УДК 531.38

©2016. **Г. А. Котов**

О ПОЛУРЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЯХ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

Изучены условия существования полурегулярных прецессий второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда несомые тела – два вращающихся гироскопа. Указаны условия на распределение масс гиростата при которых редуцированные уравнения имеют решение в элементарных функциях времени.

Ключевые слова: *гиростат, два ротора, прецессионные движения.*

Введение. Постановка задачи о движении гиростата под действием заданного класса сил в случае переменного гиростатического момента описана в статьях [1, 2]. При исследовании условий существования программных движений в этой задаче использована классификация движений гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Например, результаты П.В. Харламова, полученные им в случае постоянного гиростатического момента и посвященные анализу равномерных вращений гиростата, послужили примером для рассмотрения таких движений в задаче о движении неавтономного гиростата [3]. Прецессионные движения гиростата имеют более сложный характер, чем равномерные вращения, так как они являются суперпозицией двух вращений тела-носителя относительно осей, одна из которых неизменно связана с телом, а другая неподвижна в пространстве [4]. При изучении этого класса движений гиростата также установлены многочисленные результаты (см. обзоры [4, 5]).

В настоящей статье рассмотрен случай, когда тело-носитель содержит два ротора, вращающихся вокруг ортогональных осей. На основании метода, предложенного в [6], для уравнений движения гиростата класса Кирхгофа–Пуассона, найдено решение, которое является полурегулярной прецессией второго типа гиростата.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [4]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -(\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta})+\big(A\boldsymbol{\omega}+\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}\big)\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе, являющиеся ортами вектора гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}$; $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ — компоненты гиростатического момента, дифференцируемые функции времени; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ — симметричные постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k — произвольная постоянная.

Для прецессионных движений угловая скорость тела-носителя представима в виде (см. напр. [5]) $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}$, где переменные φ, ψ являются углами Эйлера, вектор $\boldsymbol{a}$ – фиксирован в теле, вектор $\boldsymbol{\nu}$ – фиксирован в пространстве. Рассмотрим полурегулярные прецессионные движения второго типа гиростата относительно вертикали, тогда

$$\dot{\varphi} = n, \quad \dot{\psi} \neq \mathrm{const}, \tag{4}$$

где n – некоторая константа, отличная от нуля. Из (4) следует, что $\varphi = nt + \varphi_0$ и выбором начальной фазы движения добьемся $\varphi_0 = 0$.

Свяжем подвижную систему координат с единичным вектором $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, который образует постоянный угол θ_0 с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Тогда имеем [4]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos\theta_0, \quad \boldsymbol{\nu} = (a_0'\sin nt,\ a_0'\cos nt,\ a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{5}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$.

Подстановка соотношений (5) в уравнение (2) дает тождество. Подставим $\boldsymbol{\omega}$ из (5) в (1):

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} + n\dot{\psi}\Big[Sp(A)\big(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\big) - 2\big(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\big)\Big] - n^2\big(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\big) - \\ - \dot{\psi}^2\big(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}\big) + n\big(B\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\big) + \dot{\psi}\big(B\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}\big) - \lambda_1(t)\Big[n\big(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}\big) + \dot{\psi}\big(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu}\big)\Big] - \\ - \lambda_2(t)\Big[n\big(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{a}\big) + \dot{\psi}\big(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\nu}\big)\Big] + \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu} = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $Sp(A)$ — след матрицы A.

