62}^\pm &= G \left[(\gamma^\pm)^2 (\nu_{0(1)} - 1) - (\gamma_{1(1)}^\pm)^2 (\nu_{0(1)} + 1) \right] \sin \gamma_{1(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{63}^\pm &= -2G (\gamma^\pm)^2 \cos \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; & a_{64}^\pm &= -2G (\gamma^\pm)^2 \sin \gamma_{2(1)}^\pm \lambda_2; \\
 a_{65}^+ &= - \left[(\gamma^+)^2 (\nu_{0(2)} - 1) - (\gamma_{1(2)}^+)^2 (\nu_{0(2)} + 1) \right] \cos \gamma_{1(2)}^+ \lambda_2, \\
 a_{65}^- &= - \left[(\gamma^-)^2 (\nu_{0(2)} - 1) - (\gamma_{1(2)}^-)^2 (\nu_{0(2)} + 1) \right] \sin \gamma_{1(2)}^- \lambda_2; \\
 a_{66}^+ &= 2 (\gamma^+)^2 \cos \gamma_{2(2)}^+ \lambda_2, & a_{66}^- &= 2 (\gamma^-)^2 \sin \gamma_{2(2)}^- \lambda_2.
 \end{aligned}$$

В результате потенциальное решение примет вид

$$\begin{aligned}
 u_{j(m)II}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}^\pm(x_3) \partial_j C_p^\pm(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\
 u_{3(m)II}^\pm &= \sum_{p=1}^{\infty} q_{(m)p}^\pm(x_3) C_p^\pm.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Результаты численных исследований. Расчеты производились при следующих значениях параметров:

Случай 1. $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_1 = 0,35$ (алюминий);
 $\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_2 = 0,29$ (вольфрам);
 $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$.

Случай 2. Внешний слой – вольфрам, а внутренний – алюминий. $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$.

Случай 3. Однородная пластина с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,29$ (алюминий).

Случай 4. Однородная пластина с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,35$ (вольфрам).

При этом

$$\begin{aligned}
 \Omega &= h\omega \sqrt{\frac{\rho_{cp}}{\tilde{G}_{cp}}}, \quad \rho_{cp} = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2, \quad \tilde{G}_{cp} = \lambda_1 \tilde{G}_1 + \lambda_2 \tilde{G}_2. \\
 \Omega_1^2 &= \Omega^2 \frac{\rho_1}{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2} (\lambda_1 + \lambda_2/G), \quad \Omega_2^2 = \Omega^2 \frac{\rho_2}{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2} (\lambda_1 G + \lambda_2).
 \end{aligned}$$

На рис. 2 приведены соответствующие уравнению (5) для задачи ”+” дисперсионные кривые – зависимости Ω от параметра δ . Рис. 2,а соответствует случаю 1, а рис. 2,б – случаю 2.

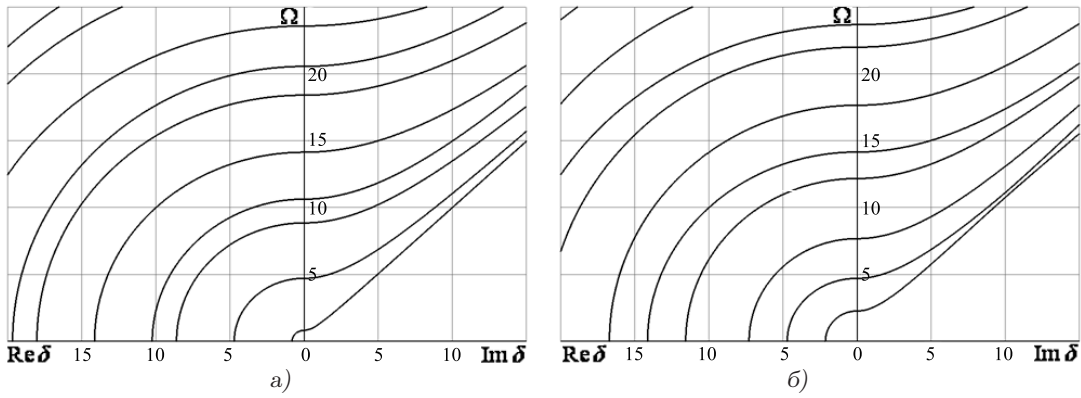


Рис. 2. Спектр частот симметричных сдвиговых волн в трехслойной пластине

Аналогично, на рис. 3,а и 3,б изображены спектральные кривые (зависимости Ω от параметра γ), соответствующие уравнению (11). Сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – комплексным корням.

