УДК 531.38

©2016. **А.М. Ковалев, Д.А. Данилюк**

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Исследована зависимость от времени параметров Родрига–Гамильтона в решениях Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гриоли и Гесса уравнений движения тела с неподвижной точкой. Получены типы инвариантных соотношений в указанных решениях.

Ключевые слова: *параметры Родрига–Гамильтона, решения уравнений Эйлера–Пуассона, инвариантные соотношения, твердое тело с неподвижной точкой.*

Введение. В динамике твердого тела для изучения свойств движения применяются различные методы и параметры (метод инвариантных соотношений (ИС) [1, 2], углы Эйлера [3–6], параметры Родрига–Гамильтона (Р.–Г.) [7–12] и др.). На их базе получена значительная информация о движении твердого тела под действием силы тяжести [4, 5] и под действием потенциальных и гироскопических сил [6]. Использование параметров Р.–Г. актуально не только в задачах ориентации движущихся объектов [7, 8], но и при изучении колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [9]. Поэтому представляет интерес исследование свойств параметров Р.–Г. в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона.

Данная статья посвящена изучению зависимостей от времени параметров Р.–Г. в решениях Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гриоли и Гесса и исследованию в этих решениях ИС, которые зависят только от параметров Р.–Г.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения твердого тела под действием силы тяжести [3–5]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Здесь обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор $\dfrac{\mathbf{OC}}{|\mathbf{OC}|}$, где O – неподвижная точка, C – центр тяжести тела; $s = mg\,|\mathbf{OC}|$, где m – масса тела, g – ускорение свободного падения.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{2}$$

где E и k – произвольные постоянные.

Введем углы Эйлера θ, φ, ψ таким образом, что $\theta = \angle(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nu})$, $\dot\varphi$ – скорость собственного вращения твердого тела вокруг вектора $\mathbf{e}$, $\dot\psi$ – скорость прецессии вокруг вектора $\boldsymbol{\nu}$. Тогда [11]

$$\omega_1 = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \quad \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta, \tag{3}$$

$$\nu_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \tag{4}$$

Если известно решение уравнений (1)

$$\omega_i = \omega_i(t), \quad \nu_i = \nu_i(t) \quad (i = \overline{1,3}), \tag{5}$$

то углы Эйлера можно определить из (3), (4):

$$\theta = \arccos\nu_3, \quad \varphi = \operatorname{argtg}\frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \psi = \int_{t_0}^{t} \frac{\omega_1(t)\nu_1(t) + \omega_2(t)\nu_2(t)}{\nu_1^2(t) + \nu_2^2(t)} dt. \tag{6}$$

Параметры Р.–Г. выражаются через углы Эйлера (6) следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Они удовлетворяют тождеству

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Если известны параметры Р.–Г., то углы Эйлера определим из (7) по формулам

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}, \\ \cos\theta = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \end{gathered} \tag{8}$$

а ν_i – из равенств

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \tag{9}$$

Для записи уравнений (1) в параметрах Р.–Г. необходимо в эти уравнения подставить значения (9). Например, в главной подвижной системе координат уравнения Эйлера–Пуассона (1) принимают вид

$$\begin{aligned} A_1\dot\omega_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + s\left[e_2\big(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2\big) - 2e_3\big(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3\big)\right], \\ A_2\dot\omega_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + s\left[2e_3\big(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\big) - e_1\big(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2\big)\right], \\ A_3\dot\omega_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + 2s\left[e_1\big(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3\big) - e_2\big(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\big)\right], \end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= -\left(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3\right), \\
2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3, \\
2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \\
2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.
\end{aligned}
$$

Уравнения (10) с помощью формул [7]

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= 2\big(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3\big), \\
\omega_2 &= 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1\right), \\
\omega_3 &= 2\left(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2\right)
\end{aligned}
$$

можно привести к системе трех дифференциальных уравнений на параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [7, 9]. Интегралы (2) преобразуются очевидным образом с учетом (9).

