

УДК 531.36 + 531.31

©2016. Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

В основу исследования положена многотоковая модель синхронного электромотора. Предполагается, что момент нагрузки имеет диссипативный характер и является линейной функцией угловой скорости вращения ротора относительно статора. Получено эффективное достаточное условие, при котором любое движение синхронного электромотора с течением времени стремится к стационарному вращению.

Ключевые слова: синхронный электромотор, глобальная устойчивость, метод сведения, принцип инвариантности Ла-Салля.

Введение. В зависимости от конструкции синхронного электромотора его динамика описывается различными системами дифференциальных уравнений, которые определяют изменение электрических токов в обмотках ротора и изменение переменной γ – угла рассогласования между вращающимся магнитным полем статора и магнитным полем ротора. Такие системы уравнений периодичны по переменной γ , в связи с чем они имеют счетный набор стационарных решений, соответствующих рабочему режиму равномерного вращения ротора с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре.

Практически важной задачей является установление достаточных условий, при которых любое решение системы дифференциальных уравнений движения синхронного электромотора стремится с течением времени к одному из стационарных решений. Если при этом на периоде изменения угла γ существует только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение, то систему называют *глобально устойчивой*.

В [1, 2] для широкого класса синхронных машин предложен подход, названный методом сведения и позволяющий вывести свойство глобальной устойчивости многомерной системы из свойства глобальной устойчивости одного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Для этого уравнения условие глобальной устойчивости найдено Ф. Трикоми [3]. Получаемые таким путем критерии глобальной устойчивости электрических машин включают неопределенные математические параметры и требуют проверки выполнения частотных неравенств.

В [4, 5] предложена конкретизированная математическая модель синхронного электромотора, включающая любое число токов в демпферной обмотке, и на ее основе рассмотрен ряд задач динамики такого электромотора. В частности, отмечена глобальная устойчивость данной модели при отсутствии нагрузки.

Эта модель принята и в настоящей работе. Вместо обычно используемого предположения о постоянстве момента нагрузки предполагается, что этот

момент является диссипативным и представляется в виде линейной функции угловой скорости вращения ротора относительно статора. С помощью метода сведения и принципа инвариантности Ла-Салля получено достаточное условие глобальной устойчивости получаемой таким образом системы дифференциальных уравнений. Оно сведено к условию Трикоми для дифференциального уравнения второго порядка, которое не содержит неопределенных параметров. Приведены результаты компьютерного моделирования.

1. Математическая модель синхронного электромотора. Электромотор состоит из двух основных частей — статора и ротора. В статоре имеются обмотки, на которые подается переменный электрический ток. Он создает магнитное поле, вектор напряженности которого постоянен по модулю и вращается с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$ вокруг оси ротора.

В роторе синхронного электромотора имеются две обмотки — демпферная обмотка и обмотка возбуждения. Демпферная обмотка обычно выполнена в виде “беличьего колеса”, то есть в виде двух колец, соединенных перпендикулярными к ним стержнями. Обмотка возбуждения может иметь разную конструкцию и содержит большое число витков электрического провода. На эту обмотку через угольные щетки подается постоянное напряжение.

Динамика синхронного электромотора описывается в [4, 5] системой дифференциальных уравнений с фазовым вектором $(\theta, \dot{\theta}, i_0, i_1, \dots, i_{n_2})$, где i_0 — ток в обмотке возбуждения, i_n ($n = 1, 2, \dots, n_2$) — токи в стержнях демпферной обмотки, θ — угол между радиус-вектором к стержню с током i_{n_2} и вектором напряженности вращающегося магнитного поля статора, $\dot{\theta}$ — производная угла θ по времени t . Уравнения синхронного электромотора содержат следующие постоянные параметры: u — постоянное напряжение на обмотке возбуждения, R_1 и L_1 — активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения, R_2 и L_2 — активное и индуктивное сопротивления демпферной обмотки, B — напряженность магнитного поля, n_1 — число витков в обмотке возбуждения, n_2 — число стержней в демпферной обмотке, S_1 — площадь витка обмотки возбуждения, S_2 — площадь диаметрального сечения демпферной обмотки, m — коэффициент сильного регулирования ($m > 0$), J — осевой момент инерции ротора вместе с присоединенными к нему вращающимися частями, M — момент сил, действующих на ротор (момент нагрузки).

В уравнении, определяющем $\ddot{\theta}$, откорректируем знак перед $m\dot{\theta}$ и коэффициент при $i_0 \sin(\theta + \pi/4)$, домножив его на 4. Для того, чтобы из этих уравнений при $n_2 = 1$ формально следовали приведенные в [6] уравнения двухтоковой модели, изменим знаки величин u, i_0, i_n ($n = 1, 2, \dots, n_2$) на противоположные, а в уравнении, определяющем $\ddot{\theta}$, добавим множитель β в коэффициенты членов с токами i_0, i_n .

Введем вместо тока i_0 переменную x по формуле $i_0 = x + u/R_1$, вместо угла θ будем использовать угол $\gamma = \theta + \pi/4$. Обозначим через φ угол поворота ротора относительно статора. Углы γ и φ связаны соотношением $\varphi = \gamma + \omega t + \text{const}$. Поэтому $\dot{\varphi} = \dot{\gamma} + \omega$.

Момент нагрузки M предполагается в [4, 5] постоянной отрицательной

величиной, и с учетом этого вместо M там сразу берется $-M$, где $M > 0$ — постоянная. На практике этот момент можно считать постоянным только в отдельных случаях, например, при работе подъемного крана, но чаще он зависит от угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$. В данной работе рассматривается случай линейного диссипативного момента $M = -k\dot{\varphi}$, $k > 0$ — постоянная. Поскольку $\dot{\varphi} = \dot{\gamma} + \omega$, получаем для этого момента выражение

$$M = -k\dot{\gamma} - k\omega, \quad (1)$$

которое содержит постоянный отрицательный член $-k\omega$.