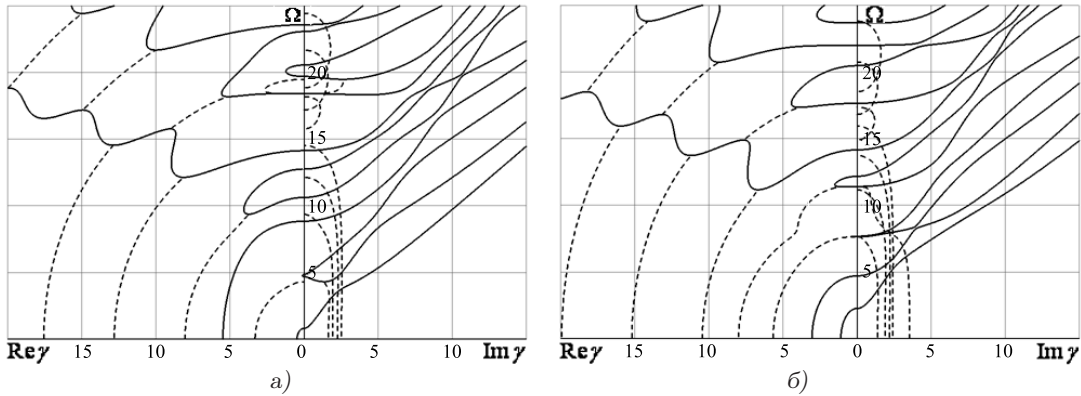


Рис. 3. Спектр частот симметричных продольных волн в трехслойной пластине

Для однослойной пластины из вольфрама и алюминия диаграммы продольных волн изображены на рис. 4,а и рис. 4,б, соответственно.

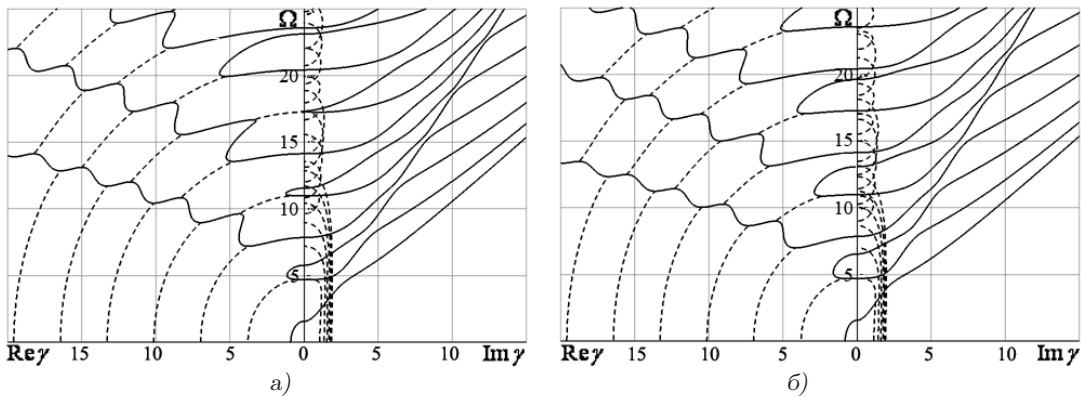


Рис. 4. Спектр частот симметричных продольных волн в однослойной пластине

В таблице приведены первые десять частот запираания (когда $\delta = 0$ или $\gamma = 0$): столбец 1 соответствует данным рис. 2,а; столбец 2 – рис. 2,б; столбец 3 – рис. 3,а; столбец 4 – рис. 3,б; столбец 5 – рис. 4,а; столбец 6 – рис. 4,б.

Частоты запираания.

Номер частоты	Значения частот запираания					
	1	2	3	4	5	6
1	0,8164259	2,2685161	0,8164259	2,2685161	1,5707963	1,5707963
2	4,7113982	4,7102804	4,7113982	4,7102804	4,7123890	4,7123890
3	8,8517671	7,6784144	4,8546344	7,6458035	5,7765615	6,5397466
4	10,629598	12,171777	8,8517671	7,6784144	7,8539816	7,8539816
5	14,137061	14,152833	10,629598	11,411770	10,995574	10,995574
6	18,402887	17,646644	12,757331	12,171777	11,553123	13,079493
7	20,551643	21,990592	14,137061	14,152833	14,137167	14,137167
8	23,572420	23,669487	18,402887	17,646644	17,278760	17,278760
9	27,886703	27,623968	19,700704	20,464291	17,329684	19,619240
10	30,521054	31,675240	20,551643	21,990592	20,420352	20,420352

Важнейшими характеристиками распространяющихся мод являются фазовая c_f и групповая c_g скорости. В каждой точке ветви фазовая скорость представляется как [4]

$$c_f = \omega/k = ic\Omega/\gamma, \quad c = \sqrt{(\lambda_1 \tilde{G}_1 + \lambda_2 \tilde{G}_2)/(\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2)}, \quad k = -ih\gamma.$$

Групповая скорость c_g распространяющихся мод согласно кинематическому определению задается равенством

$$c_g = d\omega/dk = ic d\Omega/d\gamma$$

и представляет собой тангенс угла наклона касательной к мнимому участку ветви в данной точке. На рис. 5–7 показаны изменения безразмерных фазовых и групповых скоростей распространяющихся мод $v_f = c_f/c$, $v_g = c_g/c$. Рис. 5,а и 5,б соответствуют случаю, изображенному на рис. 2,а; рис. 5,в и 5,г – рис. 2,б; рис. 6,а и 6,б – рис. 3,а; рис. 6,в, 6,г – рис. 3,б; рис. 7,а, 7,б – рис. 4,а; рис. 7,в, 7,г – рис. 4,б.

