

УДК 531.38

©2016. Н.Н. Щепин

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ КОНФИГУРАЦИИ “РОЗА”

Рассмотрена замкнутая система  $n$  твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами в предположении отсутствия действия внешних сил и моментов. Записаны уравнения равновесия рассматриваемого объекта. Изучен частный случай равновесной конфигурации системы, когда оси симметрии всех тел расположены в одной плоскости. В случае ( $n = 6$ ) построено решение типа “роза”, которое является конечномерным аналогом решения Е.Л. Старостина, полученного для упругого изотропного стержня. Найдены области геометрических параметров, в которых изучаемое решение существует. Рассмотрена устойчивость полученных решений.

**Ключевые слова:** *система твердых тел, устойчивость положения равновесия, достаточные условия устойчивости.*

**Введение.** В настоящее время системы связанных твердых и упругих тел широко используются для моделирования механических объектов в различных отраслях науки и техники. Популярность данного подхода обусловлена использованием хорошо разработанного аппарата аналитической механики для исследования статики и динамики систем с конечным числом степеней свободы. В ряде задач использование систем связанных твердых тел позволило получить обозримые аналитические результаты. Важной особенностью постановок таких задач является выбор выражения связи в упругих шарнирах системы, с целью адекватного моделирования соотношений между величинами, описывающими поля напряжений и деформаций в распределенных системах.

В последние годы стержневые системы интенсивно использовались в моделировании биологических объектов, при этом особое значение играет изучение равновесных конфигураций. Этой задаче посвящены, в частности, работы [1–4]. Интерес представляет точное решение уравнений равновесия упругого замкнутого стержня класса “роза”, предложенное в работе [5]. В [6] проведен численный анализ этого решения. Сложность дальнейшего использования решений, полученных в [1–6], для аналитического анализа равновесных конфигураций заключается в громоздкости полученных выражений.

В настоящей статье упругий стержень в плоском случае моделировался системой  $n$  твердых тел, связанных упругими цилиндрическими шарнирами, что позволило учесть геометрическую нелинейность поведения упругого стержня. Для случая шести твердых тел продолжено исследование решения типа “розы”, начатое в работе [7], которое является конечномерным аналогом решения Е.Л. Старостина [5, 6]. Выделены области геометрических параметров, допускающих существование полученного решения, исследованы достаточные условия устойчивости формы оси исследуемой системы.

**1. Постановка задачи.** Пусть система состоит из  $n$  гироскопов Лагранжа  $S_j$ , связанных в точках  $O_{j+1}$  пересечения осей симметрии тел  $S_j$  и  $S_{j+1}$  упругими цилиндрическими шарнирами. Полагаем, что оси симметрии  $O_j O_{j+1} = h_j$  тел  $S_j$  лежат в одной плоскости  $OXZ$ , а оси всех шарниров ей перпендикулярны. Система тел – замкнута.

Для учета геометрической нелинейности поведения упругого стержня момент в шарнирах выбирался равным [7]

$$L_j = c^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $c^2$  – жесткость на изгиб,  $\psi_j$  – угол поворота тела  $S_j$  вокруг оси  $(j-1)$ -го шарнира, угол  $\psi_0$  в случае замкнутых систем ( $O_1 = O_{n+1}$ ), аналогично [8], считаем равным  $\psi_n$ , т. е.  $\psi_0 = \psi_n$ .

Как и в работах [9, 10], полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, вследствие чего ее центр масс неподвижен. Тогда с учетом соотношения (1) находим потенциальную энергию системы

$$\Pi = -c^2 \sum_{j=1}^n \cos(\psi_j - \psi_{j-1}). \quad (2)$$

Как показано в [9], для замкнутых систем выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^n h_j \mathbf{e}_j^x = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{e}_j^x$  – единичный орт оси  $O_j O_{j+1}$ , составляющий угол  $\psi_j$  с осью  $OX$ . Поскольку  $\mathbf{e}_j^x = \cos \psi_j \mathbf{e}^x + \sin \psi_j \mathbf{e}^z$  ( $\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^z$  – соответственно орты осей  $OX$  и  $OZ$ ), то из (3) имеем два скалярных соотношения, которым должны удовлетворять углы  $\psi_j$

$$f_1 = \sum_{j=1}^n h_j \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n h_j \sin \psi_j = 0. \quad (4)$$

Для систем с дополнительными связями положения равновесия могут быть найдены из условия [11, 12] стационарности функции  $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ , т. е.