2. Решение Бобылева–Стеклова. Это решение подробно исследовано в [1, 3]. Следуя [3], положим в уравнениях (1) $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$, $A = \mathrm{diag}\,(2A_2, A_2, A_3)$, а в интегралах (2) значения постоянных таковы:

$$
E = A_2\chi^2 - H, \qquad k = \frac{2A_2H\chi}{s},
$$

где χ, H – параметры. Тогда уравнения (1) допускают решение (поскольку формулы (3), (9) для параметров Р.–Г. записаны в другой системе координат по сравнению с рассматриваемым решением, то для новых переменных используем "$\sim$"):

$$
\begin{gathered}
\tilde{\omega}_1 = \chi, \qquad \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} = -\frac{1}{A_2}\sqrt{f\left(\tilde{\omega}_2\right)}, \qquad \tilde{\omega}_3 = 0, \\
\tilde{\nu}_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{A_2}{2}\tilde{\omega}_2^2 + H\right), \qquad \tilde{\nu}_2 = -\frac{A_2\chi}{s}\tilde{\omega}_2, \qquad \tilde{\nu}_3 = \frac{1}{s}\sqrt{f\left(\tilde{\omega}_2\right)},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где

$$
f\left(\tilde{\omega}_2\right) = -\frac{A_2^2}{4}\tilde{\omega}_2^4 - A_2\left(A_2\chi^2 + H\right)\tilde{\omega}_2^2 + s^2 - H^2. \tag{12}
$$

Из (11) следует, что подвижный годограф вектора угловой скорости – отрезок прямой.

Опуская знак "$\sim$", представим решение (11), (12) в эллиптических функциях, используя систему координат, в которой записаны соотношения (3)–(6), т. е. полагаем $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$. Тогда

$$
\nu_1 = -\chi\sqrt{\frac{2A_2}{s}\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{cn}\left(\alpha t\right), \tag{13}
$$

$$\nu_2 = \sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{dn}\,(\alpha t)\ \ \mathrm{sn}\,(\alpha t)\,, \tag{14}$$

$$\nu_3 = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\,\mathrm{sn}^2\,(\alpha t)\,, \tag{15}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2s}{A_2}(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)})}\,\mathrm{cn}\,(\alpha t)\,, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \chi,$$

где

$$\nu_1^{(1)} = \frac{H}{s}, \qquad \nu_1^{(2,\,3)} = \frac{1}{s}\left(-A_2\chi^2 \pm \sqrt{A_2^2\chi^4 + 2A_2H\chi^2 + s^2}\right),$$
$$\alpha = \sqrt{s\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)/(2A_2)}, \quad -s < H < s,$$

а переменная ν_3 изменяется в промежутке $\left[\nu_1^{(1)},\, \nu_1^{(2)}\right]$. Эллиптические функции в формулах (13)–(15) имеют модуль

$$k_1 = \sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)/\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)}.$$

Для нахождения значений параметров Р.–Г. в решении Бобылева–Стеклова воспользуемся соотношениями (6) и (13)–(15):

$$\cos\theta(t) = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\,\mathrm{sn}^2\big(\alpha t\big), \tag{16}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi(t) = \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} = -\frac{\chi\sqrt{2A_2}\,\mathrm{cn}\,(\alpha t)}{\sqrt{s(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)})}\,\mathrm{dn}\big(\alpha t\big)\ \mathrm{sn}\big(\alpha t\big)}, \tag{17}$$

$$\psi(t) = -\frac{s}{A_2}\int_0^t \frac{d\tau}{1 + \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{ctg}^2\varphi(\tau)}. \tag{18}$$

Зависимость параметров λ_i $\left(i = \overline{0,\ 3}\right)$ от времени найдем из соотношений (7) с учетом формул (16)–(18).

