УДК 531.38

©2015. **А.И. Синенко**

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ЕГО ПРЕЦЕССИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛИ

На основе модифицированного метода Пуансо и кинематических уравнений П.В. Харламова исследовано движение эллипсоида инерции твердого тела в случае его прецессий относительно вертикали.

Ключевые слова: *метод Пуансо, кинематические уравнения Харламова, прецессии тела.*

Введение. Для кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой в теоретической механике используются различные подходы. В монографии [1] приведены результаты Л. Пуансо, Д. Сильвестра, К. Якоби, И. Мак-Кулага, Г. Дарбу, В. Гесса по исследованию свойств движения твердого тела с неподвижной точкой.

Теорема Пуансо [2] о представлении движения тела качением без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному аксоиду, основанная на применении кинематических уравнений П.В. Харламова [3], позволила получить кинематическое истолкование движения тела для многих решений задачи о движении тела с неподвижной точкой [4–6]. В статье [7] предложен модифицированный метод истолкования движения тела, в котором движение тела представлено качением без скольжения подвижного аксоида вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному аксоиду этого вектора. Применение данного метода [8, 9] позволяет получить наглядное представление о свойствах движения тела, так как в качестве или подвижного, или неподвижного годографов вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, могут быть приняты плоские кривые. Если в истолковании движения тела использовать подвижный годограф данного вектора, лежащий на эллипсоиде инерции твердого тела, построенного в неподвижной точке, то движение тела можно воспроизвести посредством движения этого эллипсоида в неподвижном пространстве [8]. Такой подход в исследовании свойств прецессионных движений тела дает возможность получить аналог истолкования Пуансо движения тела в решении Эйлера.

1. Постановка задачи. Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой примем в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\mathbf{f}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega})$ – заданная вектор-функция, имеющая непрерывные производные по компонентам $\omega_i, \nu_i \ \ (i = \overline{1,3})$; точкой обозначена относительная производная по времени t.

Свяжем с телом систему координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, а в неподвижном пространстве введем систему $O\xi\eta\zeta$ с ортами $\mathbf{э}_1, \mathbf{э}_2, \mathbf{э}_3 = \boldsymbol{\nu}$.

Пусть в результате интегрирования уравнений (1) найдены вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\mathbf{i}_j, \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \sum_{j=1}^{3} \nu_j(t)\mathbf{i}_j. \tag{2}$$

Вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(t)$ из (2) описывает подвижный годограф вектора угловой скорости. Неподвижный годограф этого вектора описывается вектор-функцией

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_\xi(t)\mathbf{э}_1 + \omega_\eta(t)\mathbf{э}_2 + \omega_\zeta(t)\mathbf{э}_3, \tag{3}$$

где в силу уравнений П.В. Харламова [3]

$$\begin{gathered}
\omega_\zeta(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\nu_j(t), \quad \omega_\rho^2(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 - \omega_\zeta^2(t), \\
\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau))\right] d\tau, \\
\omega_\xi(t) = \omega_\rho(t)\cos\alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t)\sin\alpha(t).
\end{gathered} \tag{4}$$

Следуя [4], введем в рассмотрение вектор, коллинеарный вектору угловой скорости:

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t), \tag{5}$$

где $b(t)$ – дифференцируемая функция переменной t. Движение тела с неподвижной точкой может быть представлено качением подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\mathbf{i}_j \tag{6}$$

по неподвижному годографу этого вектора

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\left(\omega_\xi(t)\mathbf{э}_1 + \omega_\eta(t)\mathbf{э}_2 + \omega_\zeta(t)\mathbf{э}_3\right). \tag{7}$$

При нахождении годографов (6), (7) необходимо использовать соотношения (2), (4).

