

УДК 521:531

©2016. А.И. Андрюхин, С.Н. Судаков

ДИНАМИКА ЖИДКОГО ЭЛЛИпсоИДА С МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – твердый однородный шар. Для решения уравнений использован численный метод Рунге–Кутты. В качестве примера приведен расчет движения системы с массово-геометрическими параметрами гипотетической черной дыры, взаимогравитирующей с обычной звездой.

Ключевые слова: задача двух тел, жидкий гравитирующий эллипсоид, однородное вихревое движение, двойная звезда, черная дыра.

Введение. Начиная с Ньютона, задача о вращении жидких гравитирующих эллипсоидов привлекала внимание многих ученых и была подробно исследована [1–6]. Гораздо менее изучены важные для астрономии задачи о движении нескольких взаимогравитирующих жидких и твердых тел. Здесь широко известна проблема Роша об определении формы Луны [4]. Е.В. Петкевичем [7, 8] получены уравнения движения для задачи двух жидких тел. В работе [9] получены уравнения движения эллипсоидальной массы несжимаемой жидкости переменной вязкости, взаимогравитирующей с твердым однородным шаром. Используя эти уравнения, была рассмотрена задача о движении системы Земля–Луна, где Земля моделировалась эллипсоидальной массой жидкости, а Луна – твердым однородным шаром. В работе [10] аналогичная задача рассмотрена для системы Юпитер–Солнце, где Юпитер моделировался жидким телом, а Солнце – твердым однородным шаром.

В предлагаемой работе рассматривается задача о движении двойной звезды, одна компонента которой является черной дырой, а другая – обычной звездой. Черная дыра моделируется эллипсоидальной массой жидкости, а сопутствующая ей звезда – твердым однородным шаром. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, что делает возможным существование однородного вихревого движения жидкости [11].

Системы координат. Будем считать, что общий центр масс O рассматриваемой механической системы неподвижен. Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную инерциальную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ обозначим прямоугольные оси, начало которых O_1 совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а сами оси параллельны соответствующим осям системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Через $O_1x_1x_2x_3$ обозначим подвижную систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида (см. рис. 1).

Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости. Положение точки O_1 определим сферическими координатами r_1, φ_1, θ_1 , где θ_1 – угол между плоскостью $O\xi_1\xi_2$ и радиусом-вектором OO_1 ; φ_1 – угол между полuosью $O\xi_1$ и проекцией вектора OO_1 на плоскость $O\xi_1\xi_2$. Тогда координаты точки O_1 в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выразятся формулами

$$\xi_1 = r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_2 = r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_3 = r_1 \sin \theta_1. \quad (1)$$

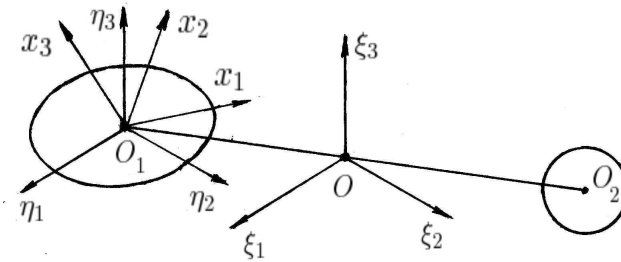


Рис. 1. Используемые системы координат.

Дифференцируя (1) по времени t , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки O_1) на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по t , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1\ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 + \\ &\quad + r_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1\ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \\ w_3 &= \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r_1\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Положение осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ определим углами Кардана α, β, φ . Матрица перехода $A = (a_{ij})$ от осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ к $O_1x_1x_2x_3$ имеет

вид

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \varphi & \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi & \sin \alpha \sin \varphi - \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi \\ -\cos \beta \sin \varphi & \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi & \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода A , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O_1x_1x_2x_3$

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Координаты центра масс шара. Центр масс шара обозначим через O_2 . Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение

$$m_1r_1 = m_2r_2, \quad (5)$$

где m_1 – масса жидкого эллипсоида, m_2 – масса шара, $r_i = |\mathbf{OO}_i|$, $i = 1, 2$. Точки O , O_1 , O_2 при движении будут лежать на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки O_2 в осях $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1}r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1}r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1}r_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда в осях $O_1x_1x_2x_3$ точка O_2 будет иметь координаты

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны шара. Проекция на оси $O_1x_1x_2x_3$ силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны шара, определяются формулами

$$f_i = G\rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2 [(\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где G – гравитационная постоянная, ρ – плотность жидкости, $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$, $\tilde{x}_{2i} = x_{2i}/r$, $\tilde{x}_i = x_i/r$, x_1, x_2, x_3 – координаты рассматриваемой точки жидкости в осях $Ox_1x_2x_3$.