Из равенств (13) – (15) определяем ИС на параметры Р.–Г. для случая Бобылева–Стеклова:

$$\begin{gathered} 2s(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)^2 - A_2\chi^2\left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \nu_1^{(1)}\right) = 0, \\ 4(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)^2 + h(\lambda_i)\left(h(\lambda_i) - \nu_1^{(2)} + \nu_1^{(3)}\right) = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$h(\lambda_i) = \nu_1^{(2)} - \lambda_0^2 - \lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

Итак, ИС (19) являются многочленами по параметрам Р.–Г. четвертого порядка.

Формула (18) представляет интерес, поскольку из нее следует достаточно наглядное представление зависимости скорости прецессии от угла собственного вращения тела:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{s}{A_2\big[1 + \big(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\big)\operatorname{ctg}^2\varphi(\tau)\big]}\,.$$

ИС для компонент вектора угловой скорости в силу (11) имеет линейный характер.

3. Решение Лагранжа (изоконические движения сферического гироскопа). Рассмотрим тяжелое твердое тело, эллипсоид инерции которого является сферой: $A_3 = A_2 = A_1$. Выбором системы координат можно принять $e_1 = e_2 = 0$. Тогда из (1), (2) имеем

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{s}{A_1}\nu_2, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{s}{A_1}\nu_1, \quad \dot{\omega}_3 = 0, \tag{20}$$

$$\dot{\nu} = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \tag{21}$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 2(s\nu_3 + E)/A_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{22}$$

$$\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3\nu_3 = k/A_1. \tag{23}$$

Изучим изоконические движения сферического гироскопа [4, 6]. Для этих движений подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны относительно касательной плоскости к аксоидам. При этом необходимым и достаточным условием является ИС

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}, \tag{24}$$

где $\mathbf{c}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом. Положим $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ [6]. Тогда из (24) следует

$$\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3(\nu_3 - 1) = 0. \tag{25}$$

Уравнения (20), (21) и интегралы (22), (23) описывают движение гироскопа Лагранжа для случая сферического распределения масс. Из третьего уравнения системы (20) получим $\omega_3 = c^*$, где c^* – произвольная постоянная. Потребуем, чтобы (25) было следствием (23). Тогда для ω_3 имеем следующее значение

$$\omega_3 = k/A_1. \tag{26}$$

В [6] показано, что, если компоненты угловой скорости заданы в виде (3), то (25) выполняется при условии, когда в соотношениях (3) $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$. Сравнивая (3) и (26), получим

$$\dot{\varphi} = k/(A_1(1 + \cos\theta)). \tag{27}$$

Для нахождения уравнения на функцию $\theta(t)$ воспользуемся первым уравнением из (22) и соотношениями (3)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{a_2 \cos^2\, \theta + a_1 \cos\, \theta + a_0}{1 + \cos\, \theta}}, \tag{28}$$

где

$$a_2 = 2s/A_1, \quad a_1 = 2(s+E)/A_1, \qquad a_0 = 2(EA_1 - k^2)/A_1^2.$$

При преобразовании решения уравнения (28) к эллиптическим функциям запишем его в виде

$$\dot{\nu}_3 = -\sqrt{(1-\nu_3)(a_2\nu_3^2 + a_1\nu_3 + a_0)}. \tag{29}$$

Без ограничения общности считаем $s > 0$. Тогда переменная ν_3 изменяется в промежутке

$$\nu_3^{(1)} \le \nu_3 \le 1, \quad \nu_3^{(1)} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Из уравнения (29) в силу (27) получим

$$\nu_3 = 1 - \big(1 - \nu_3^{(1)}\big)\, \mathrm{sn}^2\, (gt), \tag{30}$$

где $\mathrm{sn}\, (gt)$ – эллиптическая функция с модулем k_2 и параметром g, имеющими следующие значения:

$$k_2 = \sqrt{\frac{1-\nu_3^{(1)}}{1-\nu_3^{(2)}}}, \quad \nu_3^{(2)} = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}, \quad g = \sqrt{\frac{s\big(1-\nu_3^{(2)}\big)}{2A_1}}. \tag{31}$$