Выберем функцию $b(t)$, входящую в (6), (7), следующим образом [7]. Обозначим через A_{ij} $(i, j = \overline{1,3})$ компоненты тензора инерции A. Тогда уравнение эллипсоида инерции имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}x_ix_j = \sigma_0^2. \tag{8}$$

Запишем компоненты вектора (5), используя первое равенство из (2):

$$b_i(t) = b(t)\omega_i(t) \quad (i = \overline{1,3}). \tag{9}$$

Потребуем, чтобы конец вектора $\mathbf{b}(t)$ принадлежал эллипсоиду (8). Тогда из (8), (9) получим

$$b(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{3} A_{ij}\omega_i(t)\omega_j(t)}}. \tag{10}$$

Если известно решение (2) уравнений (1), то подстановка функций $\omega_j(t)$ $(j = \overline{1,3})$; $\omega_\xi(t)$, $\omega_\eta(t)$, $\omega_\zeta(t)$ из (4) и функции (10) в равенства (6), (7) позволяет определить подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$.

Рассмотрим класс прецессионных движений тела с неподвижной точкой [10, 11]. Пусть $\mathbf{a} = (0,0,1)$ единичный вектор, неизменно связанный с телом. Движение тела называется прецессией относительно вертикали, если постоянен угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$, т. е. для уравнений (1) имеет место инвариантное соотношение

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\mathbf{a};\boldsymbol{\nu})). \tag{11}$$

В [10] показано, что для вектора $\boldsymbol{\omega}$ справедливо разложение

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi(t)\mathbf{a} + \dot\psi(t)\boldsymbol{\nu}, \tag{12}$$

а компоненты ν_i имеют вид

$$\nu_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \tag{13}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$, $\varphi(t)$ – вспомогательная переменная. В формуле (12) функции $\dot\varphi(t)$, $\dot\psi(t)$ определяют скорости собственного вращения и прецессии тела. Из (12) следует

$$\omega_1(t) = a_0'\dot\psi(t)\sin\varphi(t), \quad \omega_2(t) = a_0'\dot\psi(t)\cos\varphi(t), \quad \omega_3(t) = \dot\varphi(t) + a_0\dot\psi(t). \tag{14}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ в цилиндрических координатах в неподвижном пространстве с учетом (4) определяются уравнениями [10]

$$\omega_\zeta(t) = \dot\psi(t) + \dot\varphi(t)a_0, \quad \omega_\rho^2(t) = a_0'^2\dot\varphi^2(t), \quad \alpha(t) = \psi(t) + \alpha_0. \tag{15}$$

На основании (12) запишем функцию (10)

$$b(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\dot\varphi^2(t) + 2(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}(t))\dot\varphi(t)\dot\psi(t) + (A\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\boldsymbol{\nu}(t))\dot\psi^2(t)}}, \tag{16}$$

где вектор $\boldsymbol{\nu}$ имеет компоненты (13).

В силу (9), (14), (15) компоненты вектора $\mathbf{b}(t)$ в подвижной системе координат имеют вид

$$\begin{gathered} b_1(t) = a_0' b(t)\dot\psi(t)\sin\varphi(t), \quad b_2(t) = a_0' b(t)\dot\psi(t)\cos\varphi(t), \\ b_3(t) = b(t)(\dot\varphi(t) + a_0\dot\psi(t)), \end{gathered} \tag{17}$$

а компоненты этого вектора в неподвижной системе координат таковы:

$$\begin{gathered} b_\xi(t) = a_0' b(t)|\dot\varphi(t)|\cos\psi(t), \quad b_\eta(t) = a_0' b(t)|\dot\varphi(t)|\sin\psi(t), \\ b_\zeta(t) = b(t)(\dot\varphi(t)a_0 + \dot\psi(t)), \end{gathered} \tag{18}$$

где функция $b(t)$ имеет значение (16).

Движение эллипсоида инерции тела с неподвижной точкой получим качением без скольжения кривой (17) по кривой (18). В формулах (18) значение α_0 принято равным нулю.