Линеаризация. В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние r между точками O_1 и O_2 настолько велико, что можно провести линеаризацию величин f_i по \tilde{x}_i , $i = 1, 2, 3$. Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь

$$f_1 = G\rho m_2 \frac{x_{21}}{r^3} + \frac{G\rho m_2}{r^5} (3x_{21}^2 + r^2)x_1 + 3G\rho m_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} x_2 + 3G\rho m_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} x_3 \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине m_2 и к первому индексу величин x_{21}, x_{22}, x_{23} .

Уравнения гидродинамики. Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} + 2\sigma \nabla \nu - \\ &- \mathbf{w} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость движения жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — координатный вектор, ρ — плотность жидкости, p — давление, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — полудлины главных осей жидкого эллипсоида, $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ — абсолютное ускорение точки O_1 , $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

Кинематическая вязкость $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ определяется выражением

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где $\nu_0 = \text{const}$. Граница жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$ задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Следовательно, на границе жидкости $\nu = 0$.

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости σ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал Φ гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]

$$\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

где

$$\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda)D}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D},$$

$$D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

Замечание. Задание кинематической вязкости как функции координат, на первый взгляд, может показаться неестественным. Однако, в дальнейшем будут рассматриваться только однородные вихревые движения эллипсоидальной массы жидкости, при которых вязкость имеет одно и то же значение на каждом эллипсоиде из семейства соосных концентрических эллипсоидов, подобных границе жидкости. Частицы жидкости, лежащие в какой-то момент времени на одном из таких эллипсоидов, никогда не сходят с него. Следовательно, вязкость каждой частицы жидкости остается постоянной.

Уравнения движения. В случае однородного вихревого движения компоненты скорости жидкости v_1, v_2, v_3 и давление p ищем в виде

$$v_1 = \frac{\dot{c}_1}{c_1} x_1 - \frac{c_1}{c_2} \omega_3^* x_2 + \frac{c_1}{c_3} \omega_2^* x_3 \quad (123), \quad p = -p_0(t) \left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1 \right), \quad (9)$$

где $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ и $p_0(t)$ — неизвестные функции времени t . Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\frac{c_3}{c_1} \omega_2^* \omega_2 - 2\frac{c_2}{c_1} \omega_3^* \omega_3 +$$

$$+ 2\pi\rho G\alpha_1 - \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = -\frac{\dot{c}_1}{c_2} \omega_3^* - \frac{c_1}{c_2} \dot{\omega}_3^* - \frac{\dot{c}_1}{c_2} \omega_3^* + \frac{c_1}{c_2} \omega_1^* \omega_2^* + \quad (11)$$

$$+ \frac{2\nu_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 + 2\frac{c_3}{c_2} \omega_1^* \omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21} x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{13} = \frac{\dot{c}_1}{c_3} \omega_2^* + \frac{c_1}{c_3} \dot{\omega}_2^* + \frac{\dot{c}_1}{c_3} \omega_2^* + \frac{c_1}{c_3} \omega_1^* \omega_3^* +$$

$$+ \frac{2\nu_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 + \frac{2\dot{c}_3}{c_3} \omega_2 + \frac{2c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21} x_{23}}{r^5} \quad (123),$$

а символ циклической перестановки индексов (123) не распространяется на m_2 и первые индексы символов x_{21}, x_{22}, x_{23} .

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях x_1, x_2, x_3 из области, занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где k_{ij} определены выражениями (11). Из условия несжимаемости следует

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = \text{const}. \quad (13)$$

Движение осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ относительно осей $O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3$ описывается кинематическими уравнениями вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) / \cos \beta, \\ \dot{\beta} &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) \text{tg} \beta, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ на себя.