В результате, с учетом (1), имеем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую работу синхронного электромотора:

$$\begin{aligned} J\ddot{\gamma} &= -(m+k)\dot{\gamma} - a_1\beta x \sin \gamma - a_2\beta \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ L_1\dot{x} &= -R_1x + a_1\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ L_2\dot{i}_n &= -R_2i_n + a_2\dot{\gamma} \cos\left(\gamma + \frac{2\pi n}{n_2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$a_1 = 4n_1S_1B\sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}S_2B, \quad b_0 = \frac{4}{R_1}un_1\beta S_1B\sqrt{2}, \quad c_0 = k\omega \quad (3)$$

— положительные постоянные, i_n — производные токов i_n по времени.

2. Стационарные решения. Нормальным режимом работы синхронного электромотора является равномерное вращение его ротора относительно статора с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре. Этот режим соответствует стационарному решению системы (2), то есть решению вида

$$\gamma = \gamma^0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad x = x^0, \quad i_n = i_n^0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_2), \quad (4)$$

где γ^0, x^0, i_n^0 — постоянные. В результате подстановки выражений (4) в уравнения (2) находим

$$x^0 = 0, \quad i_n^0 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_2),$$

а для γ^0 получаем уравнение

$$b_0 \sin \gamma + c_0 = 0. \quad (5)$$

Опуская особый случай, когда $c_0/b_0 = 1$, будем далее предполагать, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (6)$$

Тогда система (2) имеет два счетных набора стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = (d_s, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = (e_s, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8)$$

где стационарные значения d_s, e_s угла γ определены формулами

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9)$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (10)$$

3. Энергетические соотношения. Рассмотрим следующие функции фазовых переменных системы (2):

$$\begin{aligned} W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= \frac{1}{2} \left(J\dot{\gamma}^2 + \beta L_1 x^2 + \beta L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 \right), \\ U(\gamma) &= \int_0^\gamma (b_0 \sin \alpha + c_0) d\alpha = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma, \\ V(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\gamma). \end{aligned} \quad (11)$$

Производная функции W по времени в силу системы уравнений (2) равна

$$\dot{W}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -(m+k)\dot{\gamma}^2 - \beta R_1 x^2 - \beta R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 - \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0). \quad (12)$$

Воспользовавшись определениями (11) функций U, V , получаем

$$\dot{V}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -(m+k)\dot{\gamma}^2 - \beta R_1 x^2 - \beta R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (13)$$

Согласно определению (11) функции W , она является определенно положительной по отношению к переменным $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Ее можно интерпретировать как кинетическую энергию рассматриваемой системы, а функцию U — как ее потенциальную энергию. Тогда функция V является полной энергией системы, а формула (13) выражает теорему об изменении энергии.

4. Устойчивость стационарных решений. Как показано в п. 2, при условии (6) на каждом промежутке $[-\pi + 2\pi s, \pi + 2\pi s]$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) длины 2π существуют два значения d_s, e_s угла γ , которым соответствуют два стационарных решения (7), (8) системы (2). Эти значения d_s, e_s определены формулами (9), (10).

Теорема 1. *Стационарные решения (7) системы (2) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (8) — неустойчивы.*

Доказательство. Из определения (11) функции $U(\gamma)$ следует, что при условии (6) значения d_s и e_s являются, соответственно, точками локальных минимумов и локальных максимумов этой функции. Поэтому каждая из функций $V_{1s} = V - U(d_s)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) определено положительно по отношению к возмущениям $\gamma - d_s, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ для стационарного решения (7), а каждая из функций $V_{2s} = V - U(e_s)$ принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарного решения (8).

Производные $\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}$ этих функций по t в силу уравнений (2) совпадают с производной (13) функции V и поэтому неположительны. Эти производные обращаются в нуль только при $\dot{\gamma} = 0, x = 0, i_1 = \dots = i_{n_2} = 0$, то есть только в стационарных точках (7), (8). Поскольку стационарные точки изолированы, то в некоторой окрестности каждой из двух стационарных точек (7), (8) с данным номером s не существуют другие решения системы (2), для которых $\dot{V}_{1s} = 0$ или \dot{V}_{2s} .

Отсюда, согласно приведенным в [7] теоремам 5.2 и 6.3 Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского, следует, что стационарные решения (7) системы (2) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (8) неустойчивы. \square

5. О принципе инвариантности Ла-Салля. Для получения условий глобальной устойчивости системы (2) воспользуемся принципом инвариантности Ла-Салля в формулировке теоремы VIII из книги [8].

Теорема 2 (Ла-Салль). Пусть задана автономная система

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0, \quad x \in R^n. \quad (14)$$

Пусть $V(x)$ — скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех x . Предположим, что выполнены следующие условия:

- а) $V(x) > 0$ при всех $x \neq 0$;
- б) $\dot{V}(x) \leq 0$ во всем пространстве.

Обозначим через M_0 множество точек пространства, в которых $\dot{V}(x) = 0$, а через M — максимальное положительно инвариантное множество, содержащееся в M_0 .

Тогда каждое решение системы (14), остающееся ограниченным при $t \geq 0$, неограниченно приближается к M при $t \rightarrow \infty$.

Сделаем два комментария по поводу этой формулировки.

Во-первых, условие $X(0) = 0$ является излишним, так как точка $x = 0$ ничем не выделяется среди других возможных положений равновесия системы (14).

Во-вторых, по этой же причине, вместо условия а) $V(x) > 0$ ($x \neq 0$) достаточно предположить, что функция $V(x)$ ограничена снизу при всех x . Тогда, вычитая из этой функции нижнюю грань ее значений, получим функцию, удовлетворяющую неравенству $V(x) \geq 0$ при всех x .

В настоящей работе “кандидатом” на роль функции Ляпунова в теореме Ла-Салля выступает функция V , указанная в (11). Однако она не является

ограниченной снизу во всем фазовом пространстве, так как в ее определение входит функция U , которая, согласно (11), содержит линейный по γ член $c\gamma$. Поэтому для исследования нелокальной динамики синхронного электромотора нельзя непосредственно применить принцип Ла-Салля с функцией Ляпунова V вида (11). Такая трудность, связанная с неограниченностью функции Ляпунова по угловой переменной, является характерной в теории фазовых систем [2, 6].

Чтобы преодолеть ее, достаточно заметить, что в доказательстве принципа Ла-Салля используется ограниченность функции V не во всем фазовом пространстве, а только на решениях изучаемой системы. Поэтому для применимости в рассматриваемом случае теоремы 2 с функцией V вида (11) достаточно, чтобы угол γ был ограничен снизу на всех решениях системы (2).