Таким образом, на основании (30) и равенства $\nu_3 = \cos\, \theta$ можно записать

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\big(1-\nu_3^{(1)}\big)\, \mathrm{sn}^2(gt), \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\Big(2 - \big(1-\nu_3^{(1)}\big)\, \mathrm{sn}^2(gt)\Big). \tag{32}$$

Функцию $\varphi(t)$ определим из (27) в силу (30):

$$\varphi(t) = \frac{k}{A_1} \int_0^t \frac{dt}{2 - \big(1-\nu_3^{(1)}\big)\, \mathrm{sn}^2\, (gt)}\, . \tag{33}$$

В случае изоконических движений сферического гироскопа для параметров Р.–Г. из (7) получим

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = \cos\, \frac{\theta}{2} \cos\, \varphi, \quad \lambda_1 = \sin\, \frac{\theta}{2}, \\ &\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \cos\, \frac{\theta}{2} \sin\, \varphi, \end{aligned} \tag{34}$$

где функции $\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ находятся из (32), а функция $\varphi(t)$ – из (33), в которых необходимо учесть равенства (31). Таким образом, для рассматриваемых движений найдены зависимости параметров Р.–Г. от времени: соотношения (34) с учетом (32), (33). Из них следует, что одно ИС имеет линейный вид. Другое ИС для уравнений (10) тоже линейное, но оно линейно по отношению к компоненте ω_3. Следовательно, в случае сферического гиростата для этих уравнений имеем два линейных ИС по отношению к переменным задачи.

4. Решения, описывающие прецессионные движения тела. В динамике твердого тела особую роль играют решения, которые характеризуются прецессионными движениями тела. В [6] показано существование прецессий тела относительно оси, не совпадающей с вектором $\boldsymbol{\nu}$.

Пусть ось l_1 с единичным вектором $\boldsymbol{a}$ и с началом в неподвижной точке неизменна по отношению к телу и составляет постоянный угол θ_0 с осью l_2 , которая неподвижна в пространстве. Обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$ единичный вектор оси l_2. Для прецессий выполняются следующие кинематические уравнения [6]:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{35}$$

где

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 1, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_0 = \cos\chi_0. \tag{36}$$

Класс прецессий твердого тела, имеющего неподвижную точку, характеризуется инвариантными соотношениями [6]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\gamma} \quad (a_0 = \cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\gamma})). \tag{37}$$

Если неподвижную систему координат связать с вектором $\boldsymbol{a}$, т. е. третью ось ее направить по вектору $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, то имеют место соотношения

$$\gamma_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \gamma_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \gamma_3 = a_0. \tag{38}$$

где $a_0 = \cos\theta_0$, $a_0' = \sqrt{1 - a_0^2}$.

Они удовлетворяют кинематическому уравнению для вектора $\boldsymbol{\gamma}$ из (35) и соотношению $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ из (36). Для вектора $\boldsymbol{\nu}$ в [6] получено следующее разложение:

$$\boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0 b_0' \sin\psi)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\boldsymbol{a}\sin\psi - b_0'(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{a})\cos\psi, \tag{39}$$

где $b_0' = \sqrt{\dfrac{1 - c_0^2}{1 - a_0^2}}$. Когда вектор $\boldsymbol{\nu}$ имеет вид (39), а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ – (38), то кинематическое уравнение для $\boldsymbol{\nu}$ из (35) становится тождеством.

При рассмотрении прецессий относительно наклонной оси параметры Р.–Г. можно найти по аналогии с (3), (4), (7), т. е. в дальнейшем полагаем

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi - \varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi + \varphi}{2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где углы θ_0, ψ, φ – углы Эйлера, введенные с помощью неподвижной системы координат, которая связана с вектором $\boldsymbol{\gamma}$ (но не с вектором $\boldsymbol{\nu}$, как ранее).

