УДК 531.38

©2015. **А.В. Зыза**

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ С ЛИНЕЙНЫМ ИНВАРИАНТНЫМ СООТНОШЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА

Получено новое решение уравнений Кирхгофа–Пуассона в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое характеризуется одним линейным инвариантным соотношением по переменным задачи.

Ключевые слова: *полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа–Пуассона, гиростат, инвариантное соотношение.*

Введение. В монографиях [1–4] приведены результаты по построению частных решений уравнений динамики твердого тела. Актуальность исследования таких решений связана не только с возможностью на основании уравнений П.В. Харламова [1] установить свойства движения тела, но исследовать с помощью первого метода Ляпунова поведение интегральных кривых в окрестности частных решений [2].

В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева [1] занимают особое место в динамике твердого тела, поскольку они имеют обобщения не только в задаче о движении тяжелого гиростата [1], но и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [5].

В статьях [6, 7] построены решения уравнений Кирхгофа–Пуассона, которые характеризуются инвариантными соотношениями класса Стеклова–Ковалевского–Горячева и его обобщениями.

Данная статья посвящена дальнейшему изучению решений уравнений Кирхгофа–Пуассона, которые отвечают указанным обобщениям. Найдено решение, характеризующееся линейным инвариантным соотношением по всем переменным задачи.

1. Постановка задачи. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при ньютоновском притяжении масс и взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку параллельно вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Уравнения движения такого гиростата относятся к уравнениям класса Кирхгофа [2, 8] и в векторной форме таковы

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$\begin{gathered} A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad 2(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2k, \\ \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E и k – постоянные интегралов.

Запишем уравнения движения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$, $B = \mathrm{diag}\,(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}\,(C_1, C_2, C_3)$:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + B_3\omega_2\nu_3 - B_2\omega_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 + \\ &\quad + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + \nu_3 s_2 - \nu_2 s_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + B_1\omega_3\nu_1 - B_3\omega_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 + \\ &\quad + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 + \nu_1 s_3 - \nu_3 s_1, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + B_2\omega_1\nu_2 - B_1\omega_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \\ &\quad + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + \nu_2 s_1 - \nu_1 s_2; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3) + \\ + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E, \\ 2(A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + 2(A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + 2(A_3\omega_3 + \lambda_3)\nu_3 - \\ - B_1\nu_1^2 - B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 = 2k, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Следуя [7], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) при $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ решений вида

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} b_i\sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} c_j\sigma^j, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^{l} a_i\sigma^i, \quad \nu_2 = \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2, \quad \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, \\ \psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{n_1} g_j\sigma^j, \quad \varkappa(\sigma) = \sum_{i=0}^{m_1} f_i\sigma^i, \end{gathered} \tag{6}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа; коэффициенты b_i, c_j, a_i, g_j, f_i – параметры, подлежащие определению. Указанный класс решений является обобщением класса полиномиальных решений Стеклова–Ковалевского–Горячева [1].

Подставим выражения (6) в уравнения (4), (3) и и геометрический интеграл из (5):

$$\Phi(\sigma) = (\psi(\sigma) - \varkappa(\sigma))(\varphi'(\sigma))^{-1}, \tag{7}$$

$$\dot{\sigma} = \Phi(\sigma)\sigma^{-1}(Q(\sigma)R(\sigma))^{1/2}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}(Q(\sigma)\psi^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma) = 2\psi(\sigma)(\sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma)),\\ (R(\sigma)\varkappa^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma) = 2\varkappa(\sigma)(\varphi(\sigma) - \sigma\psi(\sigma)),\end{gathered} \tag{9}$$