В данной статье при изучении движения эллипсоида инерции тела в качестве уравнений (1) рассмотрены уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил класса Кирхгофа–Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol\omega} = (A\boldsymbol\omega + \boldsymbol\lambda) \times \boldsymbol\omega + \boldsymbol\omega \times B\boldsymbol\nu + \boldsymbol\nu \times (C\boldsymbol\nu - \mathbf{s}), \tag{19}$$

$$\dot{\boldsymbol\nu} = \boldsymbol\nu \times \boldsymbol\omega. \tag{20}$$

Уравнения (19), (20) имеют первые интегралы

$$\begin{gathered} \boldsymbol\nu \cdot \boldsymbol\nu = 1, \quad (A\boldsymbol\omega + \boldsymbol\lambda) \cdot \boldsymbol\nu - \frac{1}{2}(B\boldsymbol\nu \cdot \boldsymbol\nu) = k, \\ A\boldsymbol\omega \cdot \boldsymbol\omega - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol\nu) + (C\boldsymbol\nu \cdot \boldsymbol\nu) = 2E. \end{gathered} \tag{21}$$

В (19), (21) приняты обозначения: $\boldsymbol\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка.

2. Предварительные преобразования. Наличие интегралов (21) позволяет упростить выражение (16). Для этого подставим (12), (13) в интегралы (21)

$$\dot\varphi h_1(\varphi) + \dot\psi h_2(\varphi) = f_2(\varphi), \tag{22}$$

$$A_{33}\dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi h_1(\varphi) + \dot\psi^2 h_2(\varphi) = g_2(\varphi), \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} & h_1(\varphi) = \alpha_1\cos\varphi + \alpha_1'\sin\varphi + \alpha_0, \\ & h_2 = A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + A_0, \\ & f_2(\varphi) = b_2\cos 2\varphi + b_2'\sin 2\varphi + b_1\cos\varphi + b_1'\sin\varphi + b_0, \\ & g_2(\varphi) = c_2\cos 2\varphi + c_2'\sin 2\varphi + c_1\cos\varphi + c_1'\sin\varphi + c_0', \end{aligned} \tag{24}$$

а

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = a_0' A_{23}, \quad \alpha_1' = a_0' A_{13}, \quad \alpha_0 = a_0 A_{33}, \quad A_2 = \frac{{a_0'}^2}{2}(A_{22} - A_{11}),\\
&A_2' = a_0'^2 A_{12}, \quad A_1 = 2a_0 a_0' A_{23}, \quad A_1' = 2a_0 a_0' A_{13},\\
&A_0 = \frac{1}{2}\left[a_0'^2(A_{11} + A_{22}) + 2a_0^2 A_{33}\right], \quad b_2 = \frac{{a_0'}^2}{4}(B_{22} - B_{11}),\\
&b_2' = \frac{a_0'^2}{2} B_{12}, \quad b_1 = a_0'(a_0 B_{23} - \lambda_2), \quad b_1' = a_0'(a_0 B_{13} - \lambda_1),\\
&b_0 = \frac{1}{4}[a_0'^2(B_{11} + B_{22}) + 2a_0^2 B_{33}] - a_0\lambda_3 + k, \quad c_2 = \frac{a_0'^2}{2}(C_{11} - C_{22}),\\
&c_2' = -a_0'^2 C_{12}, \quad c_1 = 2a_0'(s_2 - a_0 C_{23}), \quad c_1' = 2a_0'(s_1 - a_0 C_{13}),\\
&c_0 = 2E + 2a_0 s_3 - \frac{1}{2}[a_0'^2(C_{11} + C_{22}) + 2a_0^2 C_{33}].
\end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку $h_2(\varphi) > 0$ для любых φ, то из (22) имеем

$$\dot\psi = \frac{f_2(\varphi) - \dot\varphi h_1(\varphi)}{h_2(\varphi)}. \tag{26}$$

Подставим $\dot\psi$ из (26) в уравнение (23)

$$\dot\varphi^2 = \frac{h_2(\varphi) g_2(\varphi) - f_2^2(\varphi)}{H_2(\varphi)}, \tag{27}$$

где

$$\begin{gathered}
H_2(\varphi) = \rho_2 \cos 2\varphi + \rho_2' \sin 2\varphi + \rho_0,\\
\rho_2 = \frac{a_0'^2}{2}(a_{11}^* - a_{22}^*), \quad \rho_2' = -\frac{a_0'}{2} a_{12}^*, \quad \rho_0 = \frac{a_0'^2}{2}(a_{11}^* + a_{22}^*).
\end{gathered} \tag{28}$$

В последних трех равенствах системы (28) $a_{ij}^* = a_{ij}|A|$, где a_{ij} – компоненты гирационного тензора [4]. В [10] показано, что $H_2(\varphi) > 0$ для любых значений φ.