Для исследования уравнения (6) будем использовать ортонормированный базис $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, причем из свойства ортонормированности для векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ следуют соотношения

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Умножив левую часть уравнения (6) скалярно соответственно на $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$, получим

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t)\Big[n\gamma_3 + \big(a_0'\gamma_1 \sin nt + a_0'\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3\big)\dot{\psi}\Big] + F_1(t) = 0,\\
&\dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t)\Big[n\gamma_3 + \big(a_0'\gamma_1 \sin nt + a_0'\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3\big)\dot{\psi}\Big] + F_2(t) = 0,\\
&\lambda_2(t)\Big[n\alpha_3 + \big(a_0'\alpha_1 \sin nt + a_0'\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3\big)\dot{\psi}\Big] -\\
&\quad - \lambda_1(t)\Big[n\beta_3 + \big(a_0'\beta_1 \sin nt + a_0'\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3\big)\dot{\psi}\Big] + F_3(t) = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
&F_i(t) = \big(d_{1,i}' \sin nt + d_{1,i} \cos nt + a_0 d_{0,i}\big)\ddot{\psi} + A_{0,i}n^2 -\\
&- \Big(A_{2,i}\cos 2nt + A_{2,i}'\sin 2nt + a_0 A_{1,i}\cos nt + a_0 A_{1,i}'\sin nt + \varkappa_0 A_{0,i}\Big)\dot{\psi}^2 +\\
&+ n\dot{\psi}\Big[\big(d_{1,i}' - A_{1,i}\big)\cos nt - \big(d_{1,i} + A_{1,i}'\big)\sin nt + 2a_0 A_{0,i}\Big] + n\big(h_{1,i}'\sin nt +\\
&+ h_{1,i}\cos nt + a_0 h_{0,i}\big) + \Big(B_{2,i}\cos 2nt + B_{2,i}'\sin 2nt + a_0 B_{1,i}\cos nt +\\
&+ a_0 B_{1,i}'\sin nt - \varkappa_0 h_{0,i}\Big)\dot{\psi} + C_{2,i}\cos 2nt + C_{2,i}'\sin 2nt + \delta_{1,i}\cos nt +\\
&+ \delta_{1,i}'\sin nt + \delta_{0,i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}),\ (i = 1,2,3), \quad (\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\gamma})\\
&d_{0,i} = e_{1,i}A_{13} + e_{2,i}A_{23} + e_{3,i}A_{33}, \quad d_{1,i}' = a_0'\big(e_{1,i}A_{11} + e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\big),\\
&d_{1,i} = a_0'\big(e_{1,i}A_{12} + e_{2,i}A_{22} + e_{3,i}A_{23}\big), \quad A_{0,i} = e_{2,i}A_{13} - e_{1,i}A_{23},\\
&A_{1,i} = a_0'\Big[e_{1,i}\big(A_{22} - A_{33}\big) - e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\Big],\\
&A_{1,i}' = a_0'\Big[e_{2,i}\big(A_{33} - A_{11}\big) + e_{1,i}A_{12} - e_{3,i}A_{23}\Big],\\
&A_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\big(2e_{3,i}A_{12} - e_{1,i}A_{23} - e_{2,i}A_{13}\big),\\
&A_{2,i}' = \frac{a_0'^2}{2}\Big[e_{2,i}A_{23} - e_{1,i}A_{13} + e_{3,i}(A_{11} - A_{22})\Big],\\
&h_{1,i} = a_0'\big(e_{1,i}B_{22} - e_{2,i}B_{12}\big), \quad h_{1,i}' = a_0'\big(e_{1,i}B_{12} - e_{2,i}B_{11}\big),\\
&h_{0,i} = e_{1,i}B_{23} - e_{2,i}B_{13}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{2}(a_0'^2 - 2a_0^2),\\
&B_{1,i} = a_0'\Big[e_{1,i}\big(B_{22} - B_{33}\big) - e_{2,i}B_{12} + e_{3,i}B_{13}\Big],\\
&B_{1,i}' = a_0'\Big[e_{2,i}\big(B_{33} - B_{11}\big) + e_{1,i}B_{12} - e_{3,i}B_{23}\Big],\\
&B_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\big(2e_{3,i}B_{12} - e_{1,i}B_{23} - e_{2,i}B_{13}\big),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$B'_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\Big[e_{2,i}B_{23} - e_{1,i}B_{13} + e_{3,i}(B_{11} - B_{22})\Big],$$
$$C_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\big(2e_{3,i}C_{12} - e_{1,i}C_{23} - e_{2,i}C_{13}\big),$$
$$C'_{2,i} = \frac{a_0'^2}{2}\Big[e_{2,i}C_{23} - e_{1,i}C_{13} + e_{3,i}(C_{11} - C_{22})\Big],$$
$$\delta'_{1,i} = a'_0\Big[a_0\big(e_{2,i}C_{33} - e_{2,i}C_{11} - e_{1,i}C_{12} - e_{3,i}C_{23}\big) + e_{3,i}s_2 - e_{2,i}s_3\Big],$$
$$\delta_{1,i} = a'_0\Big[a_0\big(e_{1,i}C_{22} - e_{1,i}C_{33} - e_{2,i}C_{12} + e_{3,i}C_{13}\big) + e_{1,i}s_3 - e_{3,i}s_1\Big],$$
$$\delta_{0,i} = \varkappa_0\big(e_{2,i}C_{13} - e_{1,i}C_{23}\big) + a_0\big(e_{2,i}s_1 - e_{1,i}s_2\big).$$