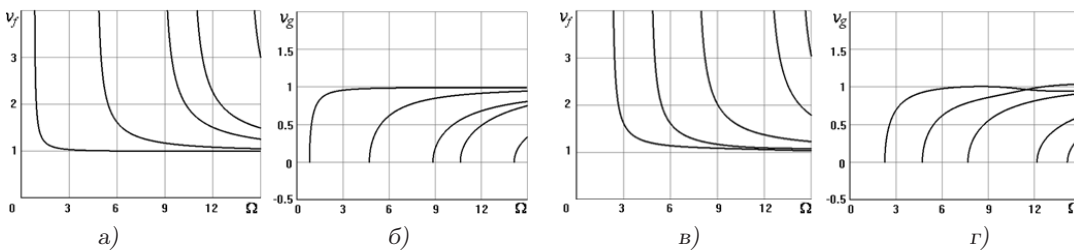


Рис. 5. Безразмерные фазовые и групповые скорости поперечных волн как функции от безразмерной частоты Ω

Анализ дисперсионных кривых, графиков изменения фазовых и групповых скоростей, частот запираания показывает, что по сравнению с однородной пластиной

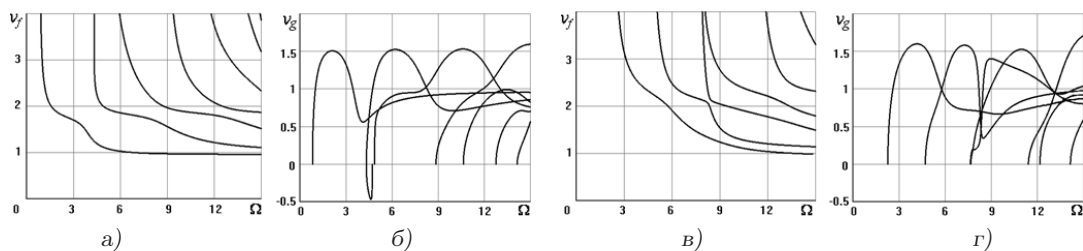


Рис. 6. Безразмерные фазовые и групповые скорости продольных волн как функции от безразмерной частоты Ω

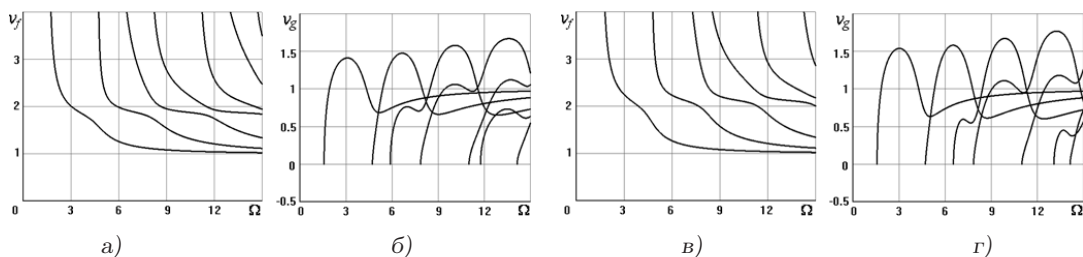


Рис. 7. Безразмерные фазовые и групповые скорости продольных волн как функции от безразмерной частоты Ω (Однослойная пластина)

происходят количественные и качественные изменения в характере распространения волн. Например, в трехслойной пластине в области низких частот появляется более одной действительной моды, изменяются значения и количество критических частот (в частности, частот запираания), имеет место более сильное сближение мод.

Изменение физико-механических свойств слоев (рис. 3) приводит к преобразованию спектра объемных волн. В частности, появляются кратные мнимые собственные значения (рис. 3,а), которые отсутствуют на рис. 3,б.

1. Аксентян О.К., Ворovich И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. – 1966. – Т.30, вып.5. – С.963-970.
2. Алтухов Е.В., Кулиш И.Е. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А. – 2001. – № 1. – С.314-321.
3. Алтухов Е.В., Мысовский Ю.В., Панченко Ю.В. Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин // Теоретическая и прикладная механика. – 1996. – Вып.26. – С.13-19.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284с.