Соотношения (12)–(14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шестнадцати неизвестных $\omega_i^*, \omega_i, c_i, i = 1, 2, 3, p_0, \alpha, \beta, \varphi, r_1, \varphi_1, \theta_1$ и после задания начальных условий, полностью описывают движение системы.

Уравнения движения в нормальной форме. Уравнения $k_{23} = 0, k_{32} = 0$ (123) представим в виде

$$\frac{c_2}{c_3} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{23}, \quad \frac{c_3}{c_2} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{32} \quad (123), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f_{23} &= -\frac{2\dot{c}_2}{c_3} \omega_1^* + \frac{c_2}{c_3} \omega_2^* \omega_3^* + \omega_2 \omega_3 + 2\frac{c_1}{c_3} \omega_2^* \omega_3 - 2\frac{\dot{c}_3}{c_3} \omega_1 + \\ &+ \frac{2\nu_0}{c_3^2} \left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* - 3Gm_2 \frac{x_{22} x_{23}}{r^5} \quad (123), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_{32} &= -\frac{2\dot{c}_3}{c_2} \omega_1^* - \frac{c_3}{c_2} \omega_2^* \omega_3^* - \omega_2 \omega_3 - 2\frac{c_1}{c_2} \omega_3^* \omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_1 - \\ &- \frac{2\nu_0}{c_2^2} \left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* + 3Gm_2 \frac{x_{22} x_{23}}{r^5} \quad (123). \end{aligned}$$

Разрешая систему (15) относительно ω_1^*, ω_1 , получаем

$$\dot{\omega}_1^* = \frac{c_2 c_3}{c_2^2 - c_3^2} (f_{23} - f_{32}), \quad \dot{\omega}_1 = \frac{c_2^2 f_{32} - c_3^2 f_{23}}{c_2^2 - c_3^2} \quad (123). \quad (17)$$

Теперь исключим переменные p_0 и \ddot{c}_3 из уравнений $k_{11} = 0$, $k_{22} = 0$. Из уравнения $k_{33} = 0$ находим

$$\frac{2p_0}{\rho} = \ddot{c}_3 c_3 + c_3^2 f_{33}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} f_{33} = & -\omega_1^{*2} - \omega_2^{*2} - \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\frac{c_2}{c_3}\omega_1^*\omega_1 - 2\frac{c_1}{c_3}\omega_2^*\omega_2 + \\ & + 4\nu_0\frac{\dot{c}_3}{c_3^3} + 2\pi\rho G\alpha_3 - \frac{Gm_2}{r^5}(3x_{23}^2 - r^2) \quad (123). \end{aligned}$$

Из условия (13) следуют равенства

$$c_3 = R^3 c_1^{-1} c_2^{-1}, \quad \dot{c}_3 = -R^3 (c_1^{-2} c_2^{-1} \dot{c}_1 + c_1^{-1} c_2^{-2} \dot{c}_2), \quad (19)$$

$$\ddot{c}_3 = \frac{R^3}{c_1 c_2} \left(-\frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \frac{\ddot{c}_2}{c_2} + \frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{2\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right). \quad (20)$$

Используя (20), представим выражение (18) в виде

$$\frac{2p_0}{\rho} = \frac{R^6}{c_1^2 c_2^2} \left(-\frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \frac{\ddot{c}_2}{c_2} + \frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{2\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + c_3^2 f_{33}. \quad (21)$$

Используя (21), представим уравнения $k_{11} = 0$ и $k_{22} = 0$ в виде

$$\left(1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \right) \frac{\ddot{c}_1}{c_1} + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = F_1, \quad \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \frac{\ddot{c}_1}{c_1} + \left(1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = F_2, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{2R^6}{c_1^4 c_2^2} \left(\frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_1^2} f_{33} - f_{11}, \\ F_2 = & \frac{2R^6}{c_1^2 c_2^4} \left(\frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_2^2} f_{33} - f_{22}. \end{aligned} \quad (23)$$

