

УДК 531.38

©2015. Н.Н. Щепин

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ С ДВУМЯ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ

Рассмотрена замкнутая система с двумя самопересечениями n гироскопов Лагранжа, связанных упругими цилиндрическими шарнирами, в предположении отсутствия внешних сил и моментов. Для системы, описывающей данную конфигурацию, состоящей в простейшем случае из пяти тел, найдены положения равновесия и определены значения геометрических параметров, при которых эти положения устойчивы. Данная система может служить конечномерной моделью упругого стержня, ось которого расположена в одной плоскости во все время движения.

Ключевые слова: *система твердых тел, устойчивость положения равновесия, достаточные условия устойчивости.*

Введение. В последнее время появилось значительное количество публикаций, посвященных исследованию упругих стержней с замкнутой осью. Это объясняется успешным приложением теории стержней к моделированию биологических объектов. Одним из направлений исследований в данной области является поиск равновесных состояний упругого стержня. Первые плоские равновесные конфигурации были найдены в работах [1–4]. Упругая ось стержня в полученных решениях представляла собой окружность или “восьмерку”. Е.Л. Старостиным было найдено еще одно равновесное состояние [5], которому соответствовала конфигурация с несколькими самопересечениями упругой оси в одной точке. Найденное решение было названо решением типа “розы”. Позднее был проведен численный анализ этого решения [6].

В работах [7,8] была предложена конечномерная модель замкнутого упругого стержня, представляющая собой систему n твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Упругий момент в шарнире вводился таким образом, что при $n \rightarrow \infty$ он совпадал с моментом, вводимым в классической теории упругих стержней. Предложенный подход в конечномерной модели позволяет описывать большие прогибы и учитывать геометрическую нелинейность изучаемых объектов. Конечномерный подход дал возможность получить известные решения непрерывной модели в явном виде. Так, в [7, 8] получено решение, описывающее в конечномерном случае окружность и “восьмерку”, а в [9, 10] определены условия существования конечномерной конфигурации и для решения типа “розы”. В работе [11] получено новое решение конечномерной модели, у которой оси симметрии тел пересекаются в двух различных точках.

Представляет интерес изучение поведения систем в окрестности полученных решений, а именно, установление и изучение условий устойчивости найденных положений равновесия. В работе [12] исследованы достаточные условия устойчивости формы конечномерной модели оси стержня для конфигурации типа “восьмерки”.

В настоящей работе получены достаточные условия устойчивости формы оси для системы с двумя самопересечениями в плоском случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим замкнутую систему n гироскопов Лагранжа S_j , связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Полагаем, что шарниры расположены в точках O_{j+1} пересечения осей симметрии тел S_j и S_{j+1} , оси симметрии $O_j O_{j+1} = h_j$ тел S_j лежат в одной плоскости OXZ , а оси шарниров перпендикулярны ей. Как установлено в [13], упругий момент в шарнире равен

$$L_j = c^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где c^2 – изгибная жесткость, ψ_j – угол поворота тела S_j вокруг оси $(j-1)$ -го шарнира, угол ψ_0 в случае замкнутых систем ($O_1 = O_{n+1}$), как и в [7, 8], считаем равным ψ_n , т. е. $\psi_0 = \psi_n$.

Введенная конечномерная система позволяет моделировать колебание упругого стержня, ось которого расположена в одной плоскости во все время движения.

Как и в [7, 8], полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, тогда из (1) следует, что потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = -c^2 \sum_{j=1}^n \cos(\psi_j - \psi_{j-1}). \quad (2)$$

Для замкнутых систем выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^n h_j \mathbf{e}_j^x = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{e}_j^x – единичный орт оси $O_j O_{j+1}$, составляющий угол ψ_j с осью OX . Тогда $\mathbf{e}_j^x = \cos \psi_j \mathbf{e}^x + \sin \psi_j \mathbf{e}^z$ (здесь $\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^z$ – соответственно орты осей OX и OZ) и из (3) получаем два скалярных соотношения, которым должны удовлетворять углы ψ_j :

$$f_1 = \sum_{j=1}^n h_j \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n h_j \sin \psi_j = 0. \quad (4)$$

Для систем с дополнительными связями, наложенными на переменные, положения равновесия находятся из условия [14, 15]

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \quad (5)$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа. Подставляя (2), (4) в (5), получаем систему уравнений

$$c^2 (\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})) = h_j (\lambda_2 \cos \psi_j - \lambda_1 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_1, \quad \psi_0 = \psi_n,$$

которая вместе с (4) позволяет определить как неизвестные углы ψ_j , так и множители Лагранжа λ_1, λ_2 . Множители Лагранжа λ_1, λ_2 при этом играют роль реакций связей в шарнирных сочленениях [8].