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \quad (5)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные множители Лагранжа.

Подставляя выражения (2), (4) в соотношение (5), получаем систему уравнений

$$c^2(\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})) = h_j(\lambda_2 \cos \psi_j - \lambda_1 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_1, \quad \psi_0 = \psi_n,$$

которая вместе с равенствами (4) позволяет определить неизвестные величины поставленной задачи, а именно, углы  $\psi_j$  и множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Как показано в [10], множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$  при этом играют роль реакций связей в цилиндрических шарнирах.

В случае конечномерной системы, моделирующей конфигурацию оси стержня типа “роза”, решение было описано в [8].

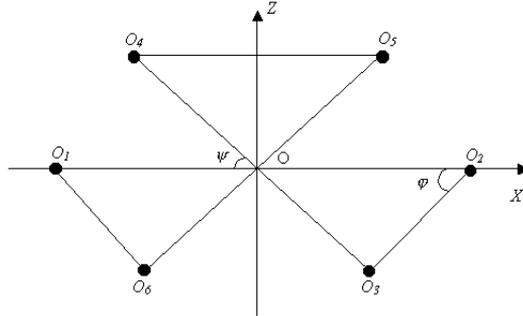


Рис. 1. Конфигурация типа “роза”.

**2. Стационарное решение типа “роза”.** В простейшем случае такая конфигурация может быть представлена системой шести тел (рис. 1). Полагаем, что фигура симметрична относительно оси  $OZ$ . При этом длины  $O_k O_{k+1} (k = \overline{1, 6}, O_7 = O_1)$  осей симметрии тел равны

$$O_1 O_2 = h_1, \quad O_2 O_3 = O_6 O_1 = h_2, \quad O_3 O_4 = O_5 O_6 = h_3, \quad O_4 O_5 = h_4, \quad (7)$$

а углы  $\psi_k^0 (k = \overline{1, 6})$  между осью симметрии тела  $S_k$  и осью  $OX$  таковы:

$$\psi_1^0 = \psi_4^0 = 0, \quad \psi_2^0 = \pi + \varphi, \quad \psi_3^0 = \pi - \psi, \quad \psi_5^0 = \pi + \psi, \quad \psi_6^0 = \pi - \varphi. \quad (8)$$

Полагаем, что  $\varphi$  и  $\psi$  – острые углы. Подставляя соотношения (7), (8) в условие замкнутости (4), получаем условие, которому должно удовлетворять решение задачи

$$\cos \varphi = b - c \cos \psi, \quad (9)$$

где

$$c = \frac{h_3}{h_2}; \quad b = \frac{h_1 + h_4}{2h_2}. \quad (10)$$

Решение (8) удовлетворяет уравнениям равновесия (6) в случае  $\lambda_2 = 0$ . После исключения из уравнений (6) множителя  $\lambda_1$  получаем

$$\frac{\sin(\varphi + \psi) - \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi) - \sin \varphi} = c \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}. \quad (11)$$

Таким образом, получены два уравнения (9) и (11) для определения углов  $\varphi$  и  $\psi$  стационарного решения (8) изучаемой системы.

Для дальнейшего исследования уравнений введем дополнительный параметр  $p$  следующим образом

$$\sin \varphi = pc \sin \psi. \quad (12)$$

Так как углы  $\varphi$  и  $\psi$  предполагались острыми и  $c > 0$ , то и параметр  $p > 0$ . Из постановки задачи (см. рис. 1) следует, что  $h_2 \sin \varphi = OO_3 \sin \psi$ , а поскольку  $OO_3 < h_3$ , имеем  $p < 1$ . Таким образом, для определения параметра  $p$  получаем следующий интервал:

$$0 < p < 1. \quad (13)$$

Подставляя равенства (9), (12) в уравнение (11) и учитывая, что  $\sin \psi \neq 0$ , имеем

$$\cos \psi = \frac{b - p(b + c - 1)}{c(p - 1)^2}. \quad (14)$$

Из неравенства  $0 < \cos \varphi < 1$  с учетом соотношения (9) получаем следующие ограничения на величину  $\cos \psi$

$$\max(0, \frac{b - 1}{c}) < \cos \psi < \min(1, \frac{b}{c}). \quad (15)$$

Из неравенств (15) следует, что область существования решения задачи распадается на четыре подобласти:

- 1)  $0 < \cos \psi < b/c$ , при  $0 < b < 1, b < c$ ;
- 2)  $0 < \cos \psi < 1$ , при  $0 < b < 1, b \geq c$ ;
- 3)  $(b - 1)/c < \cos \psi < b/c$ , при  $b \geq 1, b < c$ ;
- 4)  $(b - 1)/c < \cos \psi < 1$ , при  $b \geq 1, b \geq c$ .

Кроме того, из соотношений (9), (12) следует

$$c^2(1 - p^2) \cos^2 \psi - 2bc \cos \psi + c^2 p^2 + b^2 - 1 = 0. \quad (16)$$

Исключая из уравнения (16) с помощью равенства (14)  $\cos \psi$ , получим следующее выражение для определения параметра  $b = b(p, c)$ :

$$b = \frac{p^2(p^3 - 3p^2 + 2p - 2)c^2 + 2p^2(p + 1)c - 2p^3 + 2p^2 - 3p + 1}{2p^2(1 - p)(1 - c)}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (14) и (17) в неравенства, описывающие область существования решения, получим следующее представление подобластей в параметрах  $c$  и  $p$ :

- 1)  $\{p \in (0, 1); c \in (\frac{p + (1 - p)\sqrt{2(1 - p)}}{p(p^2 - 2p + 2)}; \frac{2p + (1 - p)\sqrt{3p^2 - 4p + 2}}{p(2 - 2p + 3p^2 - p^3)})\}$ ;
- 2)  $\{p \in (0, 1); c \in \emptyset\}$ ;

- 3)  $\{p \in (0, 1); c \in [\frac{2p + (1-p)\sqrt{3p^2 - 4p + 2}}{p(2 - 2p + 3p^2 - p^3)}; \frac{2p + (1-p)\sqrt{2p^2 - 4p + 3}}{p^2(3 - p)}]\}$ ;
- 4)  $\{p \in (0, 1); c \in [\frac{2p + (1-p)\sqrt{2p^2 - 4p + 3}}{p^2(3 - p)}; \frac{1}{p^2}]\}$ .

Окончательно область существования решения имеет вид

$$\{p \in (0, 1); c \in (\frac{p + (1-p)\sqrt{2(1-p)}}{p(p^2 - 2p + 2)}; \frac{1}{p^2})\}. \quad (18)$$

Она представлена на рис. 2.

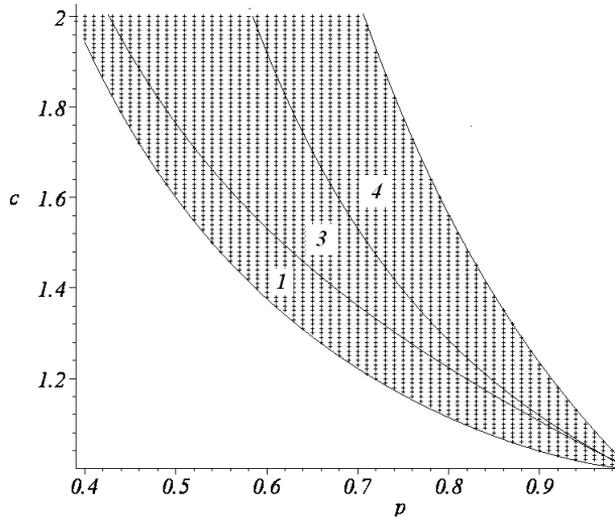


Рис. 2. Область существования решения (8).

### 3. Исследование устойчивости положения равновесия “розы”.

Устойчивость изолированного положения равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями может быть определена из условия минимума потенциальной энергии системы. В случае нелинейности связей, можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа и находить минимум функции  $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ , в которой множители  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся из условий стационарности функции  $L$  [11, 12].

В данной задаче, как отмечалось выше,  $\lambda_2 = 0$  и условия устойчивости положения равновесия будут выполнены в области [13, 14]

$$\delta^2 L = \delta^2 \Pi + \lambda_1 \delta^2 f_1 > 0, \quad \delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0. \quad (19)$$

В возмущенном движении будем полагать  $\psi_j = \psi_j^0 + \xi_j$  и из соотношений (4) получим

$$\sum_{j=1}^n h_j \xi_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{j=1}^n h_j \xi_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (20)$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по переменной  $\xi_j$ .

Введем новые переменные  $X_j = \xi_j - \xi_{j-1}$ . Тогда, учитывая соотношения (4) и полагая  $\xi_0 = \xi_n$ , имеем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^j X_i + \xi_n, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0. \quad (21)$$

Из равенств (20), (21) получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (22)$$

Подставляя равенства (21), (22) в выражение (19), получаем функцию  $\delta^2 L$  в виде

$$2\delta^2 L = \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \cos(\psi_k^0 - \psi_{k-1}^0) X_k^2 - h_k \mu \cos \psi_k^0 \left( \sum_{j=1}^k X_j \right)^2 \right] + \cos(\psi_n^0 - \psi_{n-1}^0) \left( \sum_{k=1}^{n-1} X_k \right)^2, \quad (23)$$

где  $\mu = \lambda_1/c^2$ .

С учетом равенств (12), (14) и (17) из уравнений (6) находим выражение для  $\mu$

$$\mu = \frac{cp - 1}{(p - 1)ch_2}. \quad (24)$$

Для нахождения области выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия системы необходимо определить область положительной определенности квадратичной формы (23), из которой могут быть исключены две переменные согласно (22).

Рассмотрим устойчивость решения (8). Подстановка (8) в (22) с учетом (10) позволяет найти выражения для  $X_1$  и  $X_5$ :

$$X_1 = X_2 + \frac{2(p(b + c - 1) - b)(pX_3 + (p - 1)X_4)}{p(p - 1)(c - 1)}, \quad (25)$$

$$X_5 = -(p(X_1 + X_2) + X_4),$$

где параметр  $b$  определен выражением (17).

Из (23) и (25) получаем квадратичную форму  $\delta^2 L$ , зависящую от переменных  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$ . Записывая критерий Сильвестра для этой квадратичной формы, получим следующие условия ее положительной определенности:

$$G_1 > 0, \quad G_2 > 0, \quad G_3 G_4 > 0 \quad (26)$$

где  $G_1 = \sum_{i=0}^3 g_{1i} c^i$ ,  $G_2 = \sum_{i=0}^{10} g_{2i} c^i$ ,  $G_3 = \sum_{i=0}^8 g_{3i} c^i$ ,  $G_4 = \sum_{i=0}^2 g_{4i} c^i$ , а  $g_{ij}$  равны

$$\begin{aligned} g_{13} &= -p^3 (4p^3 - 13p^2 + 15p - 4), \quad g_{12} = 2p^2 (2p^4 - 6p^3 + 6p^2 + 3p - 2), \\ g_{11} &= -8p^3 - 4p^2 + 9p - 3, \quad g_{10} = 10p^2 - 12p + 4, \quad g_{42} = p^2 (p^2 - 2p + 2), \\ g_{38} &= p^8 (2p^4 - 7p^3 + 9p^2 - 8p + 2) (p - 2)^2, \quad g_{40} = 2p - 1, \quad g_{41} = -2p^2, \\ g_{37} &= -2p^7 (p - 2) (p^6 - 5p^5 + 5p^4 + p^3 - 3p^2 + 14p - 4), \\ g_{36} &= -p^5 (16p^7 - 72p^6 + 120p^5 - 191p^4 + 257p^3 - 80p^2 + 28p - 8), \\ g_{35} &= 2p^4 (4p^8 - 16p^7 + 11p^6 - 35p^5 + 73p^4 + 54p^3 - 14p^2 + 4p - 4), \\ g_{34} &= -p^2 (4p^9 - 40p^8 + 4p^7 + 76p^6 + 156p^5 + 34p^4 - 7p^3 - 11p^2 - \\ &\quad - 8p + 2), \quad g_{31} = 8p^7 + 24p^6 + 16p^5 - 24p^4 + 24p^3 - 30p^2 + 14p - 2, \\ g_{33} &= -2p^2 (4p^8 + 12p^7 - 40p^6 - 16p^5 - 97p^4 + 55p^3 - 27p^2 + 23p - 5), \\ g_{32} &= 12p^9 - 28p^8 - 20p^7 - 84p^6 - 4p^5 + 12p^4 + 12p^3 + 8p^2 - 7p + 1, \\ g_{30} &= -4p^2 (2p - 1) (p^3 - p^2 + 2p - 1), \quad g_{29} = -4p^9 (p - 2) (p^9 - 8p^8 + \\ &\quad + 26p^7 - 49p^6 + 58p^5 - 28p^4 - 32p^3 + 58p^2 - 20p + 4), \quad g_{210} = p^{10} (4p^7 - \\ &\quad - 25p^6 + 70p^5 - 117p^4 + 124p^3 - 80p^2 + 24p - 4) (p - 2)^2, \\ g_{28} &= -4p^7 (6p^{10} - 45p^9 + 164p^8 - 423p^7 + 818p^6 - 1080p^5 + 844p^4 - \\ &\quad - 333p^3 + 118p^2 - 28p + 4), \quad g_{27} = 8p^6 (2p^{11} - 15p^{10} + 54p^9 - 149p^8 + \\ &\quad + 312p^7 - 412p^6 + 253p^5 - p^4 + 29p^3 - 13p^2 - 2p + 2), \\ g_{26} &= -2p^4 (4p^{12} - 36p^{11} + 60p^{10} + 16p^9 - 20p^8 - 428p^7 + 725p^6 + \\ &\quad + 358p^5 - 371p^4 + 192p^3 - 134p^2 + 64p - 10), \quad g_{25} = -8p^4 (2p^{11} - \\ &\quad - 3p^{10} - 4p^9 + 21p^8 - 39p^7 + 136p^6 - 478p^5 + 362p^4 - 219p^3 + 155p^2 - \\ &\quad - 71p + 12), \quad g_{24} = 4p^2 (7p^{12} - 34p^{11} + 106p^{10} - 208p^9 + \\ &\quad + 328p^8 - 648p^7 + 227p^6 - 64p^5 + 141p^4 - 38p^3 - 50p^2 + 26p - 3), \\ g_{23} &= -8p^2 (6p^{10} - 17p^9 + 19p^8 - 43p^7 - 132p^6 + 138p^5 - 55p^4 + \\ &\quad + 78p^3 - 82p^2 + 32p - 4), \quad g_{22} = 16p^{11} - 40p^{10} - 112p^9 - 24p^8 - \\ &\quad - 608p^7 + 1024p^6 - 472p^5 + 72p^4 - 108p^3 + 99p^2 - 30p + 3, \\ g_{21} &= 4 (2p - 1) (4p^8 - 6p^7 + 44p^6 - 50p^5 + 30p^4 - 27p^3 + 22p^2 - \\ &\quad - 8p + 1), \quad g_{20} = -4p^2 (p^4 - 2p^3 + 6p^2 - 6p + 2) (2p - 1)^2. \end{aligned}$$

Численные исследования позволили построить области решений неравенств (26). На следующих рисунках представлены области решений неравенств  $G_1 > 0$ . и  $G_2 > 0$ .

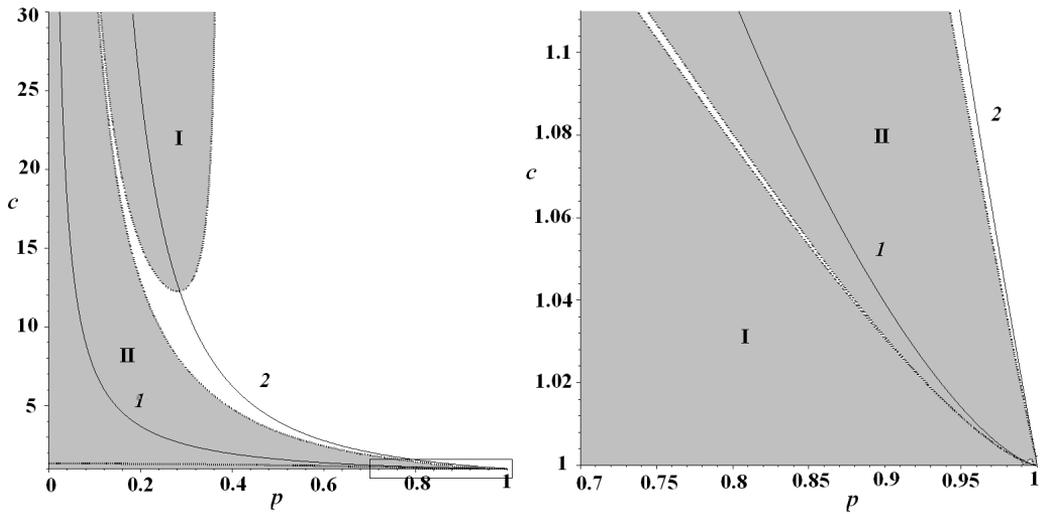


Рис. 3.  $G_1 > 0$  и  $G_2 > 0$ .

Линиями 1 и 2 отмечены границы области существования решения задачи. Область решения неравенства  $G_1 > 0$  обозначена цифрой I, а неравенства  $G_2 > 0$  – цифрой II.

Сравнение областей решений неравенств (26) и области существования решения (18) показывает, что пересечения указанных областей нет.

Таким образом, для системы, состоящей из шести тел, найдена область существования положения равновесия конфигурации “розы” (см. рис. 2) и определено, что для данной системы достаточные условия устойчивости положения равновесия не выполняются.

1. *Wadati M., Tsuru H.* Elastic model of looped DNA // *Physica*. – 1986. – 21D. – P. 213–226.
2. *Бенхэм Дж.* Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
3. *Starostin E.I.* Three-dimensional shapes of looped DNA // *Meccanica* **31**. – 1996. – **3**. – P. 235–271.
4. *Кугушев Е.И., Пирогова Е.Е., Старостин Е.Л.* Математическая модель образования трехмерной структуры ДНК. – 1997. – 24 с. – (Препринт РАН ИПМ им. М.В. Келдыша, № 77).
5. *Starostin E.I.* Equilibrium configurations of a thin elastic rod with self contacts // *Proc. Appl. Math. Mech.* – 2002. – **1**. – P. 137–138.
6. *Starostin E.I.* Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // *Phil. Trans. K. Soc. Lon., A.* – 2004. – **362**. – P. 1317–1334.
7. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* О новом решении уравнений равновесия системы тел с упругой связью // *Прикл. математика и механика*. – 2014. – **78**, вып. 25. – С. 671–680.
8. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия замкнутых систем с самопересечениями // *Механика твердого тела*. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
9. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // *Механика твердого тела*. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.

10. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
11. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
12. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.
13. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Достаточные условия устойчивости положения равновесия замкнутой системы тел // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 151–160.
14. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1976. – 534 с.

**N.N. Shchepin**

**Stability of equilibrium of a closed system of rigid bodies in “rose” configuration**

The closed system in “rose” configuration of the  $n$  Lagrange gyroscopes connected with elastic cylindrical joints, is considered in this paper in supposition of the lack of exterior forces and moments. Equilibrium positions and values of geometrical parameters for their stability are defined for the system of six gyroscopes. Such system can serve as a finite-dimensional model of the elastic rod with plane axis.

**Keywords:** *system of rigid bodies, stability of equilibrium position, sufficient conditions of stability.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк  
shchepin\_nick@mail.ru

Получено 10.06.16