$$2A_1\sigma^2\Phi(\sigma) = (C_3 - C_2)\psi(\sigma)\varkappa(\sigma) + (B_3\varkappa(\sigma) - B_2\psi(\sigma))\sigma + (A_2 - A_3)\sigma^2, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}A_2Q'(\sigma)\Phi(\sigma) = 2[(C_1 - C_3)\varphi(\sigma)\varkappa(\sigma) + (B_1\varphi(\sigma) - B_3\varkappa(\sigma)\sigma +\\ + (A_3 - A_1)\sigma^2 - \lambda_1)\sigma - s_1\varkappa(\sigma)],\\ A_3R'(\sigma)\Phi(\sigma) = 2[(C_2 - C_1)\varphi(\sigma)\psi(\sigma) - (B_1\varphi(\sigma) - B_2\psi(\sigma)\sigma +\\ + (A_2 - A_1)\sigma^2 - \lambda_1)\sigma + s_1\psi(\sigma)],\end{gathered} \tag{11}$$

$$(\varphi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + Q(\sigma)\psi^2(\sigma) + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \tag{12}$$

В уравнениях (7), (9), (11) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной σ. Если функции $Q(\sigma), R(\sigma), \varphi(\sigma), \varkappa(\sigma)$ определены, то зависимость σ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (8).

2. Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда в (6) $n = 2$, $m = 4, l = n_1 = 2, m_1 = 1$. Тогда

$$\begin{gathered}\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0,\\ \omega_3^2 = R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,\\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2, \quad \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3,\\ \psi(\sigma) = g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \quad \varkappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0.\end{gathered} \tag{13}$$

Подставим полиномы $\varphi(\sigma), \psi(\sigma), \varkappa(\sigma)$ из (13) в динамическое уравнение (10). Полученное соотношение при $a_1 \neq 0$ может быть тождеством по σ, например, при выполнении условий

$$g_0 = 0, \quad f_0(\alpha g_1 + B_3) = 0 \quad (\alpha = C_3 - C_2). \tag{14}$$

С учетом (14) уравнение (10) упрощается:

$$\begin{gathered}\Phi(\sigma) = (\Omega_1\sigma + \Omega_0)(2A_1)^{-1},\\ \Omega_1 = g_2(\alpha f_1 - B_2), \quad \Omega_0 = \alpha g_2 f_0 + (\alpha g_1 + B_3)f_1 - B_2 g_1 + A_2 - A_3.\end{gathered} \tag{15}$$

Соотношение (15) позволяет упростить уравнения исследуемой системы (9), (11). Исключим функцию $\Phi(\sigma)$ из уравнений (9), (11). Затем подставим в упрощенные уравнения и уравнения (7), (12), (15) выражения компонент векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ из (13). Требования того, чтобы полученные равенства при условиях (14) были тождествами по σ, приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (13):