Для конечномерной системы, описывающей конфигурацию оси с двумя самопересечениями, явный вид решения был получен в [11]. Далее будем называть эту систему “двойной восьмеркой”.

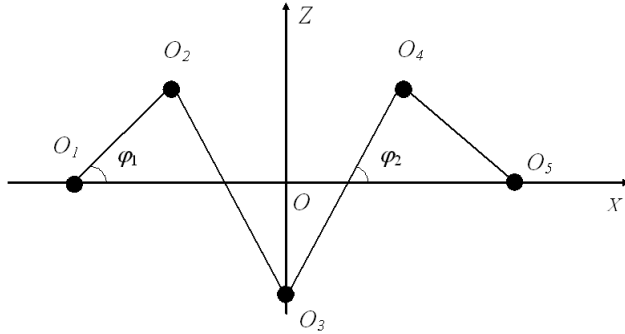


Рис. 1. “Двойная восьмерка”.

2. Стационарное решение “двойная восьмерка”. В простейшем случае конфигурация оси с двумя самопересечениями может быть представлена системой пяти тел (рис. 1). Полагаем, что фигура симметрична относительно оси OZ . Обозначим через ψ_k^0 ($k = \overline{1, 5}$) стационарное решение системы уравнений (6), найденное с учетом (4):

$$\psi_1^0 = -\psi_4^0 = \varphi_1; \quad \psi_2^0 = -\psi_3^0 = -\varphi_2; \quad \psi_5^0 = \pi \quad (7)$$

при условии, что

$$O_1O_2 = O_4O_5 = h_1; \quad O_2O_3 = O_3O_4 = h_2; \quad O_1O_5 = h_3. \quad (8)$$

Полагаем, что φ_1 и φ_2 – острые углы. Из условий замкнутости (4) получим, что введенные углы φ_1, φ_2 должны удовлетворять уравнению

$$\cos \varphi_2 = a_2 - a_1 \cos \varphi_1, \quad (9)$$

здесь $a_1 = h_1/h_2$; $a_2 = h_3/(2h_2)$. Учитывая, что φ_2 – острый угол, из (9) получаем

$$\frac{a_2 - 1}{a_1} < \cos \varphi_1 < \frac{a_2}{a_1}. \quad (10)$$

Так как φ_1 также острый угол, то $0 < \cos \varphi_1 < 1$ и с учетом (10) окончательно имеем

$$\max \left(\frac{a_2 - 1}{a_1}, 0 \right) < \cos \varphi_1 < \min \left(\frac{a_2}{a_1}, 1 \right). \quad (11)$$

Отметим, что переменные φ_i , a_i ($i = 1, 2$) должны удовлетворять еще двум условиям, следующим из геометрии заданной конфигурации (рис. 1):

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} < \frac{1}{a_1}, \quad (12)$$

$$0 < a_2 < a_1 + 1. \quad (13)$$

Определим значения сил реакций λ_1, λ_2 и углов φ_1 и φ_2 , которые удовлетворяют уравнениям равновесия (6) изучаемой системы. Подставляя (7), (8) в (6), получаем $\lambda_2 = 0$ и

$$\lambda_1 = \frac{\sin 2\varphi_2 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_2 \sin \varphi_2} c^2, \quad (14)$$

$$\frac{\sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin 2\varphi_2 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = -a_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \quad (15)$$