Пример 1. ***Решение Д. Гриоли***. Пусть в уравнениях (1) $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$, компоненты тензора A удовлетворяют равенствам

$$A_{23} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} \neq 0, \quad A_{22} = A_{11}, \tag{41}$$

параметр s имеет значение

$$s = m^2 \sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}. \tag{42}$$

Тогда при выполнении (41), (42) уравнения (1) допускают решение Д. Гриоли [13], которое запишем в обозначениях [6]:

$$\omega_1 = m \sin mt, \quad \omega_2 = m \cos mt, \quad \omega_3 = m, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \cos \chi_0 \sin mt - \sin \chi_0 \cos^2 mt, \\ &\nu_2 = \cos \chi_0 \cos mt + \tfrac{1}{2} \sin \chi_0 \sin 2mt, \\ &\nu_3 = -\sin \chi_0 \sin mt \quad (\operatorname{tg} \chi_0 = A_{13}/A_{33}), \end{aligned} \tag{44}$$

характеризующееся регулярной прецессией тела относительно наклонной оси l_2 (угол между этой осью и вектором $\boldsymbol{\nu}$ приведен выше, а угол $\theta_0 = \pi/2$).

Указанное свойство можно доказать следующим образом. На основании решения (43), (44) получим, что вектор $\boldsymbol{\gamma}$ с компонентами в подвижном пространстве

$$\gamma_1 = \sin mt, \quad \gamma_2 = \cos mt, \quad \gamma_3 = 0 \tag{45}$$

не изменяет своего положения в неподвижном пространстве. В процессе движения выполняется инвариантное соотношение $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$, т. е. вектор $\mathbf{e}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\gamma}$ $(\theta_0 = \pi/2)$. Угловая скорость тела в силу соотношений (45) в векторном виде такова:

$$\boldsymbol{\omega} = m(\mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}). \tag{46}$$

Из формулы (46) следует, что в (37) $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = m$. Выберем неподвижную систему так, что $\varphi = \psi = mt$ (t – время). Подставив $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi = \psi = mt$ в соотношения (40), имеем

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos mt, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin mt. \tag{47}$$

Из (47) следует, что имеют место два линейных ИС на параметры Р.–Г. Для получения зависимостей компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ от параметров Р.–Г. подставим $\cos mt$, $\sin mt$ из (47) в (44):

$$\begin{gathered} \nu_1 = \sqrt{2}\big(\lambda_3 \cos \chi_0 - \sqrt{2}\lambda_0^2 \sin \chi_0\big), \quad \nu_2 = \sqrt{2}\lambda_0\big(\cos \chi_0 + \sqrt{2}\lambda_3 \sin \chi_0\big), \\ \nu_3 = -\sqrt{2}\,\lambda_3 \sin \chi_0, \end{gathered} \tag{48}$$

при этом компоненты ω_i из (43) выражаются через параметры Р.–Г. следующим образом:

$$\omega_1 = \sqrt{2} m \lambda_3, \quad \omega_2 = \sqrt{2} m \lambda_0, \quad \omega_3 = m. \tag{49}$$

Соотношения (48), (49) с учетом (47) являются решением уравнений (1) при условиях (41), (42).

Пример 2. ***Решение В. Гесса***. Как показал А. Брессан [14], в решении В. Гесса [15] при нулевом значении постоянной интеграла моментов из (2) имеет место прецессия относительно горизонтальной оси, т. е.