$$
\begin{gathered}
A_1 g_2 - a_2 \Omega_1 = 0, \quad 2A_1(g_1 - f_1) - 2a_2\Omega_0 - a_1\Omega_1 = 0,\\
2A_1 f_0 + a_1\Omega_0 = 0, \quad b_2 g_2 \Omega_1 + A_1(a_2 - f_1) = 0,\\
4b_2 g_2 \Omega_0 + (3b_1 g_2 + 2b_2 g_1)\Omega_1 + 4A_1(a_1 - f_0) = 0,\\
(3b_1 g_2 + 2b_2 g_1)\Omega_0 + (b_1 g_1 + 2b_0 g_2)\Omega_1 + 4A_1 a_0 = 0,\\
(b_1 g_1 + 2b_0 g_2)\Omega_0 = 0, \quad c_4 f_1 \Omega_1 + A_1 g_2 = 0,\\
4c_4 f_1 \Omega_0 + (3c_3 f_1 + 2c_4 f_0)\Omega_1 + 4A_1(g_1 - a_2) = 0,\\
(3c_3 f_1 + 2c_4 f_0)\Omega_0 + (2c_2 f_1 + c_3 f_0)\Omega_1 - 4A_1 a_1 = 0,\\
(2c_2 f_1 + c_3 f_0)\Omega_0 - 4A_1 a_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0,\\
(\beta f_1 + B_1)a_2 - B_3 f_1 + A_3 - A_1 = 0, \; A_2 b_1 \Omega_0 + 4A_1 f_0(s_1 - \beta a_0) = 0,\\
A_2 b_2 \Omega_1 - 2A_1(\beta(a_2 f_0 + a_1 f_1) + B_1 a_1 - B_3 f_0) = 0,\\
A_2(2b_2\Omega_0 + b_1\Omega_1) - 4A_1(\beta(a_1 f_0 + a_0 f_1) + B_1 a_0 - \lambda_1 - s_1 f_1) = 0,\\
A_3 c_4 \Omega_1 + A_1 g_2((\alpha+\beta)a_2 - B_2) = 0, \quad a_0^2 - 1 + c_2 f_0^2 + b_0 g_1^2 = 0,\\
A_3(4c_4\Omega_0 + 3c_3\Omega_1) + 4A_1\big[(\alpha+\beta)(a_2 g_1 + a_1 g_2) -\\
- B_2 g_1 + B_1 a_2 + A_2 - A_1\big] = 0,\\
A_3(3c_3\Omega_0 + 2c_2\Omega_1) + 4A_1((\alpha+\beta)(a_1 g_1 + a_0 g_2) + B_1 a_1 - s_1 g_2) = 0,\\
A_3 c_2 \Omega_0 + 2A_1((\alpha+\beta)a_0 g_1 + B_1 a_0 - s_1 g_1 - \lambda_1) = 0.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Здесь $\beta = C_1 - C_3$.

Система уравнений (14), (16) совместна относительно параметров A_1, A_2, a_2. Запишем решение этой системы так:

$$
\begin{gathered}
A_3 = \frac{\delta_1 A_2(\delta A_1(4(2\delta+1)A_1 + 9A_2) + 2(A_1 + 2A_2)A_2)}{2\delta\delta_2\delta_3^2},\\
B_1 = \frac{1}{2\delta\delta_2\delta_3 a_2}(2(2A_1 - A_2)A_1^2\delta^3 + (14A_1 - 5A_2)A_1A_2\delta^2 +\\
+ A_2(4A_1^2 + 11A_1A_2 - 2A_2^2)\delta + 2(A_1 + 2A_2)A_2^2),\\
B_2 = \frac{A_2(3A_1^2\delta^2 + \delta_3(A_1 + 2A_2))}{\delta\delta_2\delta_3 a_2}, \quad B_3 = \frac{\delta_4\delta_6}{2\delta\delta_1\delta_2\delta_3 a_2},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha=-\frac{\delta_6}{\delta\delta_1\delta_2a_2^2},\quad \beta=\frac{1}{2\delta\delta_1\delta_2a_2^2}((4A_3-A_2)A_1^2\delta^3+\\
+2(7A_1-A_2)A_1A_2\delta^2+(4A_1+11A_2)A_1A_2\delta+2(A_1+2A_2)A_2^2),\\
s_1=\frac{\delta a_2(4(2A_1-A_2)A_1^2\delta^2+(8A_1-7A_2)A_1A_2\delta+2(A_1-2A_2)A_2^2)}{4\delta_2\delta_3g_2^2},\\
\lambda_1=\frac{\delta a_2^2}{4\delta_2\delta_3^2g_2^2}(4(2A_1-A_2)A_1^3\delta^4-2(2A_1-A_2)(4A_1-7A_2)A_1^2\delta^3-\\
-3(A_1-A_2)(4A_1-5A_2)A_1A_2\delta^2-3(4A_1^2-7A_1A_2+2A_2^2)A_2^2\delta-\\
-2(A_1-2A_2)A_2^3),\quad c_4=\delta_3\delta_1^{-1},\\
c_3=-2\delta A_2a_2(\delta_1g_2)^{-1},\quad c_2=-2\delta c_4a_2^2(g_2^2)^{-1},\quad c_1=0,\quad c_0=0,\\
b_2=-\delta(\delta_2+A_2)a_2^2(\delta_3g_2^2)^{-1},\quad b_1=-\delta^2\delta_5a_2^3(\delta_3^2g_2^3)^{-1},\\
b_0=(2\delta_3)^2(a_2\delta_4)^{-2},\quad f_1=-\delta_1a_2\delta_3^{-1},\quad f_0=0,\quad a_1=\delta a_2^2g_2^{-1},\\
a_0=0,\quad g_2=2^{-1}(\delta^2\delta_4^3\delta_5a_2^6\delta_3^{-5})^{1/4},\quad g_1=(2\delta_3)^{-1}\delta_4a_2,\quad g_0=0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\delta=\frac{(\sqrt[3]{2\mu^2}-(2A_1-A_2)(\sqrt[3]{4}(8A_1+5A_2)+8\sqrt[3]{\mu}))A_2}{12(2A_1-A_2)A_1\sqrt[3]{\mu}},\\
\mu=(2A_1-A_2)^2\Big[28A_1-68A_2+\\
+9\sqrt{2(16A_1^3-40A_1^2A_2+88A_1A_2^2-27A_2^3)(2A_1-A_2)^{-1}}\Big],\\
\delta_1=\delta(\delta-2)A_1+(2\delta-1)A_2,\qquad \delta_2=\delta A_1+A_2,\\
\delta_3=2\delta A_1+A_2,\qquad \delta_4=(4A_1-3A_2)\delta+2A_2,\\
\delta_5=(4A_1+A_2)A_1\delta+2(A_1+A_2)A_2,\\
\delta_6=2(\delta A_1+3A_2)A_1^2\delta^2+(2A_1+5A_2)A_1A_2\delta+(A_1+2A_2)A_2^2.
\end{gathered}
$$