Введем дополнительный параметр p

$$\sin \varphi_2 = p \sin \varphi_1. \quad (16)$$

Из (12), (16) следует, что

$$p > a_1 > 0. \quad (17)$$

Подставляя (16) и (9) в (15) и учитывая, что $\sin \varphi_1 \neq 0$, получаем

$$\cos \varphi_1 = \frac{p(1 - a_2) + a_1 a_2 (2p + 1)}{(p - a_1)^2 + 2pa_1^2}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в (11) с учетом (13), (17) позволяет выделить области изменения параметров a_1, a_2, p , в которых возможно выполнение неравенства (11) [11]. Из (9), (16) следует

$$\cos^2 \varphi_1 (a_1^2 - p^2) - 2a_1 a_2 \cos \varphi_1 + a_2^2 + p^2 - 1 = 0. \quad (19)$$

Исключая $\cos \varphi_1$ из (19) с помощью (18), получаем уравнение для определения параметра $a_2 = a_2(p, a_1)$. Для удобства дальнейших исследований введем дополнительный параметр $x = a_1/p$. Тогда уравнение для определения a_2 принимает вид

$$F_2(p, x)a_2^2 + F_1(p, x)a_2 + F_0(p, x) = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} F_2(p, x) &= 4px(1 - (p + 1)x); \quad F_1(p, x) = 2(x^2 - 2(p + 1)x + 1); \\ F_0(p, x) &= (p^2 - 1)(1 + 2p)^2 x^4 - 4(p^2 - 1)(1 + 2p)x^3 + \\ &+ (4p^3 + 6p^2 - 4p - 5)x^2 - 4(p^2 - 1)x + (p^2 - 2). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение уравнения (20) ищется на интервале (13)

$$0 < a_2 < xp + 1 \quad (22)$$

при условиях, которые следуют из неравенств (17)

$$p > 0, \quad 0 < x < 1. \quad (23)$$

Дискриминант уравнения (20) имеет вид

$$D = 4(2x^2p + (x - 1)^2)^2 D_2, \quad (24)$$

где $D_2 = 4p(p - 1)(p + 1)^2 x^2 - 4p(p^2 - 1)x + 1$.

Следовательно, корни уравнения (20) существуют в областях: $\{0 < p \leq 1.618; 0 < x < 1\}$ и $\{p > 1.618; x \in (0; p_1] \cup [p_2, 1)\}$, где 1.618 – корень уравнения $p^2 - p - 1 = 0$, $p_{1,2} = (p^2 - p \mp \sqrt{p(p^3 - 2p^2 + 1)}) / (2p(p^2 - 1))$.

Анализ знаков коэффициентов $F_2(p, x)$ и $F_1(p, x)$ в полуполосе (23) изменения параметров показывает, что дальнейшее исследование целесообразно проводить в трех подобластях, лежащих между кривыми $l_1 = p + 1 - \sqrt{p(p + 2)}$ и $l_2 = 1 / (p + 1)$ (см. рис. 2). При этом, в первой и третьей подобласти может лежать только больший корень уравнения (20), а во второй – оба его корня.

Для нахождения областей существования решения уравнения (20) в указанных трех подобластях оказалось целесообразным использование правила знаков Декарта.

В первой из подобластей (см. рис. 2) область существования решения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} F_0(p, x) < 0, \\ (3p + 1)x < p. \end{cases}$$

Решение системы неравенств определяется следующим образом: $\{0 < p \leq 1.087; 0 < x < p / (3p + 1)\} \cup \{1.087 < p \leq \sqrt{2}; 0 < x \leq p + 1 - \sqrt{p(p + 2)}\} \cup \{\sqrt{2} < p \leq 1.619; x_1 < x \leq p + 1 - \sqrt{p(p + 2)}\}$, где x_1 – единственный корень полинома $F_0(p, x)$ на интервале $x \in (0; p + 1 - \sqrt{p(p + 2)})$; 1.087 – корень полинома $6p^3 - 2p^2 - 4p - 1$; 1.619 – корень уравнения $F_0(p, p + 1 - \sqrt{p(p + 2)}) = 0$.