Таким образом, для того, чтобы найти условия глобальной устойчивости системы (2) при помощи принципа Ла-Салля, достаточно:

- 1) вывести условия ограниченности угла γ снизу на решениях системы (2);
- 2) при этих условиях установить ограниченность всех фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ на решениях данной системы;
- 3) доказать, что притягивающее множество M точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий решений, определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих равенству $\dot{V} = 0$, совпадает с множеством стационарных точек (7), (8) системы (2).

6. Эталонное уравнение второго порядка. Чтобы получить достаточные условия ограниченности угла γ в любом решении системы (2), воспользуемся подходом [1, 2], который позволяет вывести свойство ограниченности угловой переменной для многомерной системы из свойства ограниченности такой переменной для эталонного дифференциального уравнения второго порядка. Далее будут использоваться эталонные уравнения вида

$$J\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \quad (15)$$

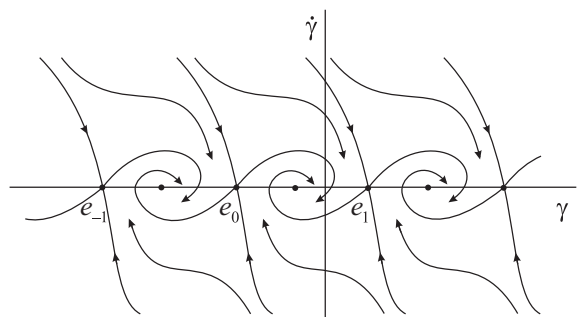
где постоянные $b_0, c_0 > 0$ определены формулами (3), а постоянная $a_0 > 0$ выбирается специальным образом.

Уравнение вида (15) с положительными коэффициентами a_0, b_0, c_0 детально изучено [1, 3, 9]. Приведем основные результаты этого исследования.

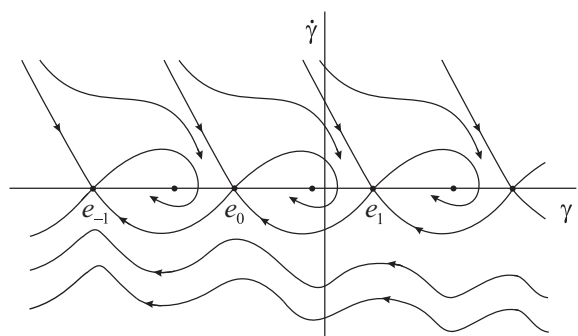
Стационарные решения $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$, $\gamma^0 = \text{const}$, уравнения (15) определяются тригонометрическим уравнением (5). Поэтому в предположении (6) уравнение (15) имеет два счетных набора стационарных решений, которые определяются указанными в (9), (10) значениями d_s, e_s постоянной γ^0 .

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно установить, что стационарные точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_s, 0)$ являются для уравнения (15) асимптотически устойчивыми особыми точками типа “фокус” или “узел”, а точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0)$ — неустойчивые особые точки типа “седло”.

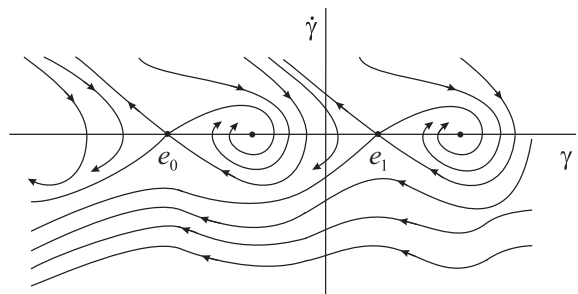
Глобальный анализ уравнения вида (15), проведенный Ф. Трикоми [3], показывает, что оно может иметь три качественно различных типа фазовых



a) $a > a_{cr}$



b) $a = a_{cr}$



c) $a < a_{cr}$

Рис. 1. Фазовые портреты эталонного уравнения.

портретов, изображенных на рис. 1 [6]. Введя безразмерные параметры

$$a = a_0/\sqrt{b_0J}, \quad c = c_0/b_0, \quad (16)$$

Ф. Трикоми установил, что существует критическое значение параметра a , которое является функцией $a_{cr}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ и обладает следующими свойствами [6, 9].

- В случае $a > a_{cr}$ каждое решение уравнения (15) стремится к одной из его стационарных точек при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 1, а).

- При $a \leq a_{cr}$ кроме решений, стремящихся к стационарным точкам, существуют решения, вдоль которых угол γ неограниченно убывает с течением времени. Поэтому при $a \leq a_{cr}$ множество стационарных точек уравнения (15) не является глобально притягивающим (рис. 1, б, в). При $a = a_{cr}$ существуют сепаратрисы, соединяющие соседние седловые точки.

Для функции $a_{cr}(c)$ не существует явного выражения, но разными авторами получены ее аналитические оценки сверху и снизу (см. [9], с. 122-123). При получении этих оценок вместо угла γ используют угол $\theta = -\gamma$ и, вводя независимую переменную $\tau = t\sqrt{b_0/J}$, приводят уравнение (15) к уравнению $d^2\theta/d\tau^2 = -a d\theta/d\tau - \sin\theta + c$, содержащему два параметра (16). Тогда указанному в (10) главному стационарному значению $\gamma^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$ угла γ соответствует значение $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ угла θ . Так как $\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin\theta_0$, и величину $a_{cr}(c)$ можно рассматривать как функцию $a_{cr}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. В [10] при помощи компьютера построен график функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ и показано, что линейная и синусоидальная аппроксимации $a_{crL} = 0.76 \cdot \theta_0$ и $a_{crS} = 2.766222 \cdot \sin(0.2838860 \cdot \theta_0)$ обеспечивают вычисление $a_{cr}(\theta_0)$ с абсолютной погрешностью не больше, чем $1.5 \cdot 10^{-2}$ и $3.4 \cdot 10^{-5}$ соответственно.

7. Условия ограниченности угла γ . Достаточные условия ограниченности угла γ сверху и снизу дает следующая теорема.