В [6] показано, что компоненты гиростатического момента с помощью интеграла момента количества движения из (3) представимы в виде

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{NF_3(t) - F_4(t)(\alpha_3 n + M\dot\psi)}{n(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot\psi(M^2 + N^2)},\\ \lambda_2(t) &= -\frac{MF_3(t) + F_4(t)(\beta_3 n + N\dot\psi)}{n(\alpha_3 M + \beta_3 N) + \dot\psi(M^2 + N^2)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$F_4(t) = (A'_1\sin nt + A_1\cos nt + a_0A_{33})n +$$
$$+ (A_2\cos 2nt + A'_2\sin 2nt + 2a_0A_1\cos nt + 2a_0A'_1\sin nt + A_0)\dot\psi -$$
$$- \frac{1}{2}(B_2\cos 2nt + B'_2\sin 2nt + 2a_0B_1\cos nt + 2a_0B'_1\sin nt + B_0 + 2k),$$
$$M = a'_0\alpha_1\sin nt + a'_0\alpha_2\cos nt + a_0\alpha_3, \quad N = a'_0\beta_1\sin nt + a'_0\beta_2\cos nt + a_0\beta_3,$$
$$A_2 = \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad A'_2 = a_0'^2A_{12}, \quad A'_1 = a'_0A_{13}, \quad A_1 = a'_0A_{23},$$
$$B_2 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22} - B_{11}), \quad B'_2 = a_0'^2B_{12}, \quad B'_1 = a'_0B_{13}, \quad B_1 = a'_0B_{23},$$
$$A_0 = \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} + A_{11}) + a_0^2A_{33}, \quad B_0 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22} + B_{11}) + a_0^2B_{33}.$$

Для получения замкнутой системы к уравнениям (9) присоединим первое уравнение системы (7).

2. Случай ортогональности гиростатического момента $\boldsymbol\lambda(t)$ оси собственного вращения тела-носителя. Положим

$$\boldsymbol\alpha = (1,0,0), \quad \boldsymbol\beta = (0,1,0), \quad \boldsymbol\gamma = (0,0,1). \tag{10}$$

Тогда выражения для компонент гиростатического момента из (9) примут вид:

$$\lambda_1(t) = \frac{P_1\ddot\psi + P_2\dot\psi^2 + P_3\dot\psi + P_4}{8a'_0\dot\psi}, \quad \lambda_2(t) = \frac{Q_1\ddot\psi + Q_2\dot\psi^2 + Q_3\dot\psi + Q_4}{8a'_0\dot\psi}, \tag{11}$$