Область существования во второй подобласти определяется объединением решений трех систем неравенств

$$\begin{cases} F_0(p, x) > 0, \\ 2F_2(xp + 1) + F_1 > 0, \\ D_2 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} F_0(p, x) > 0, \\ 2F_2(xp + 1) + F_1 < 0, \\ (3p + 1)x > p, \\ D_2 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2F_2(xp + 1) + F_1 > 0, \\ (3p + 1)x < p, \\ D_2 > 0. \end{cases}$$

Решение в данном случае имеет следующий вид: $\{1.087 < p < 1.481; x \in (p + 1 - \sqrt{p(p+2)}; p/(3p+1))\} \cup \{1.481 \leq p < 1.601; x \in (p + 1 - \sqrt{p(p+2)}; p/(3p+1)) \cup (x_2; 1/(p+1))\} \cup \{1.601 \leq p < 1.619; x \in (p + 1 - \sqrt{p(p+2)}; 1/(p+1))\} \cup \{1.619 \leq p < 1.917; x \in (x_3; 1/(p+1))\} \cup \{1.917 \leq p < 1 + \sqrt{2}; x \in (p/(3p+1); 1/(p+1))\}$. Здесь x_2 – единственный корень полинома $F_0(p, x)$ на интервале $x \in (p + 1 - \sqrt{p(p+2)}, 1/(p+1))$; x_3 – корень полинома $D_2(p, x)$ на том же интервале изменения x ; 1.481 – корень полинома $p^3 + p^2 - 3p - 1$; 1.601 – корень полинома $2p^6 + 2p^5 + 6p^4 - 10p^3 - 16p^2 - 7p - 1$; 1.917 – корень полинома $2p^3 - 2p^2 - 3p - 1$.

В третьей из указанных на рис. 2 подобластей область существования определяется системой неравенств

$$\begin{cases} F_0(p, x) > 0, \\ (3p + 1)x > p. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид: $\{1 < p \leq 1.481; x_4 < x < 1\} \cup \{1.481 < p \leq 1 + \sqrt{2}; 1/(p+1) \leq x < 1\} \cup \{p > 1 + \sqrt{2}; p/(3p+1) < x < 1\}$. Здесь x_4 – единственный корень полинома $F_0(p, x)$ на интервале $x \in (1/(p+1), 1)$.

Численные исследования позволили построить область существования решений уравнения (20). Она представлена на рис. 2 для $p < 3$.

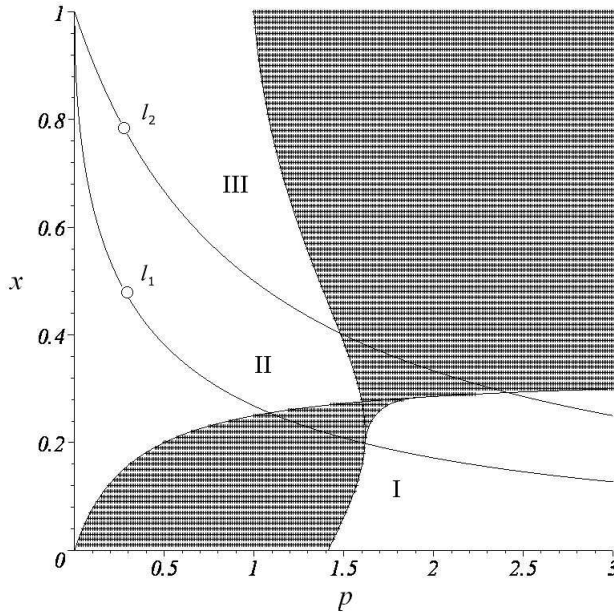


Рис. 2. Область существования решения.

3. Исследование устойчивости положения равновесия “двойной восьмерки”. Известно, что устойчивость положения изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями

следует из минимума потенциальной энергии системы. Однако, если эти связи нелинейны, можно, как и в [14, 15], воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа и находить минимум функции $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, в которой множители λ_1, λ_2 найдены из условий стационарности функции L .

В случае “двойной восьмерки”, как было отмечено выше, имеем $\lambda_2 = 0$ и условия устойчивости положения равновесия будут выполнены в области [16]

$$\delta^2 L = \delta^2 \Pi + \lambda_1 \delta^2 f_1 > 0, \quad \delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0. \quad (25)$$

Полагая в возмущенном движении $\psi_j = \psi_j^0 + \xi_j$, из (4) получаем

$$\sum_{j=1}^n h_j \xi_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{j=1}^n h_j \xi_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (26)$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по переменной ξ_j .