Разрешая систему (22) относительно \ddot{c}_1/c_1 и \ddot{c}_2/c_2 , получаем

$$\frac{\ddot{c}_1}{c_1} = \left[\left(1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) F_1 - \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} F_2 \right] \Delta^{-1}, \quad \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = \left[\left(1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) F_2 - \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} F_1 \right] \Delta^{-1}, \quad (24)$$

$$\Delta = 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4}.$$

Уравнения $k_{0i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, записываем в виде

$$w_{x_i} = Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где w_i , $i = 1, 2, 3$ – проекции абсолютного ускорения точки O_1 на оси $O_1x_1x_2x_3$, которые определяются формулами (3), (4). Величины x_{2i} , $i = 1, 2, 3$, определены формулами (7). Умножая уравнения (25) слева на матрицу A^T , обратную матрице A , приводим их к виду

$$w_i = \frac{Gm_2}{r^3} \sum_{j=1}^3 a_{ji}x_{2j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Учитывая (7), перепишем эти уравнения так

$$w_j = \frac{Gm_2}{r^3} \eta_{2j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где η_{2j} определены формулами (6). Используя (3) и (6), запишем последние уравнения в виде

$$\begin{aligned} & \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ & - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 = -\frac{Gm_2}{mr^3} r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ & \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ & - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 = -\frac{Gm_2}{mr^3} r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ & \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 r_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 = -\frac{Gm_2}{mr^3} r_1 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно \ddot{r}_1 , $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\theta}_1$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= r_1 (\dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2) - \frac{Gm_2}{mr^3} r_1, \\ \ddot{\varphi}_1 r_1 \cos \theta_1 &= 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \theta_1, \\ \ddot{\theta}_1 r_1 &= -r_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Уравнения (26) представляют собой уравнения движения в задаче двух тел. Второе из этих уравнений может быть проинтегрировано и представлено в виде

$$\dot{\varphi}_1 r_1^2 \cos^2 \theta_1 = \text{const.}$$

Уравнения (14), (17), (24), (26) разрешены относительно старших производных и представляют собой систему четырнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырнадцати неизвестных α , β , φ , ω_i^* , ω_i , $i = 1, 2, 3$, c_1 , c_2 , r_1 , φ_1 , θ_1 , которая, после задания начальных условий, полностью описывает движение рассматриваемой механической системы.

Для численного решения уравнений (14), (17), (24), (26) вводим безразмерные переменные $\tau = t/T$, $\zeta_i = c_i/R$, $u_i = d\zeta_i/d\tau$, $\tilde{\omega}_i^* = T\omega_i^*$, $\tilde{\omega}_i = T\omega_i$, $i = 1, 2, 3$, $\tilde{r}_1 = r_1/R$, где T – размерность времени, $R = \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}$. Значения параметров жидкого эллипсоида выбирались так, чтобы выполнялось условие $R < r_S$. Здесь r_S – гравитационный радиус, определяемый по формуле $r_S = \frac{2Gm_1}{c^2}$, где c – скорость света.

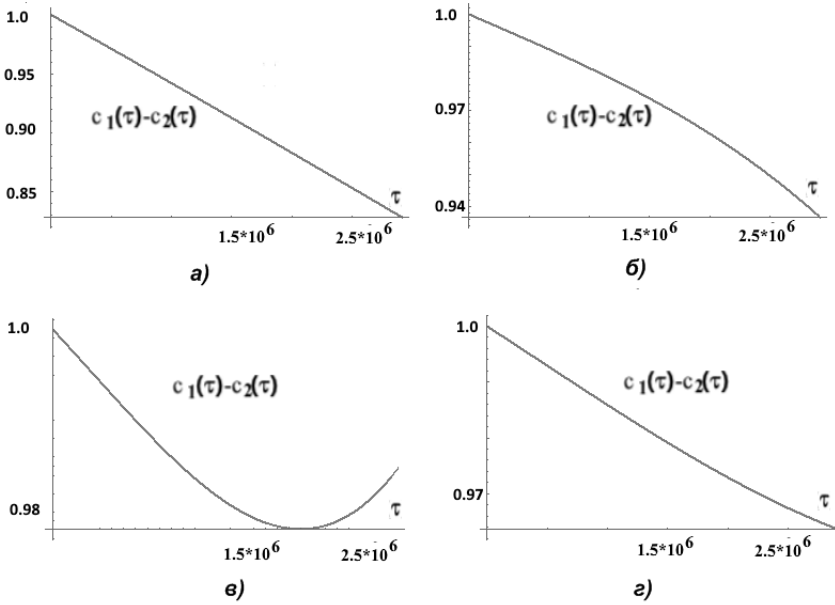


Рис. 2

Для решения уравнений был использован численный метод Рунге–Кутты 4–5. Размерность времени – земные сутки. Временной интервал был равен 8000 годам и $R = 20190.5$ м (вторым телом является тело с массой Солнца). Расчет производился для

$$T = 24 \cdot 60^2 \text{ с}, \quad m_1 = 1.3597 \cdot 10^{31} \text{ кг}, \quad m_2 = 1.988686458 \cdot 10^{30} \text{ кг},$$