Теорема 3. *Если существуют значения постоянных параметров $\lambda, \varepsilon \geq 0$ такие, что*

1) *любое решение дифференциального уравнения*

$$J\ddot{\gamma} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (17)$$

где b_0, c_0 определены в (3), ограничено при $t \geq 0$,

2) *при всех значениях фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ выполнено неравенство*

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + 2\lambda W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \varepsilon J^{-1}\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) \leq 0, \quad (18)$$

где функция W определена в (11), то в любом решении

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t), x(t), i_1(t), \dots, i_{n_2}(t) \quad (19)$$

системы (2) функция $\gamma(t)$ ограничена на полуоси $t \geq 0$.

Доказательство этой теоремы, приведенное ниже, следует доказательству теоремы 4.4.1 из [2].

1. *Определение и свойства функций* $F_s(\gamma)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Согласно изложенным в п. 6 результатам Ф. Трикоми, условие 1 теоремы 3 означает, что для уравнения (17) имеет место случай $a > a_{\text{cr}}$ (рис. 1, a). Он характерен тем, что через каждую седловую точку $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) этого уравнения проходит интегральная кривая $\dot{\gamma} = F_s(\gamma)$, которая не имеет других точек пересечения с осью абсцисс, кроме данной седловой точки, и уходит на плюс или минус бесконечность при стремлении γ к минус или плюс бесконечности:

$$F_s(\gamma) \rightarrow \pm\infty \quad (\gamma \rightarrow \mp\infty). \quad (20)$$

Вследствие 2π -периодичности уравнения (17) по γ , график функции $F_s(\gamma)$ получается из графика функции $F_0(\gamma)$ параллельным сдвигом на $2\pi s$ вдоль оси абсцисс. Поэтому при любом γ выполняются соотношения

$$F_s(\gamma + 2\pi s) = F_0(\gamma) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Полагая здесь $\sigma = \gamma + 2\pi s$, приходим к равенству $F_s(\sigma) = F_0(\sigma - 2\pi s)$. Заменяя в нем букву σ буквой γ , получаем

$$F_s(\gamma) = F_0(\gamma - 2\pi s) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21)$$

Согласно определению функций $F_s(\gamma)$, они удовлетворяют уравнению

$$J\dot{\gamma} \frac{d\dot{\gamma}}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0$$

интегральных кривых $\dot{\gamma}(\gamma)$ уравнения (17), то есть они обращают уравнение интегральных кривых в тождество по γ :

$$JF_s(\gamma) \frac{dF_s(\gamma)}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_s(\gamma) - b_0 \sin \gamma - c_0 \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (22)$$

Подставив сюда вместо γ функцию $\gamma(t)$ из решения (19) системы (2), получим тождество по t .

2. *Функции* V_s *и неравенство* $\dot{V}_s + 2\lambda V_s \leq 0$. Рассмотрим набор функций

$$V_s(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) - \frac{1}{2} JF_s^2(\gamma) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (23)$$

Покажем, что во всем фазовом пространстве для любого номера s выполняется неравенство

$$\dot{V}_s(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + 2\lambda V_s(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq 0, \quad (24)$$

где \dot{V}_s — производная функции V_s по t в силу системы (2).

Обозначая штрихом дифференцирование по γ и пользуясь формулой (22), получаем из (23) выражение

$$\dot{V}_s = \dot{W} - \dot{\gamma} J F_s F'_s = \dot{W} + \dot{\gamma} (2\sqrt{\lambda \varepsilon} F_s + b_0 \sin \gamma + c_0).$$

Поэтому с учетом (23) имеем

$$\dot{V}_s + 2\lambda V_s = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma} (b_0 \sin \gamma + c_0) + 2\dot{\gamma} \sqrt{\lambda \varepsilon} F_s - \lambda J F_s^2. \quad (25)$$

Так как $\lambda, \varepsilon \geq 0$, то

$$\varepsilon J^{-1} \dot{\gamma}^2 - 2\dot{\gamma} \sqrt{\lambda \varepsilon} F_s + \lambda J F_s^2 = J^{-1} (\sqrt{\varepsilon} \dot{\gamma} - \sqrt{\lambda} J F_s)^2 \geq 0,$$

и поэтому

$$2\dot{\gamma} \sqrt{\lambda \varepsilon} F_s - \lambda J F_s^2 \leq \varepsilon J^{-1} \dot{\gamma}^2. \quad (26)$$

Из соотношений (25), (26) и (18) следует, что

$$\dot{V}_s + 2\lambda V_s = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma} (b_0 \sin \gamma + c_0) + \varepsilon J^{-1} \dot{\gamma}^2 \leq 0.$$

Неравенство (24) доказано.

3. *Ограниченность переменной γ снизу.* Докажем, что при условиях теоремы 3 в любом решении системы (2) функция $\gamma(t)$ ограничена снизу при $t \geq 0$. Допустим, что эта система имеет решение (19), в котором функция $\gamma(t)$ неограничена снизу на полуоси $t \geq 0$. Так как γ — угловая переменная, без ограничения общности будем предполагать, что начальное значение $\gamma_0 = \gamma(0)$ принадлежит промежутку $(e_0, e_1]$ длины 2π . Тогда в неограниченном снизу решении непрерывная функция $\gamma(t)$ при $t \geq 0$ принимает все значения e_s с номерами $s \leq 0$. Для каждого номера $s \leq 0$ обозначим через t_s момент времени, когда функция $\gamma(t)$ в первый раз принимает значение e_s . Функция $F_s(\gamma(t))$ в этот момент времени обращается в ноль:

$$F_s(\gamma(t_s)) = F_s(e_s) = 0 \quad (s = 0, -1, -2, \dots). \quad (27)$$

В начальный момент $t = 0$ функция $F_s(\gamma(t))$ принимает значение $F_s(\gamma_0)$. Из формулы (25) получаем равенство $F_s(\gamma_0) = F_0(\gamma_0 - 2\pi s)$. Его правая часть, согласно (20), стремится к $-\infty$ при $\gamma_0 - 2\pi s \rightarrow +\infty$, то есть при $s \rightarrow -\infty$. Таким образом,