где с учетом (8), (11) введены обозначения:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = 4(a_0' A_{23}\cos 2nt + a_0' A_{13}\sin 2nt + 2a_0 A_{33}\cos nt + a_0' A_{23}),\\
&P_2 = 4\big(a_0' a_0(A_{13}\cos 2nt - A_{23}\sin 2nt) - 2a_0'^2 A_{12}\cos nt -\\
&- 2(a_0'^2 A_{11} + a_0^2 A_{33})\sin nt - 3a_0 a_0' A_{13}\big),\\
&P_3 = a_0'^2(B_{11} - B_{22})\sin 3nt + 2a_0'^2 B_{12}\cos 3nt +\\
&+ 4a_0' n(A_{13}\cos 2nt - A_{23}\sin 2nt) + (a_0'^2(5B_{11} - B_{22}) + 4a_0^2 B_{33})\sin nt +\\
&+ 6a_0'^2 B_{12}\cos nt + 8(k - a_0 n A_{33})\sin nt + 4a_0'(2a_0 B_{13} - nA_{13}),\\
&P_4 = 2a_0'^2(C_{11} - C_{22})\sin 3nt + 4a_0'^2 C_{12}\cos 3nt + 2a_0'^2(C_{11} - C_{22})\sin nt +\\
&+ 4a_0'\big((s_2 - a_0 C_{23})\sin 2nt - (s_1 - a_0 C_{13})\cos 2nt\big) + 4a_0'^2 C_{12}\cos nt -\\
&- 4a_0'(s_1 - a_0 C_{13});\\
&Q_1 = -4(a_0' A_{23}\sin 2nt - a_0' A_{13}\cos 2nt + 2a_0 A_{33}\sin nt + a_0' A_{13}),\\
&Q_2 = -4\big(a_0' a_0(A_{23}\cos 2nt + A_{13}\sin 2nt) + 2a_0'^2 A_{12}\sin nt +\\
&+ 2(a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33})\cos nt + 3a_0 a_0' A_{23}\big),\\
&Q_3 = a_0'^2(B_{11} - B_{22})\cos 3nt - 2a_0'^2 B_{12}\sin 3nt -\\
&- 4a_0' n(A_{23}\cos 2nt + A_{13}\sin 2nt) + (a_0'^2(5B_{22} - B_{11}) + 4a_0^2 B_{33})\cos nt +\\
&+ 6a_0'^2 B_{12}\sin nt + 8(k - a_0 n A_{33})\cos nt + 4a_0'(2a_0 B_{23} - nA_{23}),\\
&Q_4 = 2a_0'^2(C_{11} - C_{22})\cos 3nt - 4a_0'^2 C_{12}\sin 3nt - 2a_0'^2(C_{11} - C_{22})\cos nt +\\
&+ 4a_0'\big((s_1 - a_0 C_{13})\sin 2nt + (s_2 - a_0 C_{23})\cos 2nt\big) + 4a_0'^2 C_{12}\sin nt -\\
&- 4a_0'(s_2 - a_0 C_{23}).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Рассмотрим случай, при котором в формулах (11) возможно избавиться от функции $\dot{\psi}$ в знаменателе. Для этого потребуем выполнения равенств $P_1 = P_4 = 0$ и $Q_1 = Q_4 = 0$, что приводит к ограничениям на параметры:

$$
a_0 = 0, \quad A_{13} = A_{23} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad s_1 = s_2 = 0. \tag{13}
$$

Соотношения (11) с учетом (12), (13) запишутся в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(t) = -\dot{\psi}(A_{11}\sin nt + A_{12}\cos nt) + \frac{1}{8}(2B_{12}\cos 3nt + (B_{11} - B_{22})\sin 3nt) +\\
&+ \frac{1}{8}(6B_{12}\cos nt + (5B_{11} - B_{22})\sin nt) + k\sin nt,\\
&\lambda_2(t) = -\dot{\psi}(A_{12}\sin nt + A_{22}\cos nt) + \frac{1}{8}(-2B_{12}\sin 3nt + (B_{11} - B_{22})\cos 3nt) +\\
&+ \frac{1}{8}(6B_{12}\sin nt + (5B_{22} - B_{11})\cos nt) + k\cos nt.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Подставляя выражение для $\lambda_1(t)$ из (16) в первое уравнение системы (7), определим функцию $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{n\big((B_{22}-B_{11})\cos 2nt + 2B_{12}\sin 2nt - B_{22} - B_{11}\big)}{2(nA_{33} - B_{23}\cos nt - B_{13}\sin nt)} + \\ + \frac{C_{13}\sin nt + C_{23}\cos nt - s_3}{nA_{33} - B_{23}\cos nt - B_{13}\sin nt}. \tag{15}$$

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ из (14) и $\dot{\psi}$ из (15) обращают все уравнения системы (7) в тождества.