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), \quad \nu_0 = 3.17 \cdot 10^{36} \text{ м}^2/\text{с}$$

и следующих начальных данных при $\tau = 0$:

$$\zeta_1 = 1.00646, \quad \zeta_2 = 1.00641, \quad \frac{d\zeta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \theta_1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\theta_1}{d\tau} = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \tilde{r}_1 = 2.29 \cdot 10^{15}, \quad \frac{d\tilde{r}_1}{d\tau} = 0,$$

$$\tilde{\omega}_1^* = 0, \quad \tilde{\omega}_2^* = 0, \quad \tilde{\omega}_3^* = 0.0661335, \quad \tilde{\omega}_1 = 0, \quad \tilde{\omega}_2 = 0, \quad \tilde{\omega}_3 = 0.$$

Основным вопросом, решаемым при расчетах, была оценка изменения разности полуосей c_1, c_2 эллипсоида черной дыры при вариации: 1) кинематической вязкости (см. графики на рис. 2); 2) соотношения масс тел (см. графики на рис. 3); 3) начального значения r_1 , обозначаемого в дальнейшем через r_0 (см. графики на рис. 4). На рис. 2 представлены результаты расчетов разности полуосей при следующих значениях ν_0 : а) $\nu_0 = \nu_*$, б) $\nu_0 = 3.5\nu_*$, в) $\nu_0 = 4\nu_*$, г) $\nu_0 = 4.05\nu_*$, где $\nu_* = 3.17 \cdot 10^{36} \text{ м}^2/\text{с}$.

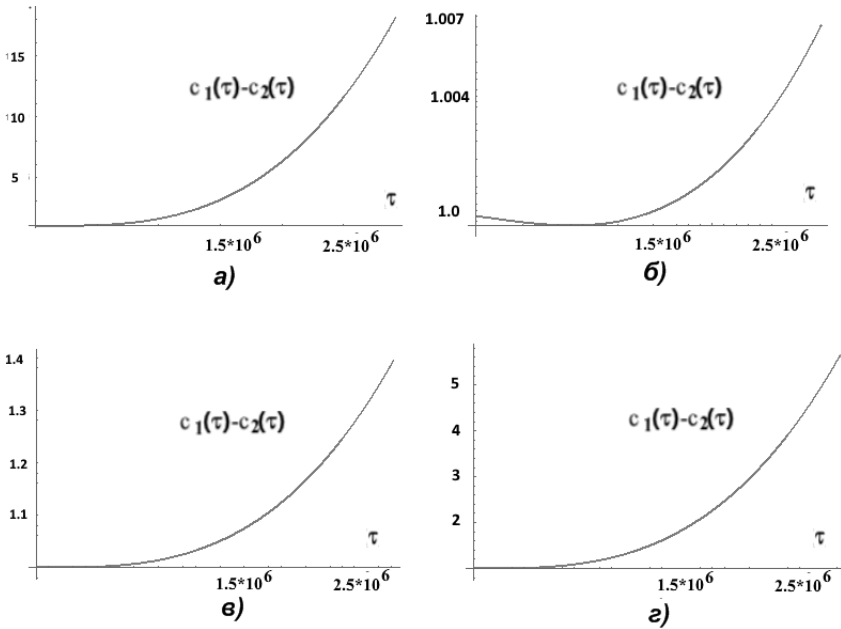


Рис. 3

На рис. 3 а, 3 б, 3 в, 3 г представлены результаты расчетов при соотношении масс жидкого эллипсоида и однородного твердого тела с массой Солнца 15, 100, 50, 20 соответственно. На рис. 4 представлены результаты расчетов разности полуосей при следующих значениях r_0 : а) $r_0 = r_*$, б) $r_0 = 2r_*$, в) $r_0 = 20r_*$, г) $r_0 = 200r_*$, где $r_* = 1.145 \cdot 10^{15}$.