На основании (23), (24) выражение $b(t)$ из (16) принимает вид

$$b(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}. \tag{29}$$

Внесем выражение (29) в формулы (17), (18):

$$\begin{gathered}
b_1(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}\dot\psi \sin\varphi, \quad b_2(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}\dot\psi\cos\varphi,\\
b_3(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}(\dot\varphi + a_0\dot\psi),
\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}
b_\xi(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}|\dot\varphi|\cos\psi, \quad b_\eta(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}|\dot\varphi|\sin\psi,\\
b_\zeta(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}(a_0\dot\varphi + \dot\psi).
\end{gathered} \tag{31}$$

Формулы (30), (31) определяют подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ для прецессионных движений.

3. Регулярные прецессии. Данный класс движений характеризуется условиями $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$, где n и m – постоянные. В этом случае из соотношений (30) имеем

$$\begin{gathered} b_1(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} m \sin nt, \quad b_2(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} m \cos nt, \\ b_3(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} (n + a_0 m). \end{gathered} \tag{32}$$

Поскольку конец вектора $b(t)$ лежит на эллипсоиде инерции тела, то компоненты этого вектора удовлетворяют уравнению (8)

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} b_i b_j = \sigma_0^2. \tag{33}$$

Условия существования регулярных прецессий гиростата, описываемых уравнениями (19), (20), получены в монографии [10]. Выпишем наиболее характерные равенства из этих условий

$$A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad C_{11} - C_{22} = m^2(A_{22} - A_{11}), \tag{34}$$

где $A_{22} \neq A_{11}$. В силу (24), (25), (34) функция $g_2(\varphi)$ не может быть постоянной. Из последнего равенства (32) при $n + a_0 m = 0$ функция $b_3(t) = 0$ и поэтому подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ лежит в плоскости и является линией пересечения этой плоскости и эллипсоида (33). При условии $n + a_0 m \neq 0$ выразим $\sqrt{g_2}$ из последнего равенства системы (32) и подставим полученное значение в первые два уравнения из системы (32)

$$b_1(t) = \frac{a_0' m b_3(t)}{n + a_0 m} \sin nt, \quad b_2(t) = \frac{a_0' m b_3(t)}{n + a_0 m} \cos nt.$$

Исключая в этих равенствах переменную t, получим

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{a_0'^2 m^2 b_3^2}{(n + a_0 m)^2}. \tag{35}$$

Таким образом, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является линией пересечения эллипсоида (33) и конуса (35).

Рассмотрим неподвижный годограф (31) при $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$

$$\begin{gathered} b_\xi(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} |n| \cos mt, \quad b_\eta(t) = \frac{a_0'\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} |n| \sin mt, \\ b_\zeta(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} (m + n a_0), \end{gathered} \tag{36}$$

где

$$g_2(\varphi(t)) = c_2 \sin 2nt + c_2' \sin 2nt + c_1 \cos nt + c_1' \sin nt + c_0'. \tag{37}$$

Из уравнений (36) в силу (37) следует, что при $m + na_0 = 0$ неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является линией пересечения плоскости $b_\zeta = 0$ и поверхности

$$\begin{gathered} b_\xi^2 \left[c_2 \cos\left(\frac{2n}{m}\operatorname{arctg}\frac{b_\eta}{b_\xi}\right) + c_2' \sin\left(\frac{2n}{m}\operatorname{arctg}\frac{b_\eta}{b_\xi}\right) + c_1 \cos\left(\frac{n}{m}\operatorname{arctg}\frac{b_\eta}{b_\xi}\right) + \right. \\ \left. + c_1' \sin\left(\frac{n}{m}\operatorname{arctg}\frac{b_\eta}{b_\xi}\right) + c_0 \right] - a_0'^2 \sigma_0^2 n^2 \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{b_\eta}{b_\xi}\right) = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

В случае $m + na_0 \neq 0$ неподвижный годограф является линией пересечения поверхности (38) и эллипсоида вращения

$$b_\xi^2 + b_\eta^2 = \left(\frac{a_0' n}{a_0 n + m}\right)^2 b_\zeta^2. \tag{39}$$

Движение эллипсоида инерции тела в случае регулярной прецессии получим качением без скольжения подвижного аксоида вектора $\mathbf{b}(t)$ по неподвижному аксоиду (направляющие линии задаются соотношениями (33), (35) и (38), (39), если $a_0 m + n \neq 0$).