Таким образом, при условиях (10), (13) компоненты гиростатического момента определяются равенствами (14), функция $\psi(t)$ находится интегрированием выражения (15) и является элементарной функцией времени. Угол нутации равен $\dfrac{\pi}{2}$, третья ось подвижной системы координат является главной осью, вектор обобщенного центра масс коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ и ортогонален плоскости, содержащей гиростатический момент. Компоненты векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ таковы

$$\nu_1 = \sin nt, \quad \nu_2 = \cos nt, \quad \nu_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin nt, \quad \omega_2 = \dot{\psi}\cos nt, \quad \omega_3 = nt.$$

3. Один класс полурегулярных прецессионно-изоконических движений гиростата второго типа. Пусть выполняются условия (10), которые определяют расположение роторов в теле-носителе, а скорость прецессии задана в виде

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\mu_1\sin\varphi + \mu_0} = \frac{n}{\mu_1\sin nt + \mu_0}, \tag{16}$$

где μ_1, μ_0 – некоторые константы, причем $\mu_0^2 = 1 + \mu_1^2$. Подставим выражение для скорости прецессии (16) в равенства (11)

$$\lambda_1(t) = \frac{n^2(P_2 - P_1\mu_1\cos nt) + (\mu_1\sin nt + \mu_0)(P_3 n + P_4(\mu_1\sin nt + \mu_0))}{8a_0' n(\mu_1\sin nt + \mu_0)}, \\ \lambda_2(t) = \frac{n^2(Q_2 - Q_1\mu_1\cos nt) + (\mu_1\sin nt + \mu_0)(Q_3 n + Q_4(\mu_1\sin nt + \mu_0))}{8a_0' n(\mu_1\sin nt + \mu_0)}, \tag{17}$$

где P_j и Q_j из (12). Первое уравнение из (7) с учетом (16) и (17) представимо в виде

$$\sum_{j=0}^{5} H_j\cos jnt + G_j\sin jnt = 0$$

и должно быть тождеством по t, что может быть эквивалентно системе из одиннадцати уравнений

$$H_0 = 0, \quad H_j = 0, \quad G_j = 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Выпишем явный вид этих уравнений

$$
\begin{gathered}
C_{12}=0,\ C_{11}=C_{22},\ a_0C_{23}+nB_{23}=0,\ \mu_0(\mu_0-1)(3\mu_1^2-4\mu_0^2)(B_{11}-B_{22})=0,\\
2s_1\mu_1+a_0'n(B_{22}-B_{11})-2a_0\mu_1C_{13}=0,\quad -s_2\mu_1+a_0'nB_{12}+a_0\mu_1C_{23}=0,\\
(a_0-5\mu_0)(s_2\mu_1-a_0'nB_{12}-a_0\mu_1C_{23})+a_0'(a_0'\mu_1C_{23}-n\mu_0B_{12})=0,\\
(a_0-5\mu_0)(2s_1\mu_1+a_0'n(B_{22}-B_{11})-2a_0\mu_1C_{13})+a_0'(2a_0'\mu_1C_{13}-\\
-n\mu_0(B_{22}-B_{11}))=0,\quad -\mu_1^2[2s_3+n(B_{11}+B_{22})+2a_0(C_{11}-C_{33})]+\\
+\mu_0(B_{22}-B_{11})(2n\mu_0-a_0n)+2a_0'\mu_1(nB_{13}+2\mu_0C_{13})=0,\\
-2a_0\mu_1^2k-\mu_1^2[2a_0'n\mu_1A_{13}-2n(1+a_0\mu_0)A_{33}-a_0(a_0'^2B_{22}-a_0^2B_{33}-\\
-2a_0'^2B_{33})]+a_0'^2\mu_0^2(B_{22}-B_{11})(2\mu_0-2-a_0)+2a_0'^3\mu_1\mu_0B_{13}=0.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Решением алгебраической системы (18) являются равенства