$$F_s(\gamma_0) \rightarrow -\infty \quad (s \rightarrow -\infty). \quad (28)$$

Рассмотрим формулы (23), (24) на выбранном решении с неограниченной снизу функцией $\gamma(t)$. Воспользовавшись свойством (28), выберем номер $s = s_0 \leq 0$ так, чтобы правая часть формулы (23) оказалась отрицательной при $t = 0$, то есть чтобы для функции $V_{s_0}(t)$ выполнялось неравенство $V_{s_0}(0) < 0$. Тогда из неравенства (24): $\dot{V}_{s_0}(t) + 2\lambda V_{s_0}(t) \leq 0$, согласно лемме 4.3.1 из [2] следует, что

$$V_{s_0}(t) \leq V_{s_0}(0) \exp(-2\lambda t) < 0, \quad t \geq 0. \quad (29)$$

С другой стороны, полагая $s = s_0$ в (27), имеем $F_{s_0}(\gamma(t_{s_0})) = F_{s_0}(e_{s_0}) = 0$. Отсюда с учетом определения (23) функций V_s следует, что $V_{s_0}(t_{s_0}) = W(t_{s_0})$. Но функция W неотрицательна по ее определению (11). Поэтому справедливо неравенство $V_{s_0}(t_{s_0}) \geq 0$, которое противоречит (29). Полученное противоречие означает, что допущение о неограниченности функции $\gamma(t)$ снизу неверно.

4. *Ограниченность переменной γ сверху.* Чтобы доказать ограниченность функции $\gamma(t)$ сверху в любом решении системы (2), допустим противное, то есть что у этой системы существует решение с функцией $\gamma(t)$, неограниченной сверху при $t \geq 0$. Далее по той же схеме, что и выше, устанавливаем, что при условиях теоремы 3 это допущение приводит к противоречию. \square

8. Область изменения математических параметров в теореме об ограниченности угла γ . В этом и следующем пунктах рассмотрен вопрос о существовании значений параметров λ, ε , при которых выполняются условия 1, 2 теоремы 3. В п. 8 построена область D изменения параметров λ, ε , в которой $\lambda, \varepsilon \geq 0$ и выполнено условие 2. В п. 9 в указанной области однозначно выбраны значения этих параметров, при которых легче всего удовлетворить условию 1.

Условием 2 теоремы 3 является неравенство (18). После подстановки в него выражений (11), (12) функций W, \dot{W} оно принимает вид

$$(-m - k + \lambda J + \varepsilon J^{-1})\dot{\gamma}^2 + \beta(-R_1 + \lambda L_1)x^2 + \beta(-R_2 + \lambda L_2) \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 \leq 0.$$

Для его выполнения при всех $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ необходимо и достаточно, чтобы параметры λ, ε удовлетворяли трем неравенствам

$$-m - k + \lambda J + \varepsilon J^{-1} \leq 0, \quad -R_1 + \lambda L_1 \leq 0, \quad -R_2 + \lambda L_2 \leq 0. \quad (30)$$

Пусть точки X, Y, Z, Z_0 плоскости (λ, ε) определены равенствами

$$X = (0, \varepsilon_1), \quad Y = (\lambda_1, 0), \quad Z = (\lambda_2, 0), \quad Z_0 = (\lambda_2, \varepsilon_1(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1), \quad (31)$$

где

$$\varepsilon_1 = (m + k)J, \quad \lambda_1 = (m + k)J^{-1}, \quad \lambda_2 = \min(R_1/L_1, R_2/L_2). \quad (32)$$

Рассмотрим на плоскости (λ, ε) прямую $\varepsilon = -J^2\lambda + (m + k)J$, которая определена первым из соотношений (30), если взять в нем знак равенства. Данная прямая пересекает координатные оси $O\varepsilon, O\lambda$ в точках X, Y . Поэтому ее уравнение записывается в виде $\varepsilon/\varepsilon_1 + \lambda/\lambda_1 = 1$, или

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}(\lambda_1 - \lambda). \quad (33)$$

Первому из неравенств (30) удовлетворяют точки плоскости (λ, ε) , лежащие на прямой (33) и ниже этой прямой. Поэтому, с учетом условия $\lambda, \varepsilon \geq 0$,

первому неравенству (30) удовлетворяют точки плоскости (λ, ε) , лежащие внутри треугольника OXY и на его сторонах.

Второе и третье неравенства (30) эквивалентны одному неравенству $\lambda \leq \lambda_2$, которое вместе с условием $\lambda, \varepsilon \geq 0$ определяет на плоскости (λ, ε) полуполосу между двумя лучами, направленными из точек O и $Z = (\lambda_2, 0)$ вертикально вверх.

Возможны два случая. В случае А, когда $\lambda_1 \leq \lambda_2$, прямая (33) не имеет общих точек с вертикальным лучом, выходящем вверх из точки Z , или имеет с ним только общую точку Y на оси $O\lambda$. В случае В, когда $\lambda_1 > \lambda_2$, вертикальный луч, выходящий вверх из точки Z , пересекается с прямой (33) в точке Z_0 , расположенной выше оси $O\lambda$. Поэтому в случае А треугольник OXY целиком лежит в полуполосе между этими двумя лучами, а в случае В часть данного треугольника вместе с вершиной Y выходит за правую границу полуполосы. В результате приходим к такому выводу.

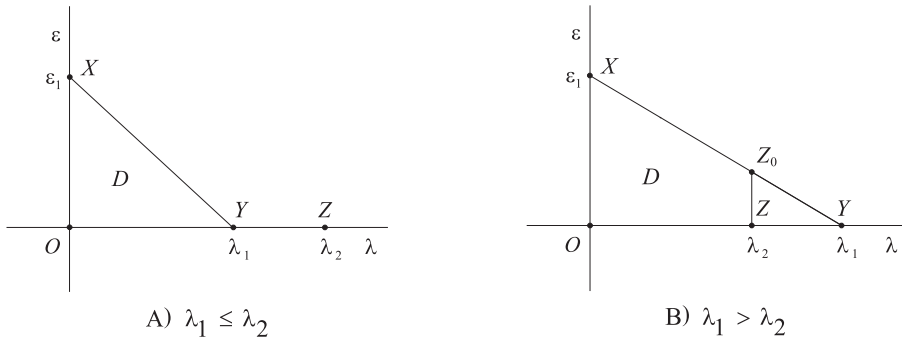


Рис. 2. Область D допустимых значений параметров λ, ε .