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$$

и в формуле (39) $\chi_0 = \pi/2$, $\theta_0 = \pi/2$. Для записи решения, описывающего данную прецессию, воспользуемся введенной выше системой координат $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$. Пусть компоненты тензора A_{ij} удовлетворяют условиям [6]

$$A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}).$$

Следуя обозначениям [6], имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\psi}\sin\varphi, \dot{\psi}\cos\varphi, \dot{\varphi}\right), \tag{50}$$

$$A\boldsymbol{\omega} = \left(A_{11}\dot{\psi}\sin\varphi + A_{13}\dot{\varphi},\ A_{22}\dot{\psi}\cos\varphi, A_{13}\dot{\psi}\sin\varphi + A_{33}\dot{\varphi}\right), \tag{51}$$

$$\boldsymbol{\nu} = (-\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, -\sin\psi), \tag{52}$$

где

$$\dot{\varphi} = -\frac{A_{13}}{A_{33}}\dot{\psi}\sin\varphi, \quad \dot{\psi} = \sqrt{\frac{2}{A_{22}}(E - s\sin\psi)}. \tag{53}$$

Выпишем решение уравнений (53). Из первого уравнения данной системы имеем [6]

$$\sin\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad u = \frac{A_{13}}{A_{33}}\psi + c, \tag{54}$$

где c – произвольная постоянная. Формулами (50)–(52) определены все переменные задачи (1). Для нахождения зависимости $\psi(t)$ от времени из второго уравнения системы (53), положив

$$\mu = \sqrt{\frac{E+s}{2A_{22}}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2s}{E+s}}, \quad \psi = 2\alpha - \frac{\pi}{2}, \tag{55}$$

получим

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k_3^2\sin^2\alpha}} = \mu t.$$

Тогда с учетом (55) имеем

$$\psi = 2\,\mathrm{am}\,\mu t - \frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sn}\,\mu t - \mathrm{cn}\,\mu t),\ \cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sn}\,\mu t + \mathrm{cn}\,\mu t), \quad (56)$$

где $\mathrm{am}\,\mu t$, $\mathrm{sn}\,\mu t$, $\mathrm{cn}\,\mu t$ – эллиптические функции с модулем k_3 из (55). Параметры Р.–Г. имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (57)$$

где функции $\psi(t), \varphi(t)$ выражаются по формулам (54), (56). Представляет интерес вид ИС для прецессий Брессана–Гесса. Используя (8), (57) и (54), (56), найдем

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}, \quad (58)$$

$$\frac{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2} = \mathrm{sh}\left[\frac{A_{13}}{A_{33}}\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3} + c\right]. \quad (59)$$

Таким образом, в случае прецессии относительно горизонтальной оси гироскопа Гесса для параметров Р.–Г. имеют место два квадратичных ИС (58) и одно ИС трансцендентного вида (59).

Выводы. Исследованы свойства параметров Р.–Г. в решениях уравнений Эйлера–Пуассона в случаях Бобылева–Стеклова, Лагранжа, Гриоли и Гесса. Полученные результаты могут быть применены в истолковании движения тела.

1. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
2. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 6. – С. 15–24.
3. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
4. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Ин-т математики НАНУ, 1994. – 176 с.
8. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига–Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 3. – С. 11–20.
9. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.

10. *Данилюк Д.А.* Движения гироскопа Гесса в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 39–45.
11. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
12. *Козлов В.В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теор. и прикл. механика. – Белград: Югославское об-во механики. – 1982. – № 8. – С. 59–65.
13. *Grioli G.* Esistenza e determinazione della precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. – 1947. – **XXVI**, Ser. IV. – P. 271–281.
14. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. – 1957. – **27**. – P. 276–283.
15. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue particulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Annalen. – 1890. – **37**, № 2. – P. 153–181.

D.A. Daniljuk, A.M. Kovalev

Properties of the Rodrigues–Hamilton parameters of partial solutions of equations of a heavy rigid body dynamics

The paper studies the time dependence of Rodrigues–Hamilton parameters in Bobylev–Steklov, Lagrange, Grioli and Hess solutions to differential equations of motion of a rigid body with a fixed point. Types of invariant relations obtained in these solutions.

Keywords: *Rodrigues–Hamilton parameters, solutions of the Euler–Poisson equations, invariant relations.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 01.08.16
daniljuk@bk.ru