4. Полурегулярные прецессии первого типа. Данный класс прецессий характеризуется условием $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная. Выбирая начальное значение ψ нулевым, имеем

$$\psi(t) = mt. \tag{40}$$

В монографии [10] показано, что существуют два вида зависимости $\dot{\varphi}$ от переменной φ

$$\dot{\varphi} = a_0 + b \sin\varphi, \tag{41}$$

$$\dot{\varphi}^2 = d_0 + d_1 \sin\varphi. \tag{42}$$

На основании формул (26), (27) и обозначений (24), (25), (28) в [10] найдены условия существования решений (40), (41) и (40), (42).

Рассмотрим случай (40), (41). Подставим выражения (40), (41) в уравнения (30), (31)

$$\begin{gathered} b_1(t) = \frac{\sigma_0 a_0' m}{\sqrt{g_2(\varphi)}} \sin\varphi, \quad b_2(t) = \frac{\sigma_0 a_0' m}{\sqrt{g_2(\varphi)}} \cos\varphi, \\ b_3(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}((a + a_0 m) + b \sin\varphi). \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} b_\xi(t) = \frac{a_0' \sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} |\dot{\varphi}| \cos mt, \quad b_\eta(t) = \frac{a_0' \sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}} |\dot{\varphi}| \sin mt, \\ b_\zeta(t) = \frac{a_0' \sigma_0}{\sqrt{g_2(\varphi)}}((m + a_0 a) + a_0 b \sin\varphi). \end{gathered} \tag{44}$$

Здесь $\varphi(t)$ определяется из уравнений (41).

Из последнего равенства (43) в силу первого равенства системы (43) имеем

$$\left(b_3 - \frac{bb_1}{a_0' m}\right)^2 = \frac{\sigma_0^2 (a + a_0 m)^2}{g_2(\varphi)}.$$

Подставляя сюда выражение $\sigma_0^2/g_2(\varphi)$, найденное из первых двух равенств (43), получим

$$\left(b_3 - \frac{bb_1}{a_0' m}\right)^2 - \frac{(a + a_0 m)^2}{{a_0'}^2 m^2}(b_1^2 + b_2^2) = 0. \tag{45}$$

Таким образом, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является линией пересечения эллипсоида (33) и конуса (45).

Рассмотрим уравнения (44). Поскольку в общем случае исключение переменной t затруднительно, то рассмотрим случай, когда $g_2(\varphi) = c_1' \sin\varphi + c_0'$. Обозначая $b_\rho^2 = b_1^2 + b_2^2$, из (44) найдем

$$c_1' m^2 b_\rho^2 - a_0'^2 (a c_1' - b c_0') \left(b_\zeta - \frac{a_0}{a_0'} b_\rho\right)^2 - a_0'^2 b^2 m^2 = 0. \tag{46}$$

Уравнение (46) описывает в подвижном пространстве поверхность второго порядка. Для построения неподвижного годографа необходимо, наряду с уравнением (46), рассмотреть проекцию неподвижного годографа (44) на горизонтальную плоскость $O\xi\eta$. Для этой цели можно использовать полярную систему координат (b_ρ, β), где $\beta = mt$. Тогда из (44) в силу (41) имеем

$$\begin{aligned} b_\xi(t) &= a_0' \sigma_0 (a + b\sin\varphi(t)) \frac{1}{\sqrt{c_1' \sin\varphi(t) + c_0'}} \cos\beta, \\ b_\eta(t) &= a_0' \sigma_0 (a + b\sin\varphi(t)) \frac{1}{\sqrt{c_1' \sin\varphi(t) + c_0'}} \sin\beta. \end{aligned} \tag{47}$$

Полагая $m > 0$, заключаем, что угол β монотонно возрастает. Из (47) следует, что проекция неподвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ расположена в кольце, для которого граничными окружностями являются окружности с радиусами $r_1 = \max b_\rho$, $r_2 = \min b_\rho$ при изменении φ в промежутке $[0, \infty)$ (полагаем $a > b > 0$). Данное свойство проекции неподвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ позволяет построить линейчатую поверхность с образующими, параллельными оси O_ζ, линия пересечения данной поверхности с поверхностью (46) является неподвижным годографом вектора $\mathbf{b}(t)$.

Представляет интерес изучить прецессионно-изоконические движения в случае полурегулярной прецессии тела первого типа. Изоконическими движениями тела называют движения, при которых подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной плоскости, проходящей через неподвижную точку [10]. Условием изоконичности движения гиростата служит инвариантное соотношение [10]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}) = 0, \tag{48}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом. Для прецессии первого типа в формуле (41) выполняются условия $a = mb_0$, $b = mc_0$, $b_0^2 = 1 + c_0^2$. В этом случае из (41) следует [10]

$$\varphi(t) = 2\mathrm{arctg}\ \left(\frac{b_0 \mathrm{tg}\frac{mt}{2}}{1 - c_0 \mathrm{tg}\frac{mt}{2}}\right). \tag{49}$$

Как отмечено выше, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ – линия пересечения поверхностей (45) и (33). В силу изоконичности неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ – также линия пересечения (45) и (33). То есть неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ тоже является замкнутой кривой. Для воспроизведения движения эллипсоида инерции тела-носителя необходимо воспользоваться формулой (49).

Рассмотрим случай (42). Будем полагать $g_2 = c_1' \sin\varphi + c_0'$. Тогда из формул (30), (31) получим

$$\begin{gathered} b_1(t) = \frac{\sigma_0 a_0' m}{\sqrt{c_1' \sin\varphi + c_0'}} \sin\varphi, \quad b_2(t) = \frac{\sigma_0 a_0' m}{\sqrt{c_1' \sin\varphi + c_0'}} \cos\varphi, \\ b_3(t) = \frac{\sigma_0 a_0' m}{\sqrt{c_1' \sin\varphi + c_0'}} \left(a_0 m + \sqrt{d_0 + d_1 \sin\varphi}\right), \end{gathered} \tag{50}$$

$$\begin{gathered} b_\xi(t) = \frac{a_0' \sigma_0 \sqrt{d_0 + d_1 \sin\varphi}}{\sqrt{c_1' \sin\varphi + c_0'}} \cos mt, \ b_\eta(t) = \frac{a_0' \sigma_0 \sqrt{d_0 + d_1 \sin\varphi}}{\sqrt{c_1' \sin\varphi + c_0'}} \sin mt, \\ b_\zeta = \frac{\sigma_0 \sqrt{d_0 + d_1 \sin\varphi}}{\sqrt{c_1' \sin\varphi + c_0'}} (m + a_0 \sqrt{d_0 + d_1 \sin mt}). \end{gathered} \tag{51}$$

Если в соотношениях (50) исключить переменную φ, то найдем уравнение поверхности, которая описывается многочленом по b_1, b_2, b_3 восьмого порядка. Линией пересечения этой поверхности и эллипсоида (33) является подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$. Неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ определяется параметрическими уравнениями (51). Для его построения необходимо из (51) найти уравнение меридиана поверхности, на которой лежит неподвижный годограф, и исследовать проекцию неподвижного годографа на плоскость $O\xi\eta$.

5. Полурегулярные прецессии второго типа. Данный класс движений характеризуется постоянством скорости собственного вращения: $\dot\varphi = n$ (n – постоянная). Полагая, что при $t = 0, \varphi = 0$, имеем $\varphi = nt$. Условия существования прецессий определяются из (26), (27) в силу (24), (25), (28) и из одной проекции левой и правой частей (19) на вектор $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}$. Они приведены в статьях [12, 13] и в монографии [10].

Запишем уравнения (30)), (31), полагая в них $\varphi = nt$

$$\begin{gathered} b_1(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(nt)}} \dot\psi \sin nt, \quad b_2(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(nt)}} \dot\psi \cos nt, \\ b_3(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(nt)}} (n + a_0 \dot\psi), \end{gathered} \tag{52}$$

$$b_\xi(t) = \frac{\sigma_0 a_0' n}{\sqrt{g_2(nt)}} \cos\psi,\ \ b_\eta(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(nt)}} \sin\psi,\ \ b_\zeta(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{g_2(nt)}}(a_0 n + \dot\psi), \quad (53)$$

где в силу (26)

$$\dot\psi = \frac{f_2(nt) - n h_1(nt)}{h_2(nt)}. \quad (54)$$

Для получения свойств подвижного и неподвижного годографов (см. (52), (53)) будем изучать случай прецессионно-изоконических движений второго типа, т. е. будем полагать, что выполнено равенство (48). В этом случае выражение (54) имеет вид [10]

$$\dot\psi = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin nt}. \quad (55)$$

Пусть $g_2 = c_0' + c_1' \sin nt$, тогда из (52), (53) следует

$$\begin{gathered} b_1(t) = \frac{\sigma_0 a_0' n}{(b_0 + c_0 \sin nt)\sqrt{c_0' + c_1' \sin nt}} \sin nt, \\ b_2(t) = \frac{\sigma_0 a_0' n}{(b_0 + c_0 \sin nt)\sqrt{c_0' + c_1' \sin nt}} \cos nt, \\ b_3(t) = \frac{\sigma_0 n(a_0 + b_0 + c_0 \sin nt}{(b_0 + c_0 \sin nt)\sqrt{c_0' + c_1' \sin nt}}, \end{gathered} \quad (56)$$

$$\begin{gathered} b_\xi(t) = \frac{\sigma_0 a_0' n}{\sqrt{c_0' + c_1' \sin nt}} \cos\psi, \quad b_\eta(t) = \frac{\sigma_0 a_0' n}{\sqrt{c_0' + c_1' \sin nt}} \sin\psi, \\ b_\zeta(t) = \frac{\sigma_0 (a_0 b_0 + 1 + a_0 c_0 \sin nt}{(b_0 + c_0 \sin nt)\sqrt{c_0' + c_1' \sin nt}}, \end{gathered} \quad (57)$$

где в силу (55)

$$\psi(t) = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{nt}{2}}{b_0 + c_0 \mathrm{tg}\frac{nt}{2}}\right). \quad (58)$$

Для изоконического движения тела-носителя достаточно найти поверхности, линией пересечения которых является подвижный годограф. Одной из таких поверхностей является эллипсоид (33). Уравнение второй поверхности определим путем исключения переменной t в равенствах (56)

$$[a_0' b_3 + (a_0 + b_0 - c_0) b_1][a_0' b_3 - (a_0 + b_0 + c_0) b_1] - (a_0 + b_0)^2 b_2^2 = 0.$$

Таким образом, подвижный годограф $\mathbf{b}(t)$ – линия пересечения эллипсоида (33) и конуса. Неподвижный годограф этого вектора, описываемый параметрическими уравнениями (57), в которых $\psi(t)$ имеет вид (58), симметричен подвижному годографу относительно касательной к ним плоскости. Движение гиростата обладает свойством периодичности с периодом $T = \dfrac{2\pi}{n}$.

6. Прецессионно-изоконические движения общего типа. Предположим, что гиростат совершает прецессионно-изоконическое движение, для которого выполняются соотношения (12) и (48).

В монографии [10] показано, что это возможно в двух вариантах:

- $$\mathbf{c} = \mathbf{a}, \quad \dot{\psi} = \dot{\varphi}, \tag{59}$$
- $$\mathbf{c} \neq \mathbf{a}, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin\varphi} \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2). \tag{60}$$

Рассмотрим случай (59). Запишем уравнения подвижного и неподвижного годографов (30), (31):

$$b_1(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(\varphi)}}\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad b_2(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(\varphi)}}\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad b_3(t) = \frac{\sigma_0\dot{\varphi}(1+a_0)}{\sqrt{g_2(\varphi)}}, \tag{61}$$

$$b_\xi(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(\varphi)}}|\dot{\varphi}|\cos\varphi, \quad b_\eta(t) = \frac{\sigma_0 a_0'}{\sqrt{g_2(\varphi)}}|\dot{\varphi}|\sin\varphi, \quad b_\zeta(t) = \frac{\sigma_0\dot{\varphi}(1+a_0)}{\sqrt{g_2(\varphi)}}. \tag{62}$$

Годографы (61), (62) симметричны друг другу относительно касательной плоскости.

Исключая в равенствах (61) переменную φ, получим

$$(1+a_0)(b_1^2+b_2^2) - (1-a_0)b_3^2 = 0. \tag{63}$$

Таким образом, и подвижный, и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ являются линией пересечения эллипсоида (33) и конуса (63). Движение изображающей точки по годографам зависит от свойств функции $\dot{\varphi}(t)$. Эта функция удовлетворяет уравнениям (26), (27). В [10] показано, что для уравнений (19), (20) возможны два случая существования функции $\varphi(t)$. В первом случае $\dot{\varphi} = a + b\sin\varphi$; во втором $\dot{\varphi}^2 = a_1 + b_1\sin\varphi$ (a, b, a_1, b_1 – постоянные параметры). Движение эллипсоида инерции тела получим качением без скольжения кривой (61) по кривой (62).

Рассмотрим теперь случай (60). Для него уравнения (30) таковы

$$\begin{gathered} b_1(t) = \frac{\sigma_0 a_0'\dot{\varphi}\sin\varphi}{(b_0 + c_0\sin\varphi)\sqrt{g_2(\varphi)}}, \quad b_2(t) = \frac{\sigma_0 a_0'\dot{\varphi}\cos\varphi}{(b_0 + c_0\sin\varphi)\sqrt{g_2(\varphi)}}, \\ b_3(t) = \frac{\sigma_0\dot{\varphi}(a_0 + b_0 + \cos\varphi)}{(b_0 + c_0\sin\varphi)\sqrt{g_2(\varphi)}}. \end{gathered} \tag{64}$$

Исключим в (64) переменную φ:

$$(a_0' b_3 - c_0 b_1)^2 - (a_0+b_0)^2(b_1^2+b_2^2) = 0. \tag{65}$$

Следовательно, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ – линия пересечения поверхностей (33), (65). Так как $a_0 + b_0 \neq 0$, то уравнение (65) описывает конус. Неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ также является линией пересечения эллипсоида и конуса.

Отметим, что основные свойства годографов вектора $\mathbf{b}(t)$ получены без обращения к зависимости $\varphi(t)$.

Заключение. В статье исследованы свойства вектора, коллинеарного угловой скорости, в случае прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Полученные результаты могут быть применены в использовании движения гиростата методом, предложенным Г.В. Горром [7].

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
2. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de rotation des corps // J. Math. Pures Appl. – 1851. – Bd. 1, № 6. – С. 289–336.
3. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502-507.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.
5. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 407 с.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наукова думка, 1978. – 294 с.
7. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
8. *Горр Г.В., Синенко А.И.* О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 2014. – **78**, вып. 3. – С. 334–345.
9. *Синенко А.И.* О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела методом Пуансо // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 97–108.
10. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
11. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. – 1947. – 26, f. 3-4. – P. 271–281.
12. *Узбек Е.К.* Полурегулярные прецессии второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 31–41.
13. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Новые классы прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАНУ. – 2006. – Вып. 12. – С. 36–45.

A.I. Synenko

On motion of the ellipsoid of inertia of a rigid body in the case of its precession about the vertical

On the basis of modified Poinsot method and Kharlamov's kinematical equations, motion of the ellipsoid of inertia of a rigid body is investigated in the the case of its precession about the vertical.

Keywords: *Poinsot method, Kharlamov's kinematical equations, precession of a body.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 21.05.15
forjobmain@gmail.com