Введем новые переменные $X_j = \xi_j - \xi_{j-1}$. Тогда, учитывая (4) и полагая $\xi_0 = \xi_n$, имеем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^j X_i + \xi_n, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0. \quad (27)$$

Из (26), (27) получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (28)$$

Подстановка (27), (28) в (25) дает возможность представить функцию $\delta^2 L$ в виде

$$2\delta^2 L = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\cos(\psi_k^0 - \psi_{k-1}^0) X_k^2 - h_k \mu \cos \psi_k^0 \left(\sum_{j=1}^k X_j \right)^2 \right] + \cos(\psi_n^0 - \psi_{n-1}^0) \left(\sum_{k=1}^{n-1} X_k \right)^2, \quad (29)$$

где $\mu = \lambda_1 / c^2$.

Для нахождения области выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия системы необходимо определить область положительной определенности квадратичной формы (29), из которой исключены две переменные согласно (28).

Рассмотрим устойчивость решения (7). Подстановка (7) в (28) с учетом (4) позволяет определить X_1 и X_2 следующим образом:

$$X_1 = -\frac{((2px^2 + 2(x-1)^2)a_2 + x(x-1))X_3 + (2x(x-1)a_2 + 2x^2)X_4}{2xa_2(2px^2 + (x-1)^2)}, \quad (30)$$

$$X_2 = \frac{(1-x)}{x}X_3 - X_4.$$

Из (29) и (30) получаем квадратичную форму $\delta^2 L$, зависящую от переменных X_3, X_4 . Записывая критерий Сильвестра для этой квадратичной формы, получим следующие условия ее положительной определенности:

$$G_1 > 0, \quad G_2 G_3 > 0, \quad (31)$$

где $G_1 = g_{14}a_2^4 + g_{13}a_2^3 + g_{12}a_2^2 + g_{11}a_2 + g_{10}$, $G_2 = g_{22}a_2^2 + g_{21}a_2 + g_{20}$,

$$G_3 = g_{34}a_2^4 + g_{33}a_2^3 + g_{32}a_2^2 + g_{31}a_2 + g_{30},$$

а $g_{14} = 8xp(x^3(2x^2 - 4x + 3)p^2 + x(3x^2 - 4x + 2)(x-1)^2p + (x-1)^5)$,

$$g_{13} = -4xp(4p^2x^4 - 4x^3(x-1)^2p - (2x^2 - x - 2)(x-1)^3),$$

$$g_{12} = -2(2x^2p + (x-1)^2)(4x^4(x-1)^2p^4 + 4x^2(2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)p^3 + (x^2 + 1)(5x^2 - 4x + 1)(x-1)^2p^2 + x^2(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x + 2)p - x(x-1)^3),$$

$$g_{11} = -2x(x-1)^3, \quad g_{10} = -x^2(x-1)^2;$$

$$g_{22} = -2px(2x(x^2 - 2x + 2)p + (3x - 2)(x-1)^2),$$

$$g_{21} = 4px(2px^2 - (2x + 1)(x-1)^2),$$

$$g_{20} = 4x^4(x-1)^2p^4 + 4x^2(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)p^3 + (9x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)(x-1)^2p^2 + 2x^2(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 3)p - x^2(x-1)^2;$$

$$g_{34} = -2px((1 + 2p)x - 1)((1 + 2p)x^2 - 3x + 2), \quad g_{33} = 4px(x-1),$$

$$g_{32} = (2px^2 + (x-1)^2)(4x^4p^4 + 4x^2(x-1)^2p^3 + (x-1)^4p^2 - 2px^2 - x(x-2)),$$

$$g_{31} = 2x(x-1), \quad g_{30} = x^2.$$

Анализ неравенств (31), с учетом полученной ранее области существования решения, показал, что при достаточно больших значениях p неравенства

$G_1 > 0$ и $G_2 < 0$ выполняются при $x \in (p/(3p+1), 1)$. А в области, лежащей между кривыми $x = p/(3p+1)$ и $p = (5x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 4)/(2x^2(1-x^2))$, выполняется неравенство $G_3 < 0$. Сравнение полученных результатов дает возможность заключить, что при достаточно больших значениях p область выполнения достаточных условий устойчивости является не пустой.