Решение (13) при условиях (17) будет действительным, если в первом равенстве системы (17) правая часть положительна и выполняются условия

$$c_2>0,\quad \delta_3\delta_4\delta_5>0. \tag{18}$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени получим из дифференциального уравнения (8)

$$\dot\sigma=g_2(2a_2)^{-1}\sigma\sqrt{(b_2\sigma^2+b_1\sigma+b_0)(c_4\sigma^2+c_3\sigma+c_2)}. \tag{19}$$

Рассмотрим численный пример решения (13), (17), (19) дифференциальных уравнений движения гиростата (3), (4) при условиях (18). Пусть

$$A_1 = 20a, \quad A_2 = \frac{41}{2}a, \quad a_2 = g \quad (a > 0,\ g > 0),$$

$$\mu_0 = (3\sqrt{2}\sqrt{10643763} - 7228)^{1/3} \approx 18,77057,$$

$$\delta_0 = -41(\sqrt[3]{26}(175\sqrt[3]{26} - \mu_0^2) + 104\mu_0)(6240\mu_0)^{-1} \approx -0,85561,$$

$$\gamma_1 = 40\delta_0^2 + 2\delta_0 - 41 \approx -13,43036, \quad \gamma_2 = 40\delta_0 + 41 \approx 6,77673,$$