Лемма 1. Пусть D — множество значений параметров λ, ε , удовлетворяющих условию $\lambda, \varepsilon \geq 0$ и второму условию теоремы 3. Пусть точки X, Y, Z, Z_0 плоскости (λ, ε) и значения $\varepsilon_1, \lambda_1, \lambda_2$ определены по формулам (31), (32).

В случае А, когда $\lambda_1 \leq \lambda_2$, множество D состоит из точек плоскости (λ, ε) , лежащих внутри треугольника OXY , и точек отрезка XY , исключая его концы (рис. 2, А). В случае В, когда $\lambda_1 > \lambda_2$, множество D состоит из точек, лежащих внутри трапеции OXZ_0Z , и точек ломаной XZ_0Z , исключая ее концы (рис. 2, В).

Лемма 1 позволяет заменить в теореме 3 предположение о существовании значений параметров λ, ε , обеспечивающих выполнение условия 2 этой теоремы, конкретным указанием области изменения этих параметров, в которой выполнено данное условие. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть замкнутая выпуклая область D изменения параметров λ, ε определена, как указано в лемме 1, и пусть в области D существуют значения этих параметров такие, что все решения дифференциального уравнения (17) ограничены на полуоси $t \geq 0$.

Тогда в любом решении (19) системы (2) функция $\gamma(t)$ ограничена при $t \geq 0$.

9. Выбор параметров в теореме об ограниченности угла γ . Уравнение (17) в теоремах 3, 4 отличается от уравнения (15) тем, что в нем в качестве коэффициента демпфирования вместо a_0 выступает величина

$$d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}. \quad (34)$$

Поэтому определение (16) параметров a, c для уравнения (17) принимает вид

$$a = d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 J}, \quad c = c_0/b_0.$$

Согласно изложенным п. 6 результатам, условие ограниченности решений уравнения (17) в теоремах 3, 4 означает, что для этого уравнения имеет место случай $a > a_{\text{cr}}(c)$ (рис. 1, a), то есть выполнено неравенство

$$d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c). \quad (35)$$

Функция $d(\lambda, \varepsilon)$ достигает своего максимального значения d_{max} в некоторой точке $(\lambda_{\text{max}}, \varepsilon_{\text{max}})$ замкнутой ограниченной области D . Если неравенство (35) не выполнено в точке $(\lambda_{\text{max}}, \varepsilon_{\text{max}})$, то оно не выполнено и во всех точках области D . Поэтому для того, чтобы неравенство (35) выполнялось в какой-либо точке области D , необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось в точке $(\lambda_{\text{max}}, \varepsilon_{\text{max}})$, то есть чтобы имело место неравенство

$$d_{\text{max}}/\sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c), \quad (36)$$

Найдем d_{max} . При любом $K = \text{const} > 0$ функция $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ строго монотонно возрастает вдоль луча $\varepsilon = K\lambda$, $\lambda \geq 0$, идущего на плоскости (λ, ε) из начала координат в первый квадрант. Поэтому свое максимальное значение d_{max} в допустимой области D функция (34) принимает на ее “северо-восточной” границе, то есть на отрезке XU в случае А и на ломаной XZ_0Z в случае В (рис. 2). Но в случае В функция $d(\lambda, \varepsilon)$ на вертикальном отрезке ZZ_0 становится монотонно возрастающей функцией $d(\lambda_2, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda_2\varepsilon}$ одной переменной ε . Поэтому в случае В функция $d(\lambda, \varepsilon)$ не может достигать своего максимума d_{max} внутри отрезка ZZ_0 . Следовательно, в обоих случаях А и В максимум функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в области D достигается на прямой (33), а точнее, на отрезке XU этой прямой в случае А и на отрезке XZ_0 в случае В.

На отрезке XU функция $d(\lambda, \varepsilon)$ становится функцией

$$d_0(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\lambda(\lambda_1 - \lambda)}, \quad \lambda \in [0, \lambda_1], \quad (37)$$

одной переменной λ . Производная функции (37) по λ равна

$$d'_0(\lambda) = \frac{\varepsilon_1(\lambda_1 - 2\lambda)}{\lambda_1\sqrt{\varepsilon_1\lambda(\lambda_1 - \lambda)}/\lambda_1}.$$

Она обращается в ноль при $\lambda = \lambda_1/2$. При этом слева от точки $\lambda = \lambda_1/2$ производная $d'_0(\lambda)$ положительна, а справа — отрицательна.

В случае А значение $\lambda_1/2$ принадлежит области определения $[0, \lambda_1]$ параметра λ . Следовательно, это значение соответствует точке максимума функции $d_0(\lambda)$ при $\lambda \in [0, \lambda_1]$, а значит, и точке максимума функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в допустимой области D . Подставив $\lambda = \lambda_1/2$ в (37), находим максимум функции $d_0(\lambda)$, равный максимуму d_{\max} функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в случае А: $d_{\max} = \sqrt{\varepsilon_1 \lambda_1}$, или, с учетом (32), $d_{\max} = m + k$.

В случае В возможны два подслучая B_1, B_2 в зависимости от того, принадлежит ли значение $\lambda_1/2$ области определения $[0, \lambda_2]$ параметра λ или не принадлежит. В подслучае B_1 , когда $\lambda_1/2 \in [0, \lambda_2]$, максимум d_{\max} функции $d(\lambda, \varepsilon)$ остается равным $m + k$, как и в случае А. В подслучае B_2 значение $\lambda_1/2$ аргумента функции $d_0(\lambda)$, соответствующее точке ее абсолютного максимума, строго больше правой границы допустимого промежутка $[0, \lambda_2]$. Поэтому максимум функции $d_0(\lambda)$ на допустимом промежутке достигается в его правой граничной точке λ_2 и этот максимум $d_{\max} = 2\sqrt{\varepsilon_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) / \lambda_1}$ меньше абсолютного максимума функции $d_0(\lambda)$, равного $\sqrt{\varepsilon_1 \lambda_1} = m + k$.

Резюмируя, приходим к такому выводу.