Численные исследования позволили построить графически область выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия “двойной восьмерки” с учетом области существования решения. Она представлена на рис. 3 для $p < 5$.

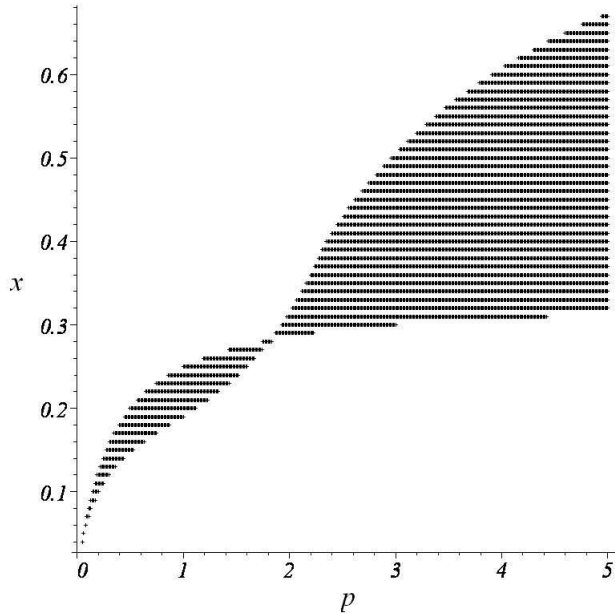


Рис. 3. Область выполнения достаточных условий устойчивости.

Таким образом, для системы пяти тел с двумя самопересечениями найдены области существования положения равновесия “двойной восьмерки” (см. рис. 2) и определены значения геометрических параметров, при которых эти положения устойчивы.

1. Wadati M., Tsuru H. Elastic model of looped DNA // *Physica*. – 1986. – 21D. – P. 213–226.
2. Бенжэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
3. Starostin E.I. Three-dimensional shapes of looped DNA // *Meccanica* **31**. – 1996. – **3**. – P. 235–271.
4. Кугушев Е.И., Пирогова Е.Е., Старостин Е.И. Математическая модель образования трехмерной структуры ДНК. – 1997. – 24 с. – (Препринт РАН ИПМ им. М.В. Келдыша, № 77).

5. *Starostin E.I.* Equilibrion configurations of a thin elastic rod with self contacts // Proc. Appl. Math. Mech. – 2002. – 1. – P. 137–138.
6. *Starostin E.I.* Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // Phil. Teans. K. Soc. Lon., A., – 2004. – 362. – P. 1317–1334.
7. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
8. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Замкнутые системы связанных твердых тел // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
9. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия замкнутых систем с самопересечениями // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
10. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Равновесные конфигурации замкнутой системы твердых тел // Междунар. конф. “Классические задачи динамики твердого тела” (9–13 июня 2007, Донецк, Украина): Тез. докл. – Донецк, 2007. – С. 12–13.
11. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия упругих систем с двумя самопересечениями // Тр. ИПММ НАНУ. – 2008. – 16. – С. 26–33.
12. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Достаточные условия устойчивости положения равновесия замкнутой системы тел // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 151–160.
13. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* О новом решении уравнений равновесия системы тел с упругой связью // Прикл. математика и механика. – 2014. – 78, вып. 25. – С. 671–680.
14. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
15. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.
16. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1976. – 534 с.

N.N. Shchepin

Stability of equilibrium of a closed system of rigid bodies with two self-intersections

The closed system with two self-intersections of the n Lagrange gyroscopes connected with elastic cylindrical joints, is considered in this paper in supposition of the lack of exterior forces and moments. Equilibrium positions and values of geometrical parametres for their stability are defined for the system of five gyroscopes. Such system can serve as a finite-dimensional model of the elastic rod with plane axis.

Keywords: *system of rigid bodies, stability of equilibrium position, sufficient conditions of stability.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
shchepin_nick@mail.ru

Получено 10.06.15