$$\gamma_3 = 80\delta_0 + 41 \approx -27,44653.$$

Тогда из (17) получим

$$\begin{gathered} A_3 = 41\gamma_1(3200\delta_0^2 + 5290\delta_0 + 2501)(\delta_0\gamma_2\gamma_3^2)^{-1}a, \\ B_1 = (62400\delta_0^3 + 291100\delta_0^2 + 432099\delta_0 + 205082)(2\delta_0\gamma_2\gamma_3)^{-1}ag^{-1}, \\ B_2 = 41(2400\delta_0^2 + 4880\delta_0 + 2501)(\delta_0\gamma_2\gamma_3)^{-1}ag^{-1}, \\ B_3 = (64000\delta_0^3 + 196800\delta_0^2 + 233700\delta_0 + 102541)(37\delta_0 + 82)\times \\ \times(2\delta_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1}ag^{-1}, \\ \alpha = -(64000\delta_0^3 + 196800\delta_0^2 + 233700\delta_0 + 102541)(\delta_0\gamma_1\gamma_2)^{-1}ag^{-2}, \\ \beta = (47600\delta_0^3 + 195980\delta_0^2 + 250510\delta_0 + 102541)(\delta_0\gamma_1\gamma_2)^{-1}ag^{-2}, \\ \lambda_1 = 3\delta_0(1664000\delta_0^4 + 2641600\delta_0^3 + 1439100\delta_0^2 + \\ +1443979\delta_0 + 964894)(4\gamma_2\gamma_3^2\hat{g}_2^2)^{-1}ag^2, \\ s_1 = 3\delta_0(20800\delta_0^2 + 4510\delta_0 - 11767)(2\gamma_2\gamma_3\hat{g}_2^2)^{-1}ag; \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \omega_3 = \sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \\ Q(\sigma) = -\frac{2\delta_0(20\delta_0 + 41)}{\gamma_3\hat{g}_2^2}g^2\sigma^2 - \frac{6\delta_0^2(1340\delta_0 + 1107)}{\gamma_3^2\hat{g}_2^3}g^3\sigma + \\ + \frac{3\delta_0^2(1340\delta_0 + 1107)(37\delta_0 + 82)}{2\gamma_3^3\hat{g}_2^4}g^4, \\ R^*(\sigma) = c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\sigma^2 - \frac{82\delta_0}{\gamma_1\hat{g}_2}g\sigma - \frac{2\gamma_3\delta_0}{\gamma_1\hat{g}_2^2}g^2, \\ \nu_1 = g\sigma(\hat{g}_2\sigma + g\delta_0)\hat{g}_2^{-1}, \quad \nu_2 = \left(\hat{g}_2\sigma + \frac{(37\delta_0 + 82)g}{2\gamma_3}\right)\sqrt{Q(\sigma)}, \\ \nu_3 = -\gamma_1\gamma_3^{-1}g\sigma\sqrt{R^*(\sigma)}. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $\hat{g}_2 = g\dfrac{\sqrt{g}}{2\gamma_3^2}\sqrt{\sqrt{6}\delta_0\gamma_3(37\delta_0 + 82)\sqrt{\gamma_3(37\delta_0 + 82)(1340\delta_0 + 1107)}}.$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ находим из уравнения (19). Действительность $\omega_2(\sigma)$ и $\omega_3(\sigma)$ вытекает из условия, что подкоренные функции $Q(\sigma)$ и $R^*(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$ принимают положительные значения. При этом зависимость $\sigma = \sigma(t)$ выражается функциями времени, полученными в результате обращения эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Полученное решение (19)–(21) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением $\omega_3 = f_1^{-1}\nu_3$ и не является частным случаем решения [9].

Заключение. Построено решение уравнений Кирхгофа–Пуассона, характеризующееся двумя полиномиальными инвариантными соотношениями, связывающими, соответственно, вторую и третью компоненты вектора угловой скорости с первой. Данное решение существует при условиях, что гиростатический момент и обобщенный центр масс гиростата принадлежат главной оси эллипсоида инерции для неподвижной точки.

1. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
2. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
3. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
4. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
6. *Зыза А.В.* Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103–109.
7. *Зыза А.В.* О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 29–38.
8. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
9. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.

A.V. Zyza

Polynomial solution to Kirchhoff–Poisson equation with linear invariant relation

A new solution to Kirchhoff–Poisson equations of gyrostat movement under the influence of potential and gyroscopic forces has been found. This solution is characterized by one linear invariant relation of Kirchhoff–Poisson equations.

Keywords: *polynomial solution, Kirchhoff–Poisson equation, gyrostat, invariant relation.*

Донецкий гос. ун-т

Получено 01.09.15

z9125494@mail.ru