Лемма 2. Точка $(\lambda, \varepsilon) \in D$, в которой для эталонного уравнения (17) выполнено неравенство (35), существует в том и только в том случае, когда справедливо неравенство (36), где

$$d_{\max} = \begin{cases} m + k, & 0 < \lambda_1 \leq 2\lambda_2; \\ 2\sqrt{\varepsilon_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) / \lambda_1}, & \lambda_1 > 2\lambda_2, \end{cases} \quad (38)$$

значения $\varepsilon_1, \lambda_1, \lambda_2$ определены по формулам (32).

Пользуясь леммой 2, получаем из теоремы 3 достаточный критерий ограниченности угла γ , в котором вместо коэффициента демпфирования $d(\lambda, \varepsilon)$, зависящего от двух параметров, используется его максимальное возможное значение d_{\max} .

Теорема 5. Пусть все решения дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + d_{\max}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (39)$$

где b_0, c_0, d_{\max} определены по формулам (3), (38), ограничены при $t \geq 0$.

Тогда

1) в любом решении (19) системы уравнений (2) функция $\gamma(t)$ ограничена при $t \geq 0$;

2) величина d_{\max} является максимально возможным коэффициентом демпфирования для уравнения вида (17) с коэффициентом демпфирования $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$.

10. Ограниченность всех фазовых переменных. Докажем теперь, что для любого решения системы (2) в случае ограниченности угла γ имеет место ограниченность остальных фазовых переменных $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Для

обеспечения ограниченности угла γ достаточно принять условия одной из теорем 3–5. Таким образом, необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 3. Пусть выполнены условия одной из теорем 3–5. Тогда любое решение (19) системы (2) ограничено по всем переменным при $t \geq 0$.

Доказательство. Из определения (11) функции $U(\gamma)$ и формул (9), (10) следует, что при условии (6) значения $\gamma = d_s$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют точкам локальных минимумов этой функции, а значения $\gamma = e_s$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — точкам ее локальных максимумов.

В доказательстве теоремы 3 для функции $\gamma(t)$ получена оценка снизу $\gamma(t) \geq e_{s_0}$ ($t \geq 0$), номер $s_0 \leq 0$ определен в ходе доказательства. Слева и справа от точки локального максимума $\gamma = e_{s_0}$ функции $U(\gamma)$ расположены точки $\gamma = d_{s_0-1}$ и $\gamma = d_{s_0}$ ее локальных минимумов. При этом значение $\gamma = d_{s_0}$ является точкой минимума функции $U(\gamma)$ на всей полуоси $\gamma \geq e_{s_0}$. Следовательно, на рассматриваемом решении (19) системы (2) функция

$$\Delta U(\gamma) = U(\gamma) - U(d_{s_0}) = \int_{d_{s_0}}^{\gamma} (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(\cos d_{s_0} - \cos \gamma) + c_0(\gamma - d_{s_0}) \quad (40)$$

неотрицательна на этой полуоси: $\Delta U(\gamma) \geq 0$, $\gamma \geq e_{s_0}$.

Рассмотрим функцию

$$v(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \Delta U(\gamma).$$

Она лишь на константу отличается от функции $V(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2})$, определенной в (11), и поэтому имеет такую же производную (13) по t в силу системы (2):

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -(m+k)\dot{\gamma}^2 - \beta R_1 x^2 - \beta R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2.$$

Поскольку $\dot{v} \leq 0$, то на решении системы (2) функция v не превосходит своего начального значения, то есть фазовые переменные принадлежат множеству

$$\Omega = \{(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) : W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \Delta U(\gamma) \leq v_0\}, \quad (41)$$

где

$$v_0 = W(\dot{\gamma}_0, x_0, i_{10}, \dots, i_{n_20}) + \Delta U(\gamma_0)$$

— значение функции v в начальный момент $t = 0$. Из неотрицательности функций $W, \Delta U$ следует, что $v_0 \geq 0$, и тогда из (41) следует выполнение на решении системы (2) двух неравенств

$$W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq v_0, \quad \Delta U(\gamma) \leq v_0. \quad (42)$$

Согласно определению (11), функция W является определенно положительной квадратичной формой переменных $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Поэтому первому из неравенств (42) удовлетворяют только значения этих переменных, лежащие в шаре $\dot{\gamma}^2 + x^2 + i_1^2 + \dots + i_{n_2}^2 \leq \rho^2$ конечного радиуса ρ . Второе неравенство (42) с учетом выражения (40) для ΔU приводит к еще одному доказательству ограниченности функции $\gamma(t)$ сверху. \square

11. Структура притягивающего множества. Перейдем к третьему пункту плана, намеченного в конце п. 5, и докажем следующую лемму.

Лемма 4. Пусть функция V определена по формуле (11), и пусть M — множество точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий всех решений системы (2), определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию $\dot{V} = 0$. Тогда множество M состоит только из стационарных точек системы (2).

Доказательство. Из формулы (13) для \dot{V} следует, что множество M образовано фазовыми траекториями, для которых $\dot{\gamma} = 0, x = 0, i_1 = \dots = i_{n_2} = 0$, то есть оно состоит из стационарных точек $\gamma = \gamma^0, \dot{\gamma} = 0, x = 0, i_1 = \dots = i_{n_2} = 0$ системы (2). В п. 2 установлено, что при $c = c_0/b_0 < 1$ множество стационарных точек данной системы состоит из двух счетных подмножеств, соответствующих значениям (9) постоянной γ^0 . \square

12. Теорема о глобальной устойчивости. В каждой из теорем 3–5 даны условия ограниченности решений системы уравнений (2) по переменной γ . Далее, в лемме 3 установлено, что из ограниченности решений системы (2) по γ следует их ограниченность по всем переменным.