$$
\begin{gathered}
C_{12}=0,\quad C_{11}=C_{22},\quad B_{12}=\frac{C_{23}(B_{11}-B_{22})}{2C_{13}},\quad B_{23}=\frac{-a_0C_{23}}{n},\\
\mu_0=\frac{2a_0'C_{13}}{\sqrt{4a_0'^2C_{13}^2-n^2(B_{22}-B_{11})^2}},\quad \mu_1=\frac{n(B_{11}-B_{22})}{\sqrt{4a_0'^2C_{13}^2-n^2(B_{22}-B_{11})^2}},\\
s_1=\frac{a_0'n(B_{11}-B_{22})}{2\mu_1}+a_0C_{13},\quad s_2=\frac{C_{23}(a_0\mu_0+a_0'^2)}{\mu_0},\\
s_3=\frac{\mu_1^2\big[2a_0(C_{33}-C_{11})-n(B_{11}+B_{22})\big]+n\big[2a_0'\mu_1B_{13}-a_0\mu_0(B_{22}-B_{11})\big]}{2\mu_1^2},\\
k=\frac{1}{2a_0\mu_1^2}\Big(a_0'^2\mu_0\big[\mu_0(B_{22}-B_{11})(2\mu_0-2-a_0)+2a_0'\mu_1B_{13}\big]+\\
+\mu_1^2\big[2nA_{33}(1+a_0\mu_0)-2na_0'\mu_1A_{13})+a_0(a_0'^2B_{22}-a_0^2B_{33}-2a_0'^2B_{33})\big]\Big).
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Таким образом, при выполнении ограничений (11) на расположение роторов в теле-носителе и соотношений (19), связывающих параметры задачи, гиростат совершает прецессионно-изоконические движения с постоянной скоростью собственного вращения n, подчиняющейся условию

$$
-\left|\frac{2a_0'C_{13}}{B_{11}-B_{22}}\right|<n<\left|\frac{2a_0'C_{13}}{B_{11}-B_{22}}\right|,
$$

и скоростью прецессии, заданной в виде (16). Положение центра масс и скорость прецессии не зависят от компонент тензора инерции. Компоненты гиростатического момента задаются формулами (17) с учетом (12), (19).

Выводы. Для случая полурегулярной прецессии гиростата второго типа дифференциальные уравнения движения (1), (2) редуцированы к системе третьего порядка (7) на компоненты гиростатического момента и скорость прецессии. Построены два новых решения этих равнений, описывающих полурегулярные прецессионные и прецессионно-изоконические движения второго типа.

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – Т. 1. – М., 1949. – С. 31–152. (Изд. 1-е: Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ. – 1885. – **17**, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113; вып. 7. – С. 145–149; вып. 8. – С. 231–280).
2. *Румянцев В. В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
3. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-е НГУ, 1965. – 221 с.
4. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2012. – 364 с.
5. *Горр Г. В., Ковалев А.М.* Движение гиростата – Киев: Наук. думка, 2013. – 407 с.
6. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида гиростата, несущего два маховика // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 79-89.

G.A. Kotov

On the semi-regular precession motions of gyrostat carrying two rotors

The existence of conditions of semi-regular precession motions of the second type under the action of potential and gyroscopic forces of gyrostat with two rotors were studied. Conditions for gyrostat's mass distribution for which reduced equations have solution in elemental functions were obtained.

Keywords: *gyrostat, two rotors, precession motions.*

ГОУ ВПО "Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры", г. Макеевка

kotov_ga@rambler.ru

Получено 07.06.16