Выводы. Первые компьютерные расчеты, в которых использовалась модель, представленная в [10, 11], и значения параметров, характерные для тел солнечной системы, показали аномальный рост разности между полуосями $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$, который можно интерпретировать как распад черной дыры за $10^{-3} - 10^{-4}$ секунды. Длительное существование двух тел в рамках нашей модели возможно только с определенных значений кинематической вязкости и расстояния между ними. Значения этих параметров были определены

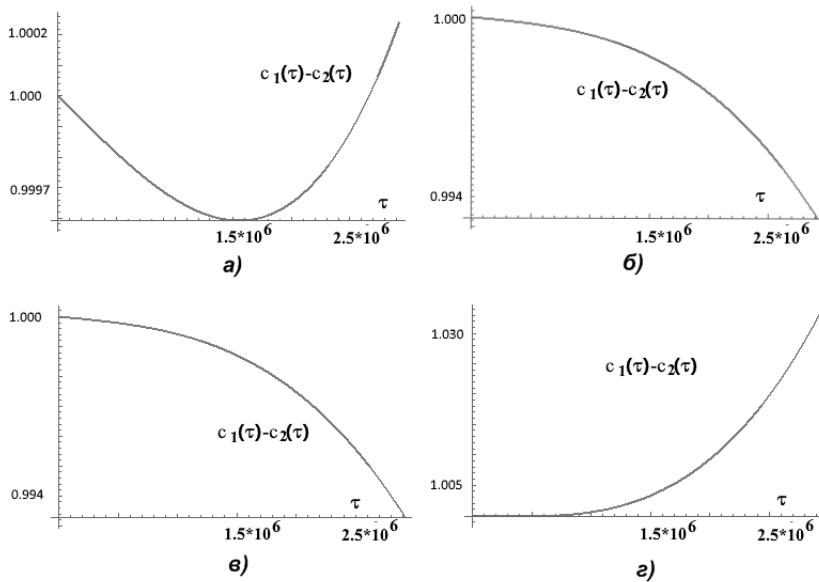


Рис. 4

опытным путем на основе компьютерных экспериментов и использованы в приведенных расчетах. Подчеркнем, что используемые нами значения кинематической вязкости, расстояния между телами значительно превосходят соответствующие значения параметров тел солнечной системы. Но именно при таких значениях возможно существование рассматриваемых тел в рамках принятой нами модели. Представленные расчеты и вышесказанное указывают на необходимость дальнейших компьютерных экспериментов с представленной выше моделью.

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. (ред.) Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Стеклов В.А. Работы по механике. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2011. – 492 с.
4. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
5. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.
6. Ядрицкий В.С. Теория фигур небесных тел. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 298 с.
7. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрон. журн. – 1977. – **3**, 9. – С. 424–428.
8. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Письма в Астрон. журн. – 1977. – **3**, 11. – С. 522–525.
9. Андрюхин А.И., Судаков С.Н. О движении жидкого эллипсоида и сферически симметричного твердого тела, гравитирующих друг с другом // Космические исследования. – 2016. – **54**, № 5. – С. 427–431.

10. *Андрюхин А.И., Судаков С.Н.* Динамика жидкого эллипсоида с массово-геометрическими параметрами планеты Юпитер // Труды ИПММ. – 2015. – **29**. – С. 141–144.
11. *Судаков С.Н.* О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217–226.

A.I. Andruckin, S.N. Sudakov

The dynamics of liquid ellipsoid with the mass-geometrical parameters of black hole

The problem of two bodies, one of which is the liquid ellipsoid and other is the homogeneous rigid ball, is investigated in this paper. The motion of liquid ellipsoid assumes to be permanent rotational flow and liquid has the stratified viscosity that make possible such motion. The equations of motions were obtained and solved by Runge–Kutta method for mass-geometric parameters of hypothetical black whole.

Keywords: *the problem of two bodies, ellipsoidal mass of liquid, permanent rotational flow, binary stars, black whole.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный техн. ун-т”,
ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
sudakov@iamm.su

Получено 25.04.16