Тогда из принципа Ла-Салля (см. п. 5) с функцией Ляпунова V , определенной в (11), следует, что при выполнении условий любой из теорем 3–5 всякое решение системы уравнений (2) с течением времени неограниченно приближается к инвариантному множеству M . Согласно лемме 4, множество M — это множество стационарных точек системы (2). Поскольку расстояния между любыми двумя точками множества M ограничены снизу положительной постоянной $\min(d_0 - e_0, e_1 - d_0) > 0$, то стремление решения к M означает, что оно стремится к одной из стационарных точек. При этом, как показывает теорема 1, на 2π -периоде изменения угла γ существует одна локально асимптотически устойчивая и одна неустойчивая стационарная точка.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполнены условия любой из теорем 3–5. Тогда система уравнений (2), описывающая динамику синхронного электромотора, глобально устойчива, то есть каждое ее решение с течением времени стремится к одному из двух стационарных решений, существующих на 2π -периоде изменения угла γ .

13. Результаты численного моделирования. Чтобы продемонстрировать полученные результаты на числовых примерах, рассмотрим два варианта 1, 2 выбора параметров, входящих в систему уравнений (2). Эти варианты отличаются один от другого только коэффициентом сильного регу-

лирования m , а все остальные параметры в обоих вариантах одинаковы. Для каждого из вариантов 1, 2 рассмотрим два набора начальных данных, которые отличаются один от другого только знаком начального значения $\dot{\gamma}_0$ угловой скорости $\dot{\gamma}$. В результате имеем четыре набора параметров и начальных данных, которые обозначаем 1а, 1б, 2а, 2б.

Приведем выбранные значения параметров и начальных данных в системе единиц *сантиметр, грамм, секунда, ампер*, наименования единиц измерения при этом опускаем. Неизменяемые параметры: $J = 10^4, k = 7.5, \omega = 1000, R_1 = 0.03, R_2 = 0.003, L_1 = 6 \cdot 10^{-4}, L_2 = 6 \cdot 10^{-5}, n_2 = 6, \beta = 1, a_1 = 5.6250, a_2 = 0.0011, b_0 = 75000, c_0 = 7500$. Неизменяемые начальные данные: $\gamma_0 = 0, x_0 = 0.5, i_{10} = 0.1, i_{20} = 0.2, i_{30} = -0.1, i_{40} = -0.2, i_{50} = -0.3, i_{60} = -0.2$. Изменяемые значения m и $\dot{\gamma}_0$ для случаев 1а, 1б, 2а, 2б указаны в таблице.

Величина	1а	1б	2а	2б
m	3219.6	3219.6	536.6	536.6
$\dot{\gamma}_0$	8	-8	8	-8

Выбор параметров здесь не связан с параметрами реальных электромоторов и обусловлен стремлением дать иллюстрацию полученных результатов.

С помощью приведенной в п. 6 синусоидальной аппроксимации критического значения параметра a получаем $a_{cr} = 0.0786$ для обоих вариантов 1, 2. Проверка условия Трикоми $a > a_{cr}$ для эталонного уравнения (39) показывает, что $a = 0.1178$ для варианта 1, и условие Трикоми выполнено. Для варианта 2 имеем $a = 0.0199$, так что это условие не выполнено. Поэтому для варианта 1, согласно теореме 6, система уравнений (2) глобально устойчива, и все ее решения должны стремиться к стационарным. Для варианта 2 гло-

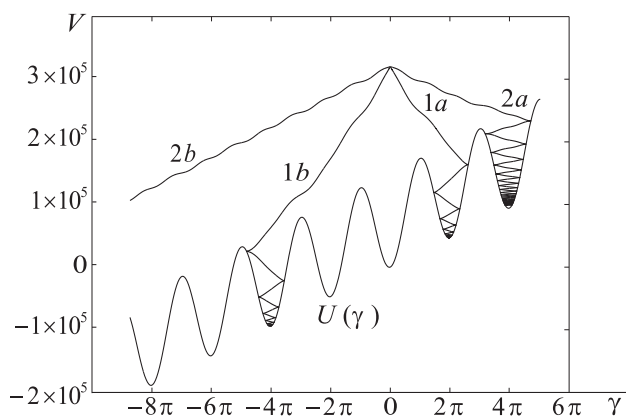


Рис. 3. Графики кривых $(\gamma(t), V(t))$ и функции $U(\gamma)$.

бальная устойчивость системы уравнений (2) не гарантирована, и она может иметь как решения, стремящиеся к стационарному, так и неограниченные решения. Эти выводы иллюстрирует рис. 3.

На нем изображены график потенциальной энергии $U(\gamma)$ и кривые $(\gamma(t), V(t))$, полученные путем численного интегрирования системы (2) для случаев 1a, 1b, 2a, 2b. Здесь $V(t)$ — функция V , взятая на решении системы (2). Так как $W \geq 0$, то $V = W + U \geq U$, и поэтому в процессе убывания $V(t)$ графики кривых $(\gamma(t), V(t))$ не могут опуститься ниже графика $U(\gamma)$. Из рисунка видно, что в случаях 1a, 1b, когда, по теореме 6, имеет место глобальная устойчивость, решение с течением времени попадает в “потенциальную яму”, соответствующую одной из асимптотически устойчивых стационарных точек, а затем притягивается к этой точке. В случаях 2a, 2b, когда глобальная устойчивость не гарантирована, существуют решения, как стремящиеся к стационарному (кривая 2a), так и неограниченные по γ (кривая 2b).

1. *Леонов Г.А.* Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // Прикл. математика и механика. — 1976. — **40**, вып. 2. — С. 238–244.
2. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
3. *Tricomi F.* Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annal. della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. — 1933. — **2**, no. 2. — P. 1–20.
4. *Leonov G.A., Zaretskiy A.M.* Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electric machines // Vestnik St. Petersburg University. Math. — 2012. — **45**, no. 4. — P. 157–163.
5. *Леонов Г.А., Зарецкий А.М.* Циклы дифференциальных уравнений синхронных электрических машин // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012. — № 4. (Электронный журнал.)
6. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 10. — С. 47–85.
7. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.
8. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
9. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969. — 300 с.
10. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электромотора // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. — 2014. — **29**. — С. 121–126.

B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich

Sufficient condition for global stability of the model of the synchronous electric motor

This investigation is based on the multi-current model of the synchronous electric motor. The load moment is assumed to be dissipative and linear with respect to the angular velocity of the rotor. Effective sufficient condition is obtained guaranteeing that any motion of the synchronous electric motor tends with time to its steady rotation.

Keywords: *synchronous electric motor, global stability, reduction method, LaSalle invariance principle